Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2
Ιούνιος 2019

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Εξάμηνο:

Αριθμός μητρώου:

Μέρος Α

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Κάθε ορθή απάντηση είναι +0,4 μονάδες, μέχρι δύο λάθος απαντήσεις δεν αφαιρείται βαθμός, για κάθε λανθασμένη πάνω από δύο αφαιρούνται 0,15 μονάδες, δεν προσθαφαιρείται βαθμός για μη απάντηση.

1. $\int_0^\infty dx \delta(x^4-1)\cos(\pi x) =$

   (α') 0

   (β') $\frac{1}{4}$

   (γ') $-\frac{1}{4}$

   (δ') $\frac{1}{2}$

   (ε') $-\frac{1}{2}$

2. Δίνεται η μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$. Το αντίστοιχο διάνυσμα Μπλοχ είναι

   (α') $\frac{1}{5}(0,2,1)$.

   (β') $\frac{1}{5}(0,2,-1)$.

   (γ') $\frac{1}{5}(2,0,1)$.

   (δ') $\frac{1}{5}(2,0,-1)$.

   (ε') $\frac{1}{5}(2,-1,0)$.

3. Σωμάτιο κινείται στην ημιευθεία κάτω από δυναμικό $V(x) = -\frac{a}{x^2}$, όπου $a > 0$. Ο αντίστοιχος τελεστής Σρέντινγκερ έχει

   (α') μόνο διακριτό φάσμα με εκφυλισμό 1.

   (β') μόνο συνεχές φάσμα με εκφυλισμό 1.

   (γ') μόνο συνεχές φάσμα με εκφυλισμό 2.

   (δ') διακριτό φάσμα με εκφυλισμό 1 και συνεχές με εκφυλισμό 1.

   (ε') διακριτό φάσμα με εκφυλισμό 1 και συνεχές με εκφυλισμό 2.

4. Σύστημα δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(|0,0\rangle + 2e^{i\phi}|1,1\rangle\right)$. Ισχύει ότι $\langle\psi|\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2|\psi\rangle =$

   (α') 0

(β') $\frac{4}{5}\sin\phi$

(γ') $-\frac{4}{5}\sin\phi$

(δ') $\frac{4}{5}\cos\phi$

(ε') $-\frac{4}{5}\cos\phi$

5. Για τη μήτρα πυκνότητας $\rho(x,y) = C^{-a(x^2+y^2)+2bxy}$, όπου C, a, b θετικές σταθερές με $b < a$, $(\Delta x)(\Delta p) =$

(α') $\frac{1}{2}$

(β') $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b}{a}}$

(γ') $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

(δ') $\frac{1}{2(a-b)}\sqrt{a^2+b^2}$

(ε') $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

6. Κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση $|1\rangle$. Αρχικά του γίνεται μέτρηση του τελεστή $\hat{A} = \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, για $\boldsymbol{n} = \frac{1}{3}(2,1,2)$ και μετά μέτρηση του $\hat{\sigma}_3$. Ποια η πιθανότητα και οι δύο μετρήσεις να δώσουν τιμή 1;

(α') 0

(β') $\frac{1}{36}$

(γ') $\frac{1}{9}$

(δ') $\frac{4}{9}$

(ε') $\frac{25}{36}$

7. Για σύνθεση στροφορμών, $\underline{3}\otimes\underline{3}\otimes\underline{3} =$

(α') $\underline{2}\oplus\underline{3}\oplus\underline{3}\oplus\underline{4}\oplus\underline{5}\oplus\underline{6}$.

(β') $\underline{1}\oplus\underline{2}\oplus\underline{3}\oplus\underline{5}\oplus\underline{7}\oplus\underline{9}$.

(γ') $\underline{1}\oplus\underline{3}\oplus\underline{3}\oplus\underline{3}\oplus\underline{5}\oplus\underline{5}\oplus\underline{7}$.

(δ') $\underline{3}\oplus\underline{3}\oplus\underline{5}\oplus\underline{7}\oplus\underline{9}$.

(ε') $\underline{1}\oplus\underline{1}\oplus\underline{1}\oplus\underline{3}\oplus\underline{5}\oplus\underline{7}\oplus\underline{9}$.

8. Έστω $\hat{\mathbb{T}}$ ο τελεστής αντιστροφής χρόνου, $\hat{\mathbb{P}}$ ο τελεστής αντιστροφής χώρου και $|\ell, m_\ell\rangle$ ιδιοδιανύσματα της τροχιακής στροφορμής. Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{T}}$;

(α') $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,2\rangle - i|1,1\rangle\right)$

(β') $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + i|2,1\rangle\right)$

(γ') $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)$

(δ') $-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|2,0\rangle + |3,0\rangle\right)$

(ε') $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,0,\rangle + i|3,0\rangle\right)$

9. Εξετάζουμε τη σύνθεση ενός συστήματος δύο στροφορμών $j_1 = \frac{5}{2}$ και $j_2 = \frac{1}{2}$. Η κατάσταση της ολικής στροφορμής $|J,M\rangle = |3,2\rangle$ γράφεται ως

(α') $\frac{1}{\sqrt{6}}|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle_1\otimes|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\rangle_1\otimes|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2$.

(β') $\frac{1}{\sqrt{6}}|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2 - \sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2$.

(γ') $\sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2$.

(δ') $\sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2$.

(ε') $|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2$.

10. Σωμάτιο κινείται σε δύο διαστάσεις και έχει ιδιοτιμές της ενέργειας $\epsilon_n = an_1 + n_2^{2/3}$ (σε αδιάστατες μονάδες), όπου $a > 0$ και $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$. Η πυκνότητα ενέργειας $g(\epsilon)$ στο όριο του συνεχούς είναι ανάλογη του

(α') ϵ

(β') $\epsilon^{2/3}$

(γ') $\epsilon^{3/2}$

(δ') $\epsilon^{5/3}$

(ε') $\epsilon^{5/2}$

11. Σωμάτιο μάζας m κινείται στην ημιευθεία $\boldsymbol{R}^+$ κάτω από δυναμικό $V(x) = ax^2$. Από τις παρακάτω οικογένειες συναρτήσεων, ποια είναι αποδεκτή ως δοκιμαστική στη θεωρία μεταβολών για τη θεμελιώδη κατάσταση;

(α') Ce^{-bx^2}

(β') $Cxe^{-b/x}$

(γ') Cxe^{-bx}

(δ') $C \sin xe^{-bx^2}$

(ε') $C\frac{x}{\sinh bx}$

C, b είναι θετικές σταθερές.

12. Χρησιμοποιώντας τη δοκιμαστική οικογένεια συναρτήσεων του παραπάνω παραδείγματος, εκτιμούμε για ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης την τιμή

(α') $\frac{1}{3}\sqrt{am}$

(β') $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{m}}$

(γ') $\sqrt{\frac{3a}{m}}$

(δ') $\sqrt{\frac{m}{3a}}$

(ε') $\sqrt{\frac{3m}{a}}$

Μέρος Β’

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $\boldsymbol{R}$. (0,5)

Άσκηση 4.1

2. Γράψτε για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα το είδος του φάσματος της Χαμιλτονιανής του.

   (α’) ελεύθερο σωμάτιο

   (β’) αρμονικός ταλαντωτής

   (γ’) άτομο

   (δ’) ηλεκτρόνιο εντός κρυσταλλικού στερεού

   (ε’) μόριο

   Οι επιλογές είναι: ΄”μόνο διακριτό”, ”μόνο συνεχές”, ”και συνεχές και διακριτό”, ”συνεχές σε ζώνες”. (5x0,1)

β α γ, ε δ

3. Από τις παρακάτω προτάσεις σημειώστε τις 5 που αληθεύουν. (Αν σημειώσετε πάνω από 5, δεν παίρνετε βαθμό.)

(α') Μια μήτρα πυκνότητας είναι ένας μοναδιαίος τελεστής.

(β') Ένας προβολικός τελεστής έχει ιδιοτιμές 0 και 1.

(γ') Το άθροισμα δύο προβολικών τελεστών είναι πάντα προβολικός τελεστής.

(δ') Το γινόμενο δύο αντιμοναδιαίων τελεστών είναι μοναδιαίος τελεστής.

(ε') Η κβαντική θεωρία προβλέπει ότι η γάτα του Σρέντινγκερ βρίσκεται σε μία μυστηριώδη κατάσταση μεταξύ ζωής και θανάτου.

(στ') Η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου είναι ανάλογη της ολικής του στροφορμής.

(ζ') Η εικόνα του Σρέντινγκερ είναι πιο θεμελιώδης και αυτή του Χάιζενμπεργκ δευτερεύουσα.

(η') Στην εικόνα Χάιζενμπεργκ εξελίσσονται οι παρατηρήσιμες ποσότητες και οι καταστάσεις μένουν αναλλοίωτες στο χρόνο.

(θ') Δεν μπορούμε να έχουμε επαλληλία καταστάσεων ημιακέραιας και ακέραιας στροφορμής j.

(ι') Η ενέργεια που υπολογίζουμε στη θεωρία των μεταβολών είναι πάντα μικρότερη από την πραγματική ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης.

(ια') Για τις ιδιοτιμές $E_{n,\ell}$ της ενέργειας ενός κεντρικά συμμετρικού δυναμικού ισχύει πάντα ότι $E_{3,0} > E_{2,1}$.

(ιβ') Το ηλεκτρόνιο έχει $s = \frac{1}{2}$ μόνο στο σύστημα αναφοράς που είναι ακίνητο.

(ιγ') Το ισότοπο ${}^{3}_{2}He$ είναι φερμιόνιο.

(ιδ') Ένα ουδέτερο σωμάτιο έχει πάντα μηδενικό γυρομαγνητικό λόγο.

Αληθείς προτάσεις είναι οι: ....
(0,7)

4. Έστω σύστημα 6 αρμονικών ταλαντωτών συχνότητας ω με σπιν $\frac{1}{2}$. Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα για την ενέργεια E και τον εκφυλισμό g των ενεργειακών επιπέδων. Θεωρείστε ότι η ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι $\epsilon_n = n\omega$. (0,7)

επίπεδο	ενέργεια E	εκφυλισμός g
1	6ω	1
2	7ω	4
3	8ω	9
4	9ω	16

Μέρος Γ’

1. Έστω δυναμικό σε μία διάσταση που παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $[a, b]$. Ο τελεστής Σρέντινγκερ στην ευθεία έχει δύο γενικευμένα ιδιοδιανύσματα για κάθε τιμής της ενέργειας , τα οποία επιλέγονται ως εξής.

$$f_{k+}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{ikx} + R_k e^{-ikx}), & x < a \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T_k e^{ikx} & x > b \end{cases}$$

$$f_{k-}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{T}_k e^{-ikx}, & x < a \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{ikx} + \bar{R}_k e^{ikx}) & x > b \end{cases}$$

Δείξτε ότι $|\bar{T}_k|^2 + |\bar{R}_k|^2 = 1$. (Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι η Ρονσκιανή $\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1'$ δύο εκφυλισμένων ιδιοσυναρτήσεων ψ_1, ψ_2 του τελεστή Σρέντινγκερ είναι σταθερή.) (0,8)

σελ. 118 + κεφ. 6.3.3

2. Σύστημα δύο ουδέτερων σωματιδίων με σπιν $s = \frac{1}{2}$ και ίσους γυρομαγνητικούς λόγους γ βρίσκεται εντός σταθερού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$. Η συνολική Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι $\hat{H} = -\gamma \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_1 - \gamma \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 + a \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2$, όπου a είναι σταθερά.

   (α') Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της ενέργειας. (0,6)

   (β') Βρείτε την πιθανότητα μία μέτρηση του συνολικού σπιν πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος να δώσει τιμή που αντιστοιχεί σε $s = 1$, για όλες τις δυνατές τιμές των γ και a. (0,2)

Άσκηση 14.4

3. (α') Δείξτε ότι για οποιαδήποτε ιδιοκατάσταση $|\psi\rangle$ του τελεστή Σρέντινγκερ στις τρεις διαστάσεις ισχύει ότι $\langle\psi|\hat{\boldsymbol{p}}|\psi\rangle = 0$. (0,3)

   (β') Δείξτε ότι αν το δυναμικό είναι κεντρικό, $\langle\psi|\hat{\boldsymbol{r}}|\psi\rangle = 0$. (0,3)

   (γ') Αποδείξτε την ανισότητα του Χάρντυ: για κάθε $|\psi\rangle \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$,

$$\langle\psi|\hat{\boldsymbol{p}}^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\langle\psi|\hat{r}^{-2}|\psi\rangle.$$

   (0,6)

Άσκηση 13.1
Θεώρημα 13.1