

# Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

## Ιούλιος 2020

Διάρκεια εξέτασης: 1,5 ώρα

Όνοματεπώνυμο:

Εξάμηνο:

Αριθμός μητρώου:

Τμήμα και αριθμός θέσης:

### Μέρος Α

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Κάθε ορθή απάντηση είναι +0,5 μονάδες, μέχρι μία λάθος απάντηση δεν αφαιρείται βαθμός, για κάθε λανθασμένη μετά την πρώτη αφαιρούνται 0,15 μονάδες. Δεν προσθαφαιρείται βαθμός για μη απάντηση.

1. Ποια από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο  $\mathbb{R}$ ;

(α)  $\psi(x) = \ln(1 + |x|)$     (β)  $\psi(x) = \frac{x}{e^{x+1}}$     (γ)  $\psi(x) = e^{-2x} \tanh x$     (δ)  $\psi(x) = x^{-3}$   
(ε)  $\psi(x) = \frac{1}{|x|+1}$  ✓

2. Κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση  $|0\rangle$ . Αρχικά του γίνεται μέτρηση του τελεστή  $\hat{A} = \hat{\sigma}_3$  και μετά μέτρηση του  $\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$ , για  $\mathbf{n} = \frac{1}{5}(3, 0, -4)$ . Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή στη δεύτερη, με δεδομένο ότι στην πρώτη μετρήθηκε -1;

(α) 0    (β)  $\frac{2}{5}$     (γ)  $-\frac{2}{5}$     (δ)  $\frac{4}{5}$  ✓    (ε)  $-\frac{4}{5}$

**Παρατήρηση:** Η αρχική κατάσταση είναι ιδιοδιάνυσμα του  $\hat{A} = \hat{\sigma}_3$  με ιδιοτιμή -1, άρα η πρώτη μέτρηση είναι σα να μην έγινε. Άρα η αναμενόμενη τιμή είναι απλά  $\langle 0 | \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} | 0 \rangle$ .

3.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x^3 - 1) f(x) =$

(α) 0    (β)  $\frac{1}{3} f(1)$     (γ)  $-\frac{1}{3} f(1)$     (δ)  $\frac{1}{3} f'(1)$     (ε)  $-\frac{1}{3} f'(1)$  ✓

4. Σωματίο κινείται στην ευθεία κάτω από δυναμικό  $V(x) = ae^x$ , όπου  $a > 0$ . Το φάσμα του είναι

- (α) μόνο γραμμικό με εκφυλισμό 1  
(β) γραμμικό με εκφυλισμό 1, συνεχές με εκφυλισμό 1  
(γ) γραμμικό με εκφυλισμό 1, συνεχές με εκφυλισμό 2  
(δ) μόνο συνεχές με εκφυλισμό 1 ✓  
(ε) μόνο συνεχές με εκφυλισμό 2

**Παρατήρηση:** Θυμηθείτε ότι ο βαθμός εκφυλισμού στο συνεχές εξαρτάται από τον αν μπορεί να έρχονται σωματία και από δεξιά και από αριστερά. Εδώ μπορεί να έρχονται μόνο από αριστερά, άρα ο εκφυλισμός είναι 1. Αν  $a < 0$ , η απάντηση εξαρτάται από το αν  $E > 0$ , (οπότε  $g=2$ ) ή αν  $E < 0$ , οπότε  $g = 1$ . Βέβαια σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε δυναμικό μη φραγμένο απο κάτω.

5. Σύστημα δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται στην κατάσταση  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle$ . Αν  $\hat{A} = \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{I}$ , τότε  $\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle =$

(α) 0 (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 ✓

6. Ο τελεστής  $\hat{A}$  έχει στοιχεία πίνακα στη βάση της θέσης  $\langle x|\hat{A}|x'\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-a(x-x')^2}$ , όπου  $a > 0$ .  $Tr\hat{A} =$

(α) 0 (β) 1 (γ)  $\pi$  (δ)  $a$  (ε)  $\infty$  ✓

**Παρατήρηση:**  $Tr\hat{A} = \int dx \langle x|\hat{A}|x\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$ .

7. Οι ιδιοτιμές της ενέργειας ενός ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή είναι ίση με  $E_{n,\ell} = \omega[2(n-1) - \ell]$ , όπου  $n, \ell$  οι συνήθεις κβαντικοί αριθμοί για σφαιρικά συμμετρικά δυναμικά. Έστω ότι έχουμε 10 ηλεκτρόνια σε ένα τέτοιο δυναμικό. Πόση είναι η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης;

(α)  $8\omega$  (β)  $9\omega$  (γ)  $10\omega$  ✓ (δ)  $11\omega$  (ε)  $12\omega$

**Παρατήρηση:** Βρίσκουμε τα χαμηλότερα ενεργειακά επίπεδα για το  $E_{n,\ell}$  και αρχίζουμε να τα συμπληρώνουμε. Είναι ως εξής.

(α')  $E_{n,\ell} = 0$ , για  $n = 1, \ell = 0$ . Εκφυλισμός: 2

(β')  $E_{n,\ell} = \omega$ , για  $n = 2, \ell = 1$ . Εκφυλισμός: 6

(γ')  $E_{n,\ell} = 2\omega$ , για  $n = 2, \ell = 0$  και  $n = 3, \ell = 2$ . Εκφυλισμός:  $2 + 10 = 12$ .

8. Σωματίο σε σφαιρικά συμμετρικά δυναμικό βρίσκεται σε κατάσταση 6p. Η ακτινική κυματοσυνάρτηση έχει τον ακόλουθο αριθμό κόμβων.

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 ✓ (ε) 5

9. Ηλεκτρόνιο είναι σε κατάσταση με  $\ell = 6, m_\ell = 6$  και  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Η πιθανότητα να βρεθεί  $j = \frac{15}{2}$  στη μέτρηση της ολικής στροφορμής είναι

(α) 0 ✓ (β)  $\frac{1}{13}$  (γ)  $\frac{2}{13}$  (δ)  $\frac{12}{13}$  (ε) 1

## Μέρος Β

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις. Δώστε μόνο τελική απάντηση, δεν απαιτείται τεκμηρίωση. (0, 7+0, 6+0, 6+0, 6+0, 8)

1. Σύστημα δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται στην κατάσταση  $|\psi\rangle = \frac{1}{5}(3|0,0\rangle + 4|1,1\rangle)$ . Γράψτε την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας για το πρώτο κιούμπιτ.

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Σωματίο σε μία διάσταση κινείται κάτω από δυναμικό  $V(x) = -ax^2$ , όπου  $a > 0$ . Για τις παρακάτω περιπτώσεις, γράψτε αν έχει γραμμικό, ή συνεχές φάσμα ή και τα δύο καθώς και το βαθμό εκφυλισμού.

(α') στην ευθεία  $\mathbf{R}$ . Συνεχές, εκφυλισμός 2

(β') στην ημιευθεία  $\mathbf{R}^+$  Συνεχές, εκφυλισμός 1

(γ') στο διάστημα  $[0, L]$  με συνθήκες Ντιρισλέ. Διακριτό, εκφυλισμός 1

(δ') στο διάστημα  $[0, L]$  με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Διακριτό, εκφυλισμός 2

3. Για σύνθεση στροφορμών  $\underline{2} \otimes \underline{3} \otimes \underline{4} = \underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{5} \oplus \underline{7}$

4. Έχουμε 6 μη αλληλεπιδρώντα σωματία και 8 διαθέσιμες καταστάσεις για κάθε σωματίο. Συμπληρώστε στον πίνακα τον αριθμό των καταστάσεων του συνολικού συστήματος, ανάλογα με τον τύπο του σωματιδίου.

Διακρίσιμα	Μποζόνια	Φερμιόνια
$8^6$	1716	28

5. Ο όρος διαταραχής λόγω μαγνητικού πεδίου  $B$  στην κατεύθυνση 3 για το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου είναι  $\hat{V} = \frac{eB}{2m}(\hat{L}_3 + 2\hat{S}_3)$ . Γράψτε τα ενεργειακά επίπεδα στο οποία σπάει ο ιδιοχώρος με  $n = 3$ , καθώς και το βαθμό εκφυλισμού του καθενός.

Ο ιδιοχώρος με  $n = 3$ , έχει εκφυλισμό 18, και η διόρθωση είναι  $\frac{eB}{2m}(m_\ell + 2m_s)$ . Το σπάσιμο είναι ως εξής

(α')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times 3$ , για  $m_\ell = 2, m_s = \frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 1

(β')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times 2$ , για  $m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 2

(γ')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times 1$ , για  $m_\ell = 2, m_s = -\frac{1}{2}$ , για  $m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 4

(δ')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times 0$ , για  $m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}$ , για  $m_\ell = -1, m_s = \frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 4

(ε')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times (-1)$ , για  $m_\ell = -2, m_s = \frac{1}{2}$ , για  $m_\ell = 0, m_s = -\frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 4

(στ')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times (-2)$ , για  $m_\ell = -1, m_s = -\frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 2

(ζ')  $E^{(1)} = \frac{eB}{2m} \times (-3)$ , για  $m_\ell = -2, m_s = -\frac{1}{2}$ . Εκφυλισμός: 1

Για τον υπολογισμό των εκφυλισμών, θυμηθείτε ότι για κάθε τιμή  $m_\ell$  είναι συμβατή με όλα τα  $\ell \geq |m_\ell|$  και ότι στην προκειμένη περίπτωση οι δυνατές τιμές του  $\ell$  είναι 0, 1, 2.

## Μέρος Γ

Από τις παρακάτω προτάσεις σημειώστε τις 5 που αληθεύουν. (Αν σημειώσετε πάνω από 5, δεν παίρνετε βαθμό.) (1)

- Ένας προβολικός τελεστής έχει ιδιοτιμές  $-1$  και  $1$ .
- Το αποτέλεσμα της μέτρησης δύο φυσικών ποσοτήτων εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γίνονται οι μετρήσεις.
- Δεν μπορούμε να έχουμε επαλληλία καταστάσεων ημιακέραιας και ακέραιας στροφορμής  $j$ .

4. Η εικόνα του Χάιζενμπεργκ είναι πιο θεμελιώδης από την εικόνα του Σρέντινγκερ.
5. Το άθροισμα δύο θετικών τελεστών είναι πάντα θετικός τελεστής.
6. Μια καθαρή μήτρα πυκνότητας είναι ένας προβολικός τελεστής.
7. Το γινόμενο δύο αντιμοναδιαίων τελεστών είναι μοναδιαίος τελεστής.
8. Ο κβαντικός αριθμός  $\ell$  της τροχιακής στροφορμής παίρνει ακέραιες τιμές μόνο για σωματίο σε κεντρικό δυναμικό.
9. Το ηλεκτρόνιο έχει  $s = \frac{1}{2}$  μόνο στο σύστημα αναφοράς που είναι ακίνητο.
10. Η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου είναι ανάλογη της ολικής του στροφορμής.
11. Ένας μοναδιαίος τελεστής μπορεί να έχει ιδιοτιμή  $i\pi$ .
12. Η χωρική κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος δύο ηλεκτρονίων δεν μπορεί να είναι συμμετρική.

Αληθείς προτάσεις είναι οι: **2, 3, 5, 6, 7**

## Μέρος Δ

1. Δείξτε ότι στην εικόνα του Χάιζενμπεργκ, ο τελεστής της θέσης  $\hat{x}$  για ελεύθερο σωματίο μάζας  $m$  εξελίσσεται ως

$$\hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{t}{m}\hat{p}.$$

2. Υπολογίστε την τυπική απόκλιση της θέσης  $\Delta x(t)$  ως συνάρτηση του χρόνου για γενική αρχική κατάσταση  $\hat{\rho}$ .
3. Αποδώστε γραφικά την εξάρτηση του  $\Delta x(t)$  από το χρόνο, προσδιορίζοντας πότε αλλάζει ποιοτικά η συμπεριφορά.

1. Υπάρχουν πολλές δυνατές λύσεις. Η πιο γρήγορη,  $\hat{x}(t) = e^{i\frac{\hat{p}^2}{2m}t}\hat{x}e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}t}$ , και χρησιμοποιείται η ταυτότητα BCH, ή οποία τερματίζει στο δεύτερο όρο.

2.  $\langle \hat{x}(t) \rangle = \langle \hat{x} \rangle_0 + \frac{t}{m}\langle \hat{p} \rangle_0$ .  
 $\langle \hat{x}^2(t) \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle_0 + \frac{t^2}{m^2}\langle \hat{p}^2 \rangle_0 + \frac{t}{m}\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle_0$ .  
 Άρα  $(\Delta x)^2(t) = \dots = (\Delta x)_0^2 + 2\frac{t}{m}C_{xp} + \frac{t^2}{m^2}(\Delta p)_0^2$ .

3. Προφανές