Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2 — 22 Ιουνίου 2017

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Εξάμηνο:

Αριθμός μητρώου:

Μέρος Α

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Κάθε ορθή απάντηση είναι +0,4 μονάδες, κάθε λανθασμένη είναι -0,1 μονάδες, δεν προσθαφαιρείται βαθμός για μη απάντηση.

1. Το άθροισμα δύο .... τελεστών είναι πάντα .... τελεστής.

   (α') μοναδιαίων, μοναδιαίος

   (β') προβολικών, προβολικός

   (γ') θετικών, θετικός

   (δ') αντιμοναδιαίων, αντιμοναδιαίος

   (ε') αντιμοναδιαίων, μοναδιαίος

2. $\delta(x^7+1) =$

   η εξ. $x^7+1=0$ έχει ρίζα $x=-1$. Άρα

   $\delta(x^7+1) = \frac{\delta(x+1)}{7x^6} = \frac{\delta(x+1)}{7(-1)^6} = \frac{1}{7}\delta(x+1)$

   (α') $7\delta(x-1)$

   (β') $7\delta(x+1)$

   (γ') $\frac{1}{7}\delta(x-1)$

   (δ') $\frac{1}{7}\delta(x+1)$

   (ε') 0

3. Ποια από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο R;

   $\int dx\, |\psi(x)|^2 = \int dx \frac{1}{\cosh^2 x} < \int dx \frac{4}{(e^{|x|})^2} = 4\int dx\, e^{-2|x|} \leq \infty$

   $\downarrow$

   $(\cosh x < \frac{1}{2} e^{|x|})$

   Επίσης $\cosh x \neq 0$ για κάθε x

   (α') $\psi(x) = e^{-x}$

   (β') $\psi(x) = x^{-3}$

   (γ') $\psi(x) = \frac{1}{\cosh x}$

   (δ') $\psi(x) = \frac{1}{\sinh x}$

   (ε') $\psi(x) = \tanh x$

4. Έστω δυναμικό $V(x)$ που μηδενίζεται στο άπειρο. Ο αντίστοιχος τελεστής Σρέντινγκερ έχει

   (α') κανέναν εκφυλισμό είτε στο συνεχές είτε στο διακριτό φάσμα

   (β') κανένα εκφυλισμό στο συνεχές φάσμα και διπλό εκφυλισμό στο διακριτό

   κεφ. 6.3

   (γ') κανέναν εκφυλισμό στο συνεχές και άπειρο εκφυλισμό στο διακριτό

   (δ') διπλό εκφυλισμό στο συνεχές φάσμα και κανέναν εκφυλισμό στο διακριτό

   (ε') διπλό εκφυλισμό και στο συνεχές και στο διακριτό φάσμα

5. Το διάνυσμα Μπλοχ που αντιστοιχεί στην κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle + 2i|1\rangle)$ είναι

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

(α') $\frac{1}{5}(4,0,3)$

(β') $\frac{1}{5}(-4,0,3)$

(γ') $\frac{1}{5}(0,4,3)$

(δ') $\frac{1}{5}(0,-4,3)$

(ε') $\frac{1}{5}(4,3,0)$

$r_1 = \frac{1}{5}(-2i \;\; 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$r_2 = \frac{1}{5}(-2i \;\; 1)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{5}$

6. Κιούμπιτ χαρακτηρίζεται από Χαμιλτονιανή $\hat{H} = \omega\sigma_1$ και προετοιμάζεται σε κατάσταση $|0\rangle$ για $t = 0$. Αν τη στιγμή t γίνει μέτρηση του $\hat{\sigma}_3$, ποια θα είναι η μέση τιμή $\langle\hat{\sigma}_3\rangle$;

(α') $\cos(2\omega t)$

(β') $-\cos(2\omega t)$

(γ') $\sin(2\omega t)$

(δ') $[\sin(\omega t) - \cos(\omega t)]^2$

(ε') $[\sin(\omega t) + \cos(\omega t)]^2$

μπορεί να γίνει αναλυτικά υπολογισμός
κατά το κεφ. 8.3.1
ή απλά να παρατηρήσει κανείς
ότι $\langle\sigma_3\rangle(0) = -1$, και το β είναι
το μόνο που το ικανοποιεί

7. Σύστημα δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|0,0\rangle + 2i|1,1\rangle)$. Η ποσότητα $\langle\psi|\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2|\psi\rangle$ είναι

(α') 0

(β') $\frac{1}{5}$

(γ') $-\frac{1}{5}$

(δ') $\frac{4}{5}$

(ε') $-\frac{4}{5}$

$\langle\psi|\sigma_1 \otimes \sigma_2|\psi\rangle = \frac{1}{5}\Big[\langle 0,0|\sigma_1 \otimes \sigma_2|0,0\rangle + 4\langle 1,1|\sigma_1 \otimes \sigma_2|1,1\rangle$
$+ 2i\langle 0,0|\sigma_1 \otimes \sigma_2|1,1\rangle - 2i\langle 1,1|\sigma_1 \otimes \sigma_2|0,0\rangle\Big] =$
$= \frac{1}{5}\Big[\langle 0|\sigma_1|0\rangle\langle 0|\sigma_2|0\rangle + 4\langle 1|\sigma_1|1\rangle\langle 1|\sigma_2|1\rangle + 2i\langle 0|\sigma_1|1\rangle\langle 0|\sigma_2|1\rangle$
$- 2i\langle 1|\sigma_1|0\rangle\langle 1|\sigma_2|0\rangle\Big] = \frac{1}{5}\left(0\cdot 0 + 4\cdot 0\cdot 0 + 2i\cdot 1\cdot i - 2i\cdot 1\cdot(-i)\right) = -\frac{4}{5}$

8. Σύνθετο σύστημα αποτελείται από σωμάτια με σπιν $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$ και $j_3 = 3$. Ποιες οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής J;

(α') $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

(β') $-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4$

(γ') $-4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, 0, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

(δ') $2, 3, 4$

(ε') $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$

9. Ο τελεστής περιστροφής κατά γωνία π γύρω από τον άξονα 3 σε σωμάτιο με ολική στροφορμή $j = 3/2$ είναι

(α') $\mathrm{diag}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

(β') $\mathrm{diag}(-1, 1, -1, 1)$

(γ') $\mathrm{diag}(-1, 1, 1, -1)$

(δ') $\mathrm{diag}(-i, i, -i, i)$

(ε') $\mathrm{diag}(-i, i, i, -i)$

$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{3}{2}\pi} & & & 0 \\ & e^{i\frac{1}{2}\pi} & & \\ & & e^{-i\frac{1}{2}\pi} & \\ 0 & & & e^{-i\frac{3}{2}\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & i \end{pmatrix}$

Ως diag συμβολίζουμε το διαγώνιο πίνακα, με διαγώνια στοιχεία όπως δίνονται από τους αριθμούς που ακολουθούν.

10. Έστω $\hat{\mathbb{P}}$ ο τελεστής αντιστροφής χώρου, $\hat{\mathbb{T}}$ ο τελεστής αντιστροφής χρόνου και $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |2,1\rangle)$ όπου $|\ell, m_\ell\rangle$ ιδιοδιανύσματα της τροχιακής στροφορμής. Ισχύει ότι $\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{T}}|\psi\rangle =$

$$\hat{P}\hat{T}|1,0\rangle = \hat{P}(-|1,0\rangle) = (-1)(-1)|1,0\rangle$$

$$\hat{P}\hat{T}|2,1\rangle = \hat{P}(-|2,-1\rangle) = -|2,-1\rangle$$

(α') $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + i|2,1\rangle)$

(β') $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |2,-1\rangle)$

(γ') $-\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |2,-1\rangle)$

(δ') $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|1,0\rangle + i|2,1\rangle)$

(ε') $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|1,0\rangle + |2,-1\rangle)$

11. Στην προσέγγιση κεντρικού πεδίου για το άτομο του κασσιτέρου (Sn, $Z = 50$), η ενέργεια Φέρμι αντιστοιχεί σε ποια ενεργειακή στάθμη $E_{n,\ell}$;

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} \underline{5p}^2$

(α') $E_{4,2}$

(β') $E_{4,3}$

(γ') $E_{5,0}$

(δ') $E_{5,1}$

(ε') $E_{5,2}$

Το άτομο δεν αποτελεί εξαίρεση του κανόνα δόμησης.

12. Έστω σωματίδιο σε κεντρικό δυναμικό. Πόσους κόμβους έχει η ακτινική ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής για κβαντικούς αριθμούς $n = 5, \ell = 3$;

$n_r = n - \ell - 1$ (κεφ. 13.3.2)

(α') 0

(β') 1

(γ') 2

(δ') 3

(ε') 4

13. Σύστημα αποτελείται από 4 φερμιονικούς αρμονικούς ταλαντωτές συχνότητας ω και σπιν $s = \frac{1}{2}$. Η 3η ενεργειακή στάθμη έχει εκφυλισμό $g =$

Θεμελιώδης $|0+, 0-, 1+, 1-\rangle$

3η έχει ενέργεια 4ω και $|0+, 0-, 1\pm\ 3\pm\rangle$ (4)

$|0+, 0-, 2+\ 2-\rangle$ (1)

$|0\pm, 1+, 1-, 2\pm\rangle$ (4)

(α') 5

(β') 6

(γ') 7

(δ') 8

(ε') 9

14. Ένα σωμάτιο με σπιν $s = \frac{1}{2}$ που κινείται σε μια διάσταση έχει ιδιοτιμές της ενέργειας $\epsilon_n = an^2$, όπου $a > 0$ και $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Η συνάρτηση αριθμού καταστάσεων $\Omega(\epsilon)$ στο όριο του συνεχούς είναι

$$\Omega(\varepsilon) = \underset{\text{σπιν}}{2} \cdot \sum_{n,\, n \le \sqrt{\varepsilon/a}} 1 = 2 \int_{-\sqrt{\varepsilon/a}}^{\sqrt{\varepsilon/a}} dn = 4\sqrt{\varepsilon/a}$$

(α') $4\frac{\epsilon}{a}$

(β') $4\sqrt{\frac{\epsilon}{a}}$

(γ') $2\frac{\epsilon^{3/2}}{a^{3/2}}$

(δ') $\frac{4\pi\epsilon}{a}$

(ε') $4\pi\sqrt{\frac{\epsilon}{a}}$

15. Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα από $N >> 1$ φερμιόνια όπως αυτό που περιγράφεται στο παραπάνω ερώτημα. Η ενέργεια E_0 της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος είναι ανάλογη του

(α′) N

(β′) $N^{3/2}$

(γ′) N^2

(δ′) $N^{5/2}$

(ε′) N^3

$$\Omega(\varepsilon_F) = N \to 4\sqrt{\frac{\varepsilon_F}{\alpha}} = N \to \varepsilon_F = \alpha \left(\frac{N}{4}\right)^2$$

$$g(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\Omega(\varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon\alpha}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, g(\varepsilon)\,\varepsilon \sim \int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon \sim \varepsilon_F^{3/2} \sim (N^2)^{3/2} = N^3$$

16. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης μιας Χαμιλτονιανής $\hat{H}$ και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μεταβολών για τρία διαφορετικά σύνολα δοκιμαστικών διανυσμάτων $|\psi(b)\rangle, |\psi(c)\rangle$ και $|\psi(d)\rangle$. Βρίσκουμε αντίστοιχες τιμές ενέργειας E, E' και E'' με $E < E' < E''$. Ποια τιμή είναι πιο κοντά στην πραγματική;

(α′) E — πάντα η μικρότερη

(β′) E'

(γ′) E''

(δ′) η μέση τιμή τους

(ε′) δεν μπορούμε να ξέρουμε

Μέρος Β'

1. Σωμάτιο μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q εντός ηλεκτρικού πεδίου $\mathcal{E}$ περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - q\mathcal{E}\hat{x}$. (ι) Δείξτε ότι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $|E\rangle$ της Χαμιλτονιανής, κανονικοποιημένα ώστε να ικανοποιούν $\langle E|E'\rangle = \delta(E - E')$, γράφονται στη βάση της ορμής ως

$$\langle k|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi q\mathcal{E}}} e^{\frac{i}{q\mathcal{E}}\left(Ek - \frac{k^3}{6m}\right)}.$$

(ιι) Υπολογίστε τα στοιχεία πίνακα $\langle k|e^{-i\hat{H}t}|k'\rangle$ του τελεστή χρονικής εξέλιξης. (0,8)

Κεφ. 13.4.2

2. Ηλεκτρόνιο είναι σε κατάσταση με $\ell = 6, m_\ell = -6$ και $m_s = \frac{1}{2}$. Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα της μέτρησης της ολικής στροφορμής και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες; (1)

Βλ. άσκηση 7.6

3. Θεωρείστε σύστημα δύο <u>φερμιονικών</u> αρμονικών ταλαντωτών σε μία διάσταση με ίδια συχνότητα ω, μάζα m και δυναμικό αλληλεπίδρασης $\hat{V} = \lambda \hat{x}_1^2 \otimes \hat{x}_2^2$. Υπολογίστε τις διορθώσεις της ενέργειας (ι) για την πρώτη και (ιι) για την τρίτη ενεργειακή στάθμη του αδιατάρακτου συστήματος. (2)

Άσκηση 16.2