

# Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

## 2 Σεπτεμβρίου 2015

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

1. Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος; Απαντήστε δίνοντας και μία όσο το δυνατόν συνοπτικότερη τεκμηρίωση. (10 × 0,3)

(α') Η συνάρτηση  $\psi(x) = \frac{1}{\cosh x}$  είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

(β')  $\delta(\sinh x) = \delta(x)$ .

(γ') Για κάθε τελεστή  $\hat{A}$ , ισχύει ότι  $\hat{A}^\dagger \hat{A} \geq 0$ .

(δ')  $Tr([\hat{A}, \hat{B}]) = (Tr \hat{A})(Tr \hat{B})$ .

(ε') Μια ορθοκανονική βάση σε ένα σύστημα 7 κιούμπιτ αποτελείται από 49 διανύσματα.

(στ') Κάθε σωματίο μάζας  $m$ , σπιν  $s$  και φορτίου  $q$  έχει γυρομαγνητικό λόγο ίσο με  $sq/m$ .

(ζ') Υπάρχουν 50 τρόποι με τους οποίους μπορούν να κατανεμηθούν 100 φερμιόνια σε 99 καταστάσεις.

(η') Σε σύστημα δύο ηλεκτρονίων με συνολικό σπιν  $s = 1$ , η χωρική κυματοσυνάρτηση είναι αντισυμμετρική.

(θ') Σε ένα ουδέτερο άτομο, το ενεργό δυναμικό της προσέγγισης μέσου πεδίου έχει ιδιοτιμές της ενέργειας  $E_{n,\ell}$  που ικανοποιούν  $E_{4,3} > E_{5,1}$ .

(ι') Η απόλυτη τιμή της ενέργειας ανά ηλεκτρόνιο στα άτομα ελαττώνεται με τον ατομικό αριθμό  $Z$ .

2. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. (6 × 0,5)

(α') Γράψτε το διάνυσμα Μπλοχ που αντιστοιχεί στην κατάσταση  $\hat{\rho} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

(β') Τρία σωματία έχουν κβαντικούς αριθμούς στροφορμής  $j_1 = \frac{1}{2}$ ,  $j_2 = 1$  και  $j_3 = \frac{3}{2}$ . Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής του συστήματος;

(γ') Σε κιούμπιτ με αρχική κατάσταση  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$  γίνονται διαδοχικές μετρήσεις πρώτα του  $\hat{\sigma}_1$  και μετά του  $\hat{\sigma}_3$ . Ποια η πιθανότητα να δώσουν και οι δύο τιμή +1;

(δ') Γράψτε το μοναδιαίο τελεστή που αντιστοιχεί στην περιστροφή κατά  $\frac{\pi}{2}$  γύρω από τον άξονα 3, για  $j = 1$ .

(ε') Υπολογίστε την ποσότητα  $\langle \psi | \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_3 | \psi \rangle$ , για  $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0, 1\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|1, 0\rangle$  σε σύστημα δύο κιούμπιτ.

(στ') Βρείτε το βαθμό εκφυλισμού της 5ης ενεργειακής καταστάσης συστήματος 3 μποζονικών αρμονικών ταλαντωτών συχνότητας  $\omega$ .

3. Ουδέτερο σωματίο με σπιν  $s$  και γυρομαγνητικό λόγο  $\gamma$  βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  κάνοντας μετάπτωση Λάρμωρ. Η Χαμιλτονιανή του είναι  $\hat{H} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ , όπου  $\hat{\mathbf{s}}$  το διάνυσμα του σπιν. Γράψτε τις εξισώσεις εξέλιξης Χάιζενμπεργκ για τις συνιστώσες  $\hat{s}_i$ . Λύστε τις εξισώσεις εξέλιξης για να υπολογίσετε τη χρονική εξέλιξη των τελεστών  $\hat{s}_i$ .

4. Οι ιδιοτιμές της ενέργειας ενός σωματιδίου μάζας  $m$  και σπιν  $s = \frac{1}{2}$  με περιοδικές συνοριακές συνθήκες  $L$  σε δύο διαστάσεις είναι

$$E_{n_1, n_2} = \frac{2\pi^2}{mL^2}(n_1^2 + n_2^2).$$

όπου  $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(α') Δείξτε ότι η πυκνότητα καταστάσεων στο όριο υψηλών ενεργειών είναι  $g(\epsilon) = mL^2/\pi$ . (0,4)

(β') Δείξτε ότι η ενέργεια Φέρμι για σύστημα  $N$  τέτοιων σωματιδίων ισούται με  $\epsilon_F = \frac{\pi N}{mL^2}$ . (0,3)

(γ') Υπολογίστε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης για το σύστημα των  $N$  σωματιδίων. (0,3)

5. Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση με κβαντικούς αριθμούς στροφορμής  $l = 4$ ,  $m_l = -4$ ,  $m_s = \frac{1}{2}$ . Ποια είναι η πιθανότητα η μέτρηση της ολικής στροφορμής του να αντιστοιχεί σε  $j = \frac{7}{2}$ ; (1)

6. Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή ενός αναρμονικού ταλαντωτή  $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \lambda\hat{x}^4$ . Χρησιμοποιήστε μία Γκαουσιανή δοκιμαστική συνάρτηση  $\psi_b(x) = (\pi b^2)^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ , και εκτιμήστε βάσει της θεωρίας των μεταβολών την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης ως  $E_0 = \frac{3}{8} \left(\frac{3\lambda}{2m^2}\right)^{1/3}$ . (1)