

Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

Σεπτέμβριος 2019

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Όνοματεπώνυμο:

Εξάμηνο:

Αριθμός μητρώου:

Μέρος Α

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Κάθε ορθή απάντηση είναι +0,4 μονάδες, μέχρι δύο λάθος απαντήσεις δεν αφαιρείται βαθμός, για κάθε λανθασμένη πάνω από δύο αφαιρούνται 0,15 μονάδες, δεν προσθαφαιρείται βαθμός για μη απάντηση.

1. Ποια από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} ;

(α') $\psi(x) = e^{-x} \cos x$

(β') $\psi(x) = x^{-2}$

(γ') $\psi(x) = \frac{1}{\cosh x}$

(δ') $\psi(x) = \frac{x}{e^x+1}$

(ε') $\psi(x) = \frac{1}{\ln|x|}$

2. Δίνεται η μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$. Το αντίστοιχο διάνυσμα Μπλοχ είναι

(α') $\frac{1}{7}(4, 0, 1)$.

(β') $\frac{1}{7}(-4, 0, 1)$.

(γ') $\frac{1}{7}(0, 4, 1)$.

(δ') $\frac{1}{7}(0, -4, 1)$.

(ε') $\frac{1}{7}(0, 4, -1)$.

3. Σύστημα δύο κιούμπι προετοιμάζεται σε κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{5}(3|0, 0\rangle + 4|1, 1\rangle)$. Αν και στα δύο κιούμπι μετράμε το $\hat{\sigma}_2$, η πιθανότητα να δώσουν και οι δυο μετρήσεις +1 είναι

(α') $\frac{1}{100}$

(β') $\frac{18}{100}$

(γ') $\frac{25}{100}$

(δ') $\frac{49}{100}$

(ε') $\frac{63}{100}$

4. Κιούμπι προετοιμάζεται σε κατάσταση $|0\rangle$. Αρχικά του γίνεται μέτρηση του τελεστή $\hat{A} = \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$, για $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ και μετά μέτρηση του $\hat{\sigma}_2$. Ποια η πιθανότητα και οι δύο μετρήσεις να δώσουν τιμή 1;

(α') $\frac{1}{18}$

(β') $\frac{2}{18}$

(γ') $\frac{5}{18}$

(δ') $\frac{10}{18}$

(ε') $\frac{12}{18}$

5. Σωματίο στην ευθεία περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = \sqrt{\lambda}e^{-\lambda|x|}$, όπου $\lambda > 0$. Η αβεβαιότητα $(\Delta x)(\Delta p)$ είναι

(α') $\frac{1}{4}$

(β') $\frac{1}{2}$

(γ') $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$(\delta') \sqrt{3}$$

$$(\epsilon') \infty$$

6. Για σύνθεση στροφορμών, $\underline{2} \otimes \underline{3} \otimes \underline{5} =$

$$(\alpha') \underline{2} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}.$$

$$(\beta') \underline{2} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6}.$$

$$(\gamma') \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{8}.$$

$$(\delta') \underline{2} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6}.$$

$$(\epsilon') \underline{2} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6} \oplus \underline{8}.$$

7. Δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν μέσω των στροφορμών τους \hat{J}_1 και \hat{J}_2 σύμφωνα με μία Χαμιλτονιανή $\hat{H} = g\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2$, όπου g θετική σταθερά. Αν οι κβαντικοί αριθμοί της στροφορμής τους είναι $j_1 = 1, j_2 = \frac{3}{2}$, τότε οι ιδιοτιμές της \hat{H} είναι

$$(\alpha') -\frac{5}{2}g, -\frac{3}{2}g, -\frac{1}{2}g$$

$$(\beta') -\frac{5}{2}g, -g, \frac{3}{2}g$$

$$(\gamma') -g, 0, \frac{5}{2}g$$

$$(\delta') -g, g, \frac{3}{2}g$$

$$(\epsilon') 0, g, \frac{3}{2}g$$

8. Σωματίο σε σφαιρικά συμμετρικά δυναμικό βρίσκεται στην κατάσταση $5d$. Η ακτινική κυματοσυνάρτηση του χαρακτηρίζεται από

$$(\alpha') 1 \text{ ακρότατο}$$

$$(\beta') 2 \text{ ακρότατα}$$

$$(\gamma') 3 \text{ ακρότατα}$$

$$(\delta') 4 \text{ ακρότατα}$$

$$(\epsilon') 5 \text{ ακρότατα}$$

9. Σωματίο μάζας m στις 3 διαστάσεις βρίσκεται εντός δυναμικού $V(r) = -\frac{\lambda}{\sqrt{r}}$, όπου $\lambda > 0$. Η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης

$$(\alpha') \text{ αυξάνει με το } m, \text{ αυξάνει με το } \lambda.$$

$$(\beta') \text{ αυξάνει με το } m, \text{ ελαττώνεται με το } \lambda.$$

$$(\gamma') \text{ ελαττώνεται με το } m, \text{ αυξάνει με το } \lambda.$$

$$(\delta') \text{ ελαττώνεται με το } m, \text{ ελαττώνεται με το } \lambda.$$

$$(\epsilon') \text{ δεν εξαρτάται από το } m, \text{ ελαττώνεται με το } \lambda.$$

10. Έστω \hat{T} ο τελεστής αντιστροφής χρόνου, \hat{P} ο τελεστής αντιστροφής χώρου και $|\ell, m_\ell\rangle$ ιδιοδιανύσματα της τροχιακής στροφορμής. Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{P}\hat{T}$;

$$(\alpha') \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 2\rangle - i|1, 1\rangle)$$

$$(\beta') \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + i|2, 1\rangle)$$

$$(\gamma') \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - i|1, -1\rangle)$$

$$(\delta') -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |2, 0\rangle)$$

$$(\epsilon') \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0\rangle + i|4, 0\rangle)$$

11. Σωματίο κινείται σε δύο διαστάσεις και έχει ιδιοτιμές της ενέργειας $\epsilon_n = a(n_1 + n_2)^{\frac{1}{2}}$ (σε αδιάστατες μονάδες), όπου $a > 0$ και $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$. Η πυκνότητα ενέργειας $g(\epsilon)$ στο όριο του συνεχούς είναι ανάλογη του

$$(\alpha') \epsilon$$

$$(\beta') \epsilon^2$$

$$(\gamma') \epsilon^3$$

$$(\delta') \epsilon^4$$

$$(\epsilon') \epsilon^5$$

12. Σωματίο μάζας m κινείται στην ημιευθεία \mathbf{R}^+ κάτω από δυναμικό $V(x) = ax$. Από τις παρακάτω οικογένειες συναρτήσεων, ποια είναι αποδεκτή ως δοκιμαστική στη θεωρία μεταβολών για τη θεμελιώδη κατάσταση;

- (α') Ce^{-bx^2}
 (β') $Cxe^{-b/x}$
 (γ') $C'e^{-bx}$
 (δ') $C \sin xe^{-bx^2}$
 (ε') $C \frac{x^2}{\sinh bx}$

C, b είναι θετικές σταθερές.

Μέρος Β'

1. Σωματίο στην ημιευθεία κινείται εντός δυναμικού $V(x) = ax^2 + \frac{b}{x+1}$. Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα ως εξής. Σε κάθε κουτί αν ο τελεστής Σρέντινγκερ έχει αντίστοιχο φάσμα γράψτε το βαθμό εκφυλισμού του, αν δεν έχει γράψτε 0.

Παράμετροι	Συνεχές φάσμα	Διακριτό φάσμα
$a > 0, b > 0$		
$a > 0, b < 0$		
$a = 0, b > 0$		
$a = 0, b < 0$		

(0,6)

2. Ένα σωματίο σε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό έχει ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής $E_{n,\ell}$. Αποδείξτε ότι $E_{n+1,\ell+1} > E_{n,\ell}$.

(0,6)

3. Από τις παρακάτω προτάσεις σημειώστε τις 5 που αληθεύουν. (Αν σημειώσετε πάνω από 5, δεν παίρνετε βαθμό.)

- (α') Μια μήτρα πυκνότητας είναι ένας θετικός τελεστής.
 (β') Ένας προβολικός τελεστής έχει ιδιοτιμές -1 και 1 .
 (γ') Το άθροισμα δύο προβολικών τελεστών είναι πάντα προβολικός τελεστής.
 (δ') Το γινόμενο δύο αντιμοναδιαίων τελεστών είναι αντιμοναδιαίος τελεστής.
 (ε') Η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου είναι ανάλογη της ολικής του στροφορμής.
 (στ') Η Χαμιλτονιανή σωματιδίου σε δυναμικό Μορς έχει πεπερασμένο αριθμό ιδιοδιανυσμάτων.
 (ζ') Η ενέργεια ιονισμού του πρώτου ηλεκτρονίου μεταβάλλεται περιοδικά με τον ατομικό αριθμό Z .
 (η') Ο βαθμός εκφυλισμού των επίπεδων Λαντάου είναι ανάλογος της έντασης του εξωτερικού πεδίου στο τετράγωνο.
 (θ') Δεν μπορούμε να έχουμε επαλληλία καταστάσεων ημιακέραιας και ακέραιας στροφορμής j .
 (ι') Η ενέργεια που υπολογίζουμε στη θεωρία των μεταβολών είναι πάντα μικρότερη από την πραγματική ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης.
 (ια') Το ηλεκτρόνιο έχει $s = \frac{1}{2}$ μόνο στο σύστημα αναφοράς που είναι ακίνητο.

(ιβ') Το ισότοπο ${}^4_2\text{He}$ είναι φερμιόνιο.

(ιγ') Ένα ουδέτερο σωματίο μπορεί να έχει μη μηδενικό γυρομαγνητικό λόγο.

Αληθείς προτάσεις είναι οι:

(0,8)

4. Έχουμε 4 μη αλληλεπιδρώντα σωματίια και 6 διαθέσιμες καταστάσεις για κάθε σωματίο. Συμπληρώστε στον πίνακα τον αριθμό των καταστάσεων του συνολικού συστήματος, ανάλογα με τον τύπο του σωματιδίου.

Διακρίσιμα	Μποζόνια	Φερμιόνια

(0,4)

Μέρος Γ'

1. Έστω δυναμικό σε μία διάσταση που παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $[a, b]$. Ο τελεστής Σρέντινγκερ στην ευθεία έχει δύο γενικευμένα ιδιοδιανύσματα για κάθε τιμή της ενέργειας, τα οποία επιλέγονται ως εξής.

$$f_{k+}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{ikx} + R_k e^{-ikx}), & x < a \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}T_k e^{ikx} & x > b \end{cases}$$

$$f_{k-}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{T}_k e^{-ikx}, & x < a \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{ikx} + \bar{R}_k e^{ikx}) & x > b \end{cases}$$

Δείξτε ότι $|\bar{T}_k|^2 + |\bar{R}_k|^2 = 1$. (0,8)

(Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι η Ρονσκιανή $\psi_1\psi'_2 - \psi_2\psi'_1$ δύο εκφυλισμένων ιδιοσυναρτήσεων ψ_1, ψ_2 του τελεστή Σρέντινγκερ είναι σταθερή.)

2. Έχουμε μία πηγή σωματιδίων με σπιν 1. Σ' αυτά τα συστήματα γίνονται μετρήσεις των συνιστωσών του σπιν

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Υστερα από μια σειρά μετρήσεων βρίσκουμε ότι $\langle \hat{J}_1 \rangle = \langle \hat{J}_2 \rangle = 0$, ενώ $\langle \hat{J}_3 \rangle = 1$.

(α) Βρείτε όλες τις καταστάσεις που είναι συμβατές με την παραπάνω πληροφορία. (0,5)

(β) Ποιες από τις παραπάνω καταστάσεις είναι καθαρές; (0,5)

3. Έστω σωματίο εντός μονοδιάστατου κουτιού μήκους L κάτω από ένα ασθενές δυναμικό $V(x) = V_0 \cos(\pi x/L)$.

(α) Δείξτε ότι $\hat{V}|n\rangle = \frac{1}{2}(|n-1\rangle + |n+1\rangle)$, όπου $|n\rangle$ οι ιδιοκαταστάσεις του αδιατάρακτου συστήματος. (0,2)

(β) Δείξτε ότι οι διορθώσεις πρώτης τάξης στην ενέργεια μηδενίζονται. (0,2)

(γ) Υπολογίστε τη διόρθωση πρώτης τάξης στην ιδιοσυνάρτηση της θεμελιώδους. (0,2)

(δ) Βρείτε τη διόρθωση δεύτερης τάξης στην ενέργεια για τη θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη κατάσταση του συστήματος (0,4).