ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ»

1. Βασικές αρχές της θερμοδυναμικής: οι 4 νόμοι της θερμοδυναμικής, η έννοια του θερμοδυναμικού συστήματος, προσδιορισμός και ιδιότητες εντροπίας.

2. Μαθηματικός φορμαλισμός της θερμοδυναμικής: καταστατικοί χώροι, εκτατικές και εντατικές μεταβλητές, αρχή μέγιστης εντροπίας, η θεμελιώδης θερμοδυναμική αναπαράσταση, άλλες αναπαραστάσεις, σχέσεις Maxwell, συνθήκες ευστάθειας.

3. Πρότυπα θερμοδυναμικά συστήματα και διαδικασίες: ιδανικά αέρια, μαγνητικά συστήματα, θερμοδυναμικοί κύκλοι, θερμικές μηχανές, διαδικασία Joule-Thomson.

4. Θερμοδυναμική μεταβάσεων φάσης: μεταβάσεις 1^{ης} τάξης, εξίσωση Clausius-Clapeyron, συνεχείς μεταβάσεις, κρίσιμοι εκθέτες, θεωρία Landau.

5. Αρχές της στατιστικής μηχανικής: Εξίσωση Liouville, κατανομές κατά Gibbs, εργοδικότητα και μίξη, συναρτήσεις επιμερισμού, κβαντική στατιστική μηχανική, κατανομές Fermi-Dirac και Bose-Einstein, στατιστικές διακυμάνσεις.

6. Ιδανικά αέρια: μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού, αέριο Boltzmann, αέριο Fermi, διαμαγνητισμός Landau, αέριο φωτονίων, αέριο Bose, συμπύκνωση Bose-Einstein.

7. Αλληλεπιδρώντα συστήματα: θεώρημα virial, μοντέλο του Ising, θεωρία μέσου πεδίου.

8. 2^{ος} νόμος και μη-αντιστρεψιμότητα: εντροπίες κατά Gibbs και κατά Boltzmann, μακροκαταστάσεις, η εξίσωση Boltzmann για αραιά αέρια, θεώρημα H, δακτύλιος του Kac, εξίσωση master.

Βασική βιβλιογραφία.

H. B. Callen, Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics (john Wiley, 1985).

K. Hwang, Statistical Mechanics (John Wiley, 1988), κεφ. 6-8, 11-12.

1ο φυλλάδιο ασκήσεων

Βασικές αρχές της θερμοδυναμικής

1. Οι παρακάτω είναι εκφράσεις για την εντροπία σε διάφορα υδροδυναμικά συστήματα. Εντοπίστε ποιες εκφράσεις δεν είναι φυσικά αποδεκτές και προσδιορίστε ποιες ιδιότητες της εντροπίας δεν ικαοποιούν.

α. $S = a\,(NVU)^{\frac{1}{3}}$

β. $S = b\frac{NU}{V}$

γ. $S = c\,\sqrt{NU + V^2}$

δ. $S = N\,ln\left(U^{3/2}VN^{-5/2}\right)$

ε. $S = \sqrt{NU}exp\left(-\frac{dV}{N}\right)$

Οι ποσότητες a, b,c,d είναι θετικές σταθερές, U η εσωτερική ενέργεια, V ο όγκος, N ο αριθμός σωματιδίων.

2. Η εντροπία ενός αερίου δίνεται από τη σχέση $S = c(VUN)^{1/3}$, όπου c θετική σταθερά. Ένα απομονωμένο δοχείο είναι χωρισμένο με αδιαβατικό πέτασμα σε δύο περιοχές A και B, ίσων όγκων. O αριθμός των μορίων στις δύο περιοχές είναι ίσος, αλλά οι εσωτερικές ενέργειες U_A και U_B διαφέρουν. Αν το πέτασμα γίνει διαθερμικό, πόση θα είναι η εσωτερική ενέργεια σε κάθε μία από τις δύο περιοχές όταν επέλθει η ισορροπία και πόση θα είναι η μεταβολή της συνολικής εντροπίας;

3. Βρείτε τις καταστατικές εξισώσεις για ένα σύστημα με θεμελιώδη εξίσωση $S = {}^{UV}\!/_{N} - {}^{N^3}\!/_{UV}$. Γράψτε την εξίσωση της πίεσης P = f(T, υ), όπου υ=V/N ο ειδικός όγκος. Δείξτε ότι η θερμοκρασία είναι θετική. Προσδιορίστε τη μορφή των αδιαβατικών καμπυλών στο επίπεδο P-υ.

4. Βρείτε την θεμελιώδη εξίσωση για αέριο που περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση P = γ U/V, όπου γ θετική σταθερά και ο αριθμός σωματιδίων N δε διατηρείται.

5. Βρείτε τη θεμελιώδη εξίσωση για αέριο που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις $U = \frac{3}{2}PV, T = bu^{1/2}\upsilon^{-1/3}$,όπου b θετική σταθερά, u = U/N, υ = V/N.

6. Μονατομικό ιδανικό αέριο σε θερμικά μονωμένο δοχείο όγκου V αφήνεται να εκτονωθεί έως ότου να καταλάβει όγκο V’ > V. Βρείτε το λόγο της τελικής πίεσης προς την αρχική, της τελικής θερμοκρασίας προς την αρχική και υπολογίστε τη μεταβολή της εντροπίας.

7. Η Γη λαμβάνει από τον Ήλιο ενέργεια με ισχύ P υπό μορφή φωτονίων στο ορατό μέρος του φάσματος, την οποία επανεκπέμπει υπό μορφή φωτονίων στο υπέρυθρο. Θεωρώντας ότι και στις δύο περιπτώσεις η ακτινοβολία είναι θερμική με θερμοκρασίες $T_Γ$ (Γης) και $T_Η$ (Ηλίου) αντίστοιχα, βρείτε το ρυθμό μεταβολής της εντροπίας της Γης. Είναι θετικός ή αρνητικός;

8. Η θεωρία του Debye για τα κρυσταλλικά στερεά οδηγεί στην ακόλουθη θεμελιώδη εξίσωση $u = a\,e^{b(\upsilon-\upsilon_0)^2}s^{4/3}e^{s/3}$, όπου A, b, υ_0 θετικές σταθερές. Δείξτε ότι για μικρές θερμοκρασίες το c_υ είναι ανάλογο του T^3 ενώ για μεγάλες $c_\upsilon = 3$. Δείξτε ότι για P = 0 μηδενίζεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής α.

9. Δίνεται η θεμελιώδης εξίσωση για αέριο van der Waals $S = N\,ln[(\upsilon - b)(u + a/\upsilon)^\gamma]$, όπου b και γ θετικές σταθερές. Υπολογίστε τους συντελεστές α, κ_T και c_P. (Θα πάρετε ανάπτυγμα γύρω από την έκφραση της εντροπίας για ιδανικό αέριο.)

2^o φυλλάδιο ασκήσεων

Μαθηματικός φορμαλισμός της θερμοδυναμικής

1. Γράψτε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz για αέριο φωτονίων ξεκινώντας από την καταστατική του εξίσωση.

2. Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση $F = -NT\, ln\left(1 + e^{-\varepsilon/T}\right)$, όπου ε θετική σταθερά. Γράψτε τη θεμελιώδη εξίσωση στην αναπαράσταση εντροπίας.

3. Θερμοδυναμικό σύστημα ικανοποιεί τις καταστατικές εξισώσεις $u = \frac{3}{2}P\upsilon, P = b\upsilon T^4$, όπου b θετική σταθερά. Βρείτε τη θεμελιώδη εξίσωση για την εντροπία, την ελεύθερη ενέργεια Gibbs και την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz.

4. Υλικό έχει συντελεστή διαστολής $\alpha = \frac{1}{P\upsilon} + \frac{b}{\upsilon T^2}$ και ισόθερμη συμπιεστότητα $\kappa_T = (Tf(P) + c/P)/\upsilon$, όπου b και c σταθερές. Υπολογίστε τη συνάρτηση f(P). Βρείτε την καταστατική εξίσωση του συστήματος και προσδιορίστε τις συνθήκες ευστάθειας.

5. Αποδείξτε τις σχέσεις $TdS = Nc_\upsilon dT + \frac{\alpha\, T}{\kappa_T}dV,\ \ TdS = Nc_P dT - \alpha TVdP$. Από τη δεύτερη δείξτε ότι $c_P = c_\upsilon + \frac{T\upsilon\alpha^2}{\kappa_T}$.

6. Δείξτε ότι $\frac{\kappa_S}{\kappa_T} = \frac{c_\upsilon}{c_P}$.

7. Κάντε αναγωγή των παραγώγων $\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon}\right)_T$ και $\left(\frac{\partial s}{\partial f}\right)_P$.

8. Δείξτε ότι $\left(\frac{\partial c_\upsilon}{\partial \upsilon}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_\upsilon$.

9. Δείξτε ότι $\left(\frac{\partial c_P}{\partial P}\right)_T = -T\upsilon\ \left(\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P\right)$. Υπολογίστε αυτήν την ποσότητα για σύστημα που ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση $P\left(\upsilon + \frac{b}{T^2}\right) = T$, όπου b θετική σταθερά.

10. Δείξτε η μεταβολή της ενθαλπίας Η για εκτόνωση ενός αερίου από αρχικό ειδικό όγκο υ σε τελικό ειδικό όγκο υ+δυ είναι

$$\delta H = \frac{P - (c_P - P\upsilon\alpha)}{c_P\kappa_T - T\upsilon\alpha^2}\ \delta\upsilon.$$

11. Κάντε αναγωγή της παραγώγου $\left(\frac{\partial \mu}{\partial \upsilon}\right)_S$.

3^o φυλλάδιο ασκήσεων

Πρότυπα θερμοδυναμικά συστήματα

1. Μονατομικό ιδανικό αέριο σε κατάσταση (N_o, V_o,T_o) οδηγείται σε κατάσταση διπλάσιου όγκου και ίδιας θερμοκρασίας. Αν είναι διαθέσιμη θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας $T_o/2$ βρείτε το μέγιστο έργο που μπορεί να παραχθεί. Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα αν αντί για θερμική δεξαμενή είναι διαθέσιμη θερμική πηγή με θερμοχωρητικότητα $C(T) = C_o + bT$, όπου C_o και b θετικές σταθερές.

2. Δύο σώματα έχουν την ίδια θερμοχωρητικότητα C και θερμοκρασίες T_1 και T_2. Βρείτε το μέγιστο παραγόμενο έργο για μια διαδικασία στην οποία καταλήγουν να έχουν την ίδια θερμοκρασία. Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία στην οποία μπορούν να ισορροπήσουν;

3. Σύστημα έχει σταθερή θερμοχωρητικότητα C και είναι αρχικά σε θερμοκρασία T_o. Αν είναι διαθέσιμη θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T_δ, πόσο είναι το μέγιστο παραγόμενο έργο όταν το σύστημα ψύχεται στη θερμοκρασία της δεξαμενής;

4. Έχουμε δύο θερμοδυναμικά συστήματα που περιγράφονται από τις καταστατικές εξισώσεις $u = bT, P = a\,\upsilon T$. Τα συστήματα έχουν τον ίδιο αριθμό μορίων και κοινό ειδικό όγκο υ_o, αλλά διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και T_2. Φέρονται σε κατάσταση κοινής θερμοκρασίας T_f και ειδικού όγκου υ_f. Υπολογίστε το μέγιστο παραγόμενο έργο και την τιμή της T_f.

5. Θέλουμε να διατηρήσουμε ένα σπίτι σε σταθερή θερμοκρασία 22^o C, ενώ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι 5^o C. Μία μέθοδος θέρμανσης είναι η αγορά έργου από τη ΔΕΗ και η κατανάλωσή του σε ηλεκτρική σόμπα, όπου γίνεται όλο θερμότητα. Μία άλλη μέθοδος είναι η αγορά έργου και η χρήση του για λειτουργία θερμικής αντλίας. Υποθέτοντας ιδανική θερμική αντλία, ποια μέθοδος είναι φθηνότερη και κατά πόσο;

6. Ψυγείο διατηρείται σε θερμοκρασία 4^o C. Κάθε φορά που ανοίγουμε την πόρτα του εισάγεται θερμότητα 50kcal χωρίς να μεταβάλλεται ιδιαίτερα η θερμοκρασία του. Αν η πόρτα του ψυγείου ανοίγει κατά μέσο όρο 15 φορές την ημέρα και το ψυγείο λειτουργεί με απόδοση 20% της ιδανικής, πόσο είναι το μηνιαίο κόστος χρήσης του; (τιμή ρεύματος = 0,1 €/kWh).

7. Υπολογίστε την απόδοση του κύκλου του Otto για ιδανικό αέριο.

8. Αέριο έχει καταστατικές εξισώσεις $U = PV$ και $T^3 = b\, U^2/(NV)$, όπου b θετική σταθερά. Το αέριο βρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία T_o και πίεση P_o και υπόκειται σε διαδικασία Joule-Thomson με τελική πίεση P_f. Υπολογίστε την τελική θερμοκρασία T_f.

9. Αέριο υπόκειται σε διαδικασία Joule-Thomson από αρχική θερμοκρασία T_o και πίεση P_o σε τελική πίεση P_f. Αν ο αρχικός όγκος είναι υ_o, βρείτε την τελική θερμοκρασία T_f με δεδομένα ότι: (i) για $T = T_o$, $\kappa_T = b/\upsilon^2$, (ii) για $T = T_o$, $\alpha = \alpha_o$, (iii) για $P = P_f$, $c_P = c_P^o$. Ποια τιμή του T_o αντιστοιχεί σε αναστροφή;

4^o φυλλάδιο ασκήσεων

Θερμοδυναμική μεταβάσεων φάσης

1. Υγρό βράζει σε θερμοκρασία 105^o C στην κορυφή ενός βουνού και σε θερμοκρασία 95^o C στη βάση του. Αν η λανθάνουσα θερμότητα του είναι 1kcal/mol, πόσο είναι το ύψος του βουνού;

2. Υγρό βρίσκεται σε δοχείο όγκου V_o, υπό πίεση P_o και θερμοκρασία T_o. Θερμαίνεται υπό σταθερό όγκο ώστε να διπλασιαστεί η πίεση του. Περιγράφοντας τους ατμούς ως ιδανικό αέριο, και θεωρώντας τον όγκο της υγρής φάσης πολύ μικρότερο από αυτόν της αέριας, βρείτε το αρχικό και το τελικό ποσοστό της ουσίας που είναι σε αέρια φάση.

3. Δείξτε ότι για μεταβολές κατά μήκος της καμπύλης συνύπαρξης, η ειδική θερμότητα ενός ατμού $c_{συν} = c_P - L/T$, όπου L η λανθάνουσα θερμότητα. Για επαρκώς μικρές θερμοκρασίες το $c_{συν}$ μπορεί να γίνει αρνητικό. Τι σημαίνει αυτό φυσικά;

4. Υπολογίστε το συντελεστή διαστολής $\alpha_{συν}$ κατά μήκος της καμπύλης συνύπαρξης.

5. Η ειδική ενέργεια Helmholtz ενός συστήματος στη στερεά φάση δίνεται από τη σχέση $f = A/(T\upsilon^3)$, ενώ στην υγρή από τη σχέση $f = B(T\upsilon^4)$, όπου A και B θετικές σταθερές. Υπολογίστε τις αντίστοιχες ειδικές ενέργειες Gibbs. Ποια είναι η σχέση των ειδικών όγκων των δύο φάσεων στο σημείο μετάβασης; Υπολογίστε την κλίση της καμπύλης συνύπαρξης.

6. Η ειδική ενέργεια Helmholtz για μια ουσία στη στερεά φάση δίνεται από τη σχέση $f = a/T$, ενώ στην αέρια φάση από τη σχέση $f = b/(T\upsilon)$, όπου a και b θετικές σταθερές. Γράψτε την ειδική ενέργεια Gibbs για τις δύο φάσεις και προσδιορίστε την καμπύλη συνύπαρξης για την εξάχνωση του στερεού. Προσδιορίστε την ειδική λανθάνουσα θερμότητα ως τη διαφορά στην ειδική ενέργεια Helmholtz f μεταξύ των δύο φάσεων πάνω στην καμπύλη συνύπαρξης.

7. Θεωρείστε μαγνητικό σύστημα στο οποίο η ειδική ενέργεια Gibbs είναι $g(\vec{m},T) = \frac{1}{2}\mu(T)\vec{m}^2 + \frac{\lambda}{6!}\vec{m}^6$. Δείξτε ότι η μετάβαση είναι συνεχής και υπολογίστε τους κρίσιμους εκθέτες με τη θεωρία Landau.

8. Φυσικό σύστημα χαρακτηρίζεται από βαθμωτή παράμετρο τάξης φ και ειδική ελεύθερη ενέργεια Gibbs $g(T,\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{a(T)}{3!}\varphi^3 + \frac{b(T)}{4!}\varphi^4$, όπου οι συναρτήσεις a(T) και b(T) είναι θετικά τιμώμενες. Βρείτε τις τιμές των a, b για τις οποίες υπάρχει μετάβαση φάσης και δείξτε ότι αυτή είναι πρώτης τάξης.

9. Αποδείξτε την ανισότητα του Griffiths: $\alpha + \beta(\delta + 1) \geq 2$.

5^o φυλλάδιο ασκήσεων

Αρχές της στατιστικής μηχανικής

1. Υπολογίστε την εντροπία Gibbs μονατομικού ιδανικού αερίου Ν σωματιδίων χρησιμοποιώντας τη μικροκανονική κατανομή. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα ότι ο όγκος μίας ν-διάστατης μπάλας ακτίνας R είναι ίσος με πν/2 Rν/(ν/2)! καθώς και τον τύπο του Stirling.

2. Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση για σύστημα Ν αρμονικών ταλαντωτών συχνότητας ω σε μία διάσταση.

3. Έστω σύστημα Ν διάκριτων βαθμών ελευθερίας s_i που παίρνουν τιμές 0 και 1. Η Χαμιλτόνια του συστήματος είναι $H = \sum_{i=1}^{N} s_i$. Υπολογίστε τη σχέση της εσωτερικής ενέργειας με τη θερμοκρασία (i) χρησιμοποιώντας τη μικροκανονική κατανομή και (ii) χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή.

4. Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση χρησιμοποιώντας τη μεγάλη κανονική κατανομή (i) αν οι βαθμοί ελευθερίας ικανοποιούν την κατανομή Fermi-Dirac και (ii) αν ικανοποιούν την κατανομή Bose-Einstein.

5. Εκτιμείστε από την κανονική κατανομή για ιδανικό κλασικό αέριο Ν μορίων σε όγκο V, τη διακύμανση δN_v του αριθμού των μορίων σε μία περιοχή όγκου v << V. Θεωρείστε ότι N_v>>1.

6. Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή σταθερής θερμοκρασίας T και πίεσης P. Υπολογίστε τη ροπή συσχετισμού $\langle \delta E \delta V \rangle$.

7. Δείξτε ότι οι διακυμάνσεις πυκνότητας Ν μορίων σε σταθερή θερμοκρασία T ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\delta\rho}{\rho} = \sqrt{\frac{T\kappa_T}{V}}$, όπου V ο μέσος όγκος που καταλαμβάνουν. Υπολογίστε το κλάσμα δρ/ρ για ιδανικό αέριο Ν.

8. Δείξτε ότι $\langle (\delta E)^3 \rangle = T^4 \left(\frac{\partial c_v}{\partial T}\right)_v + 2\, T^3 C_v$. Υπολογίστε αυτήν την έκφραση για ιδανικό αέριο Ν μονατομικών μορίων.

9. Συμβολίζουμε ως δ_c τις διακυμάνσεις ως προς την κανονική κατανομή και ως δ_g τις διακυμάνσεις ως προς τη μεγάλη κανονική κατανομή. Δείξτε ότι

$$\left(\delta_g E\right)^2 - (\delta_c E)^2 = \left(\delta_g N\right)^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_T\right]^2.$$

(Για τη μεγάλη κανονική κατανομή είναι βολικό να χρησιμοποιήσει κανείς την ποσότητα α = βμ ως θερμοδυναμική μεταβλητή, αντί για το χημικό δυναμικό μ.)

10. Κατατάξτε τα ακόλουθα σωμάτια ανάλογα με τη στατιστική που ακολουθούν: σωμάτιο α, άτομο ^3He, μόριο H_2, άτομο ^3H, ιόν $^6Li^+$, ιόν $^7Li^+$.

6^o φυλλάδιο ασκήσεων

Εφαρμογές των κατανομών.

1. Υλικό αποτελείται από N_A άτομα τύπου Α και N_B άτομα τύπου Β. Τα άτομα τύπου Α έχουν δυνατές τιμές ενέργειας 0 και ε, ενώ τα άτομα τύπου Β δυνατές τιμές ενέργειας 0 και 2 ε. Βρείτε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz του συστήματος και το $C_υ$.

2. Υπολογίστε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz και το $c_υ$ ενός συστήματος Ν κλασικών διατομικών μορίων. Η Χαμιλτόνια για κάθε μόριο είναι $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_1^{\ 2} + \vec{p}_2^{\ 2}\right) + \frac{m}{2}\omega^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$, όπου m η μάζα του κάθε ατόμου και ω η συχνότητα ταλάντωσης.

3. Άλας αποτελείται από Ν ιόντα με μαγνητική ροπή $\pm\mu_B$ και βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου B_o σε επαφή με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T_o. Αν η ένταση του πεδίου διπλασιαστεί ισόθερμα, πόση θερμότητα λαμβάνει το σύστημα από τη δεξαμενή; Αν η ένταση του πεδίου υποδιπλασιαστεί αδιαβατικά, ποια είναι η τελική θερμοκρασία;

4. Υλικό αποτελείται από Ν μη-αλληλεπιδρώντες στερεούς στροφείς, όπου ο καθένας έχει ιδιοτιμές ενέργειας $E_{l,m} = l(l+1)\varepsilon$, όπου ε θετική σταθερά. Υπολογίστε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος και το $C_υ$. Στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών θεωρείστε ότι μόνο η βασική και η πρώτη διεγερμένη στάθμη συνεισφέρουν, ενώ για υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιείστε την εξίσωση Euler-MacLaurin

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \int_0^{\infty} dx f(x) + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0) + \cdots.$$

5. Θεωρείστε αέριο Ν ατόμων υδρογόνου. Υπολογίστε τη συνεισφορά στο $C_υ$ από τις εσωτερικές του καταστάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε ενέργειες $E_n = -\varepsilon_o/n^2$, με εκφυλισμό $2n^2$ και n = 1, 2 …., όπως στην άσκηση 4.

6. Υπολογίστε το $C_υ$ για ένα σύστημα Ν ανεξαρτήτων κλασικών αναρμονικών ταλαντωτών σε μία διάσταση με Χαμιλτόνια $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^4$, σε πρώτη τάξη ως προς λ.

7. Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση για κβαντικούς αναρμονικούς ταλαντωτές με ιδιοτιμές ενέργειας

$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \kappa\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, όπου κ θετική σταθερά.

8. Υπολογίστε το $C_υ$ για ένα αέριο Ν υπερσχετικιστικών ελεύθερων σωματιδίων σε 3 διαστάσεις με Χαμιλτόνια για το καθένα H=$|\vec{p}|$.

9. Ένα ιδανικό αέριο Ν κλασικών μονατομικών μορίων είναι εγκλωβισμένο σε μία δισδιάστατη επιφάνεια εμβαδού Α. Υπολογίστε την εσωτερική ενέργεια U(T,A), αν η επιφάνεια είναι (ι) σφαίρα και (ιι) τόρος.

10. Πολυμερές μακρομόριο αποτελείται από αλυσίδα Ν μονομερών. Τα μονομερή μπορούν να βρεθούν στην κατάσταση α, οπότε έχουν μήκος a και ενέργεια ε_α, ή στην κατάσταση β, οπότε έχουν μήκος b και ενέργεια ε_β. Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα των ενεργειών των μονομερών συν έναν όρο LX, όπου L είναι το συνολικό μήκος του μακρομορίου και X η τάση στα άκρα του. Βρείτε τη σχέση μεταξύ του μέσου μήκους του μορίου <L> και της τάσης X. Αναπτύσσοντας κατά Taylor, γράψτε μία σχέση της μορφής $\langle L\rangle = L_o + kX$ και προσδιορίστε τις σταθερές L_o και k.

11. Κλασικό ιδανικό αέριο βρίσκεται σε δοχείο στο οποίο υπάρχουν N_o σημεία απορρόφησης, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να απορροφήσει ένα μόριο του αερίου. Η ενέργεια ενός απορροφημένου μορίου είναι ίση

με –ε, όπου ε>0. Εκφράστε την ποσότητα z = exp(βμ) του αερίου ως συνάρτηση της πίεσης και της θερμοκρασίας. Υπολογίστε το μέσο αριθμό <N> των απορροφημένων μορίων.

12. Πόσους ταλαντωτικούς βαθμούς ελευθερίας έχει ένα μόριο CH_4 και πόσους ένα μόριο CH_3CH_2OH;

13. Κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο βρίσκεται εντός του βαρυτικού πεδίου της Γης (σταθερή επιτάχυνση βαρύτητας g) και περιέχει N μόρια ιδανικού μονατομικού αερίου, μάζας m. Βρείτε τη μέση πυκνότητα του αερίου ως συνάρτηση της κατακόρυφης θέσης z> 0. Βρείτε τη συνολική ενέργεια, την εντροπία και το C_υ του συστήματος.

7^o φυλλάδιο ασκήσεων

Ιδανικά αέρια.

1. Εκτιμείστε την τάξη μεγέθους της ενέργειας Fermi για (ι) ηλεκτρόνια σε μέταλο, (ιι) νουκλεόνια σε βαρύ πυρήνα, (ιιι) άτομα του ^{3}He (υ ≈ 50A^3/άτομο).

2. Εκτιμείστε την ειδική θερμότητα ηλεκτρονίων για το Li και το Na. Θεωρείστε ότι όλα τα ηλεκτρόνια σθένους είναι ελεύθερα και χρησιμοποιείστε τις τιμές 0,5g/cm^3 και 1g/cm^3 για τις αντίστοιχες πυκνότητες.

3. Υπολογίστε την ενέργεια Fermi για σχετικιστικό αέριο με Χαμιλτόνια $H = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$ για T = 0. Υπολογίστε αναλυτικά τη μορφή της για m =0. Στη συνέχεια βρείτε την εξάρτηση του $C_υ$ από τη θερμοκρασία στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών $T \ll mc^2$.

4. Η πυκνότητα καταστάσεων ιδανικού αέριου Fermi είναι g(E)= D, όπου D θετική σταθερά και E>0. Υπολογίστε την ενέργεια Fermi για T = 0 και το $C_υ$ για χαμηλή θερμοκρασία.

5. Ηλεκτρόνιο σε μαγνητικό πεδίο B έχει ενέργεια $\pm\mu_B B$, ανάλογα με το αν η μαγνητική του ροπή είναι παράλληλη ή αντιπαράλληλη στο πεδίο. Υπολογίστε τη μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού για N ηλεκτρόνια παρουσία μαγνητικού πεδίου όταν T = 0, και γράψτε τη μαγνήτιση M ως συνάρτηση του B. Υπολογίστε τη μαγνητική επιδεκτικότητα στο όριο ασθενούς πεδίου.

6. Θεωρείστε d-διάστατο πλέγμα Debye, στο οποίο τα φωνόνια χαρακτηρίζονται από σχέση διασκεδασμού $\omega(k) = c\,k^\nu$, όπου c θετική σταθερά και ν > 1. Βρείτε την εξάρτηση του $C_υ$ από τη θερμοκρασία στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών.

7. Υπολογίστε τη μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού για ιδανικό αέριο Bose σε δύο διαστάσεις. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συμπύκνωση Bose-Einstein.

8. Η πυκνότητα καταστάσεων ενός ιδανικού αέριου Bose είναι $g(E)=\alpha E^2$, όπου α θετική σταθερά και E > 0 . Υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία για συμπύκνωση Bose-Einstein.

9. Θεωρείστε ένα αέριο Bose του οποίου τα μόρια έχουν επιπλέον δύο εσωτερικές καταστάσεις 0 και 1, με ενέργεια 0 και Δ αντίστοιχα. Θεωρώντας ότι Δ>>T, υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία για συμπύκνωση Bose-Einstein.

8^o φυλλάδιο ασκήσεων

Αλληλεπιδρώντα συστήματα

1. Γράψτε την καταστατική εξίσωση μη-ιδανικού αερίου στη δεύτερη τάξη virial για το ενδομοριακό δυναμικό του Sutherland

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ -U_0\left(\frac{r}{a}\right)^6, & r > a \end{cases}$$

όπου a είναι η ακτίνα ενός μορίου και θεωρούμε ότι $U_0 << T$.

2. Υπολογίστε τους συντελεστές virial b_2 και b_3 για αέριο σκληρών σφαιρών ακτίνας α ($V(r)=0$ για $r > a$, $V(r)=\infty$ για $r<a$). Γράψτε την καταστατική εξίσωση συμπεριλαμβάνοντας όρους ως και τον τρίτο συντελεστή virial.

3. Γράψτε το συντελεστή Joule-Thomson $(\partial T/\partial P)_H$ συναρτήσει του δεύτερου συντελεστή virial $a_2(T)$. Υπολογίστε εκπεφρασμένα το συντελεστή Joule-Thomson για δυναμικό της μορφής

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ -\varepsilon, & a < r < b \\ 0, & r > \end{cases}$$

3. Θεωρείστε το μοντέλο του Ising τροποποιημένο έτσι ώστε οι μεταβλητές s_i να παίρνουν (2j+1) διαφορετικές τιμές: -j, -j+1, …, 0, …, j-1, j, όπου το j είναι είτε ακέραιος είτε ημιακέραιος. Υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία στη θεωρία μέσου πεδίου.

4. Θεωρείστε το μοντέλο του Ising τροποποιημένο έτσι ώστε οι μεταβλητές s_i να παίρνουν συνεχείς τιμές στο διάστημα [-1, 1]. Υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία στη θεωρία μέσου πεδίου.

5. Στο μοντέλο του Heisenberg για το σιδηρομαγνητισμό με κλασικά σπιν, η Χαμιλτόνια είναι της μορφής

$$H = -\mu\vec{B}\cdot\sum_i \vec{S}_i - \sum_{i,j\ \gamma\varepsilon\acute{\iota}\tau o\nu\varepsilon\varsigma} \vec{S}_i\cdot\vec{S}_j,$$

όπου τα $\vec{S}_i$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Βρείτε την κρίσιμη θερμοκρασία για αυτό το σύστημα χρησιμοποιώντας τη θεωρία μέσου πεδίου.

6. Θεωρείστε το μοντέλο του Ising με δυνάμεις μεγάλης εμβέλειας, όπου ο πίνακας αλληλεπίδρασης J_{ij} είναι σταθερός για όλα τα i και j και ίσος με -λ/N, όπου N σταθερά. Απουσία μαγνητικού πεδίου η Χαμιλτόνια γράφεται $H = -\frac{\lambda}{2N}\Sigma^2$, όπου $\Sigma = \sum_i s_i$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $e^{a^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2+2ax}$, δείξτε ότι η συνάρτηση επιμερισμού γράφεται ως

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\left[2cosh\left(\sqrt{\frac{2\beta\lambda}{N}}x\right)\right]^N.$$

Κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών, φέρτε το παραπάνω ολοκλήρωμα στη μορφή $\sim\int dy e^{-Nf(y)}$, και υπολογίστε το στο όριο μεγάλου N, όπου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο σελλοειδούς σημείου: αναπτύσσετε το f(y) γύρω από το ελάχιστο του και κρατάτε μόνο τετραγωνικούς όρους. Δείξτε ότι υπάρχει πάντα αυθόρμητη μαγνήτιση (ανεξάρτητα διάστασης ή είδους πλέγματος) και υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία.