Κεφ. 13

① (α) $\hat{H}=\frac{\vec{p}^2}{2m}+V(\vec{r})$, $[\hat{H},\hat{x}_i]=-\frac{i}{m}p_i \rightarrow$

$$\langle\psi|\hat{p}_i|\psi\rangle = im\,\langle\psi|[\hat{H},\hat{x}_i]|\psi\rangle = im\langle\psi|\hat{H}\hat{x}_i-\hat{x}_i\hat{H}|\psi\rangle =$$
$$= im\,E\,\langle\psi|\hat{x}_i-\hat{x}_i|\psi\rangle = 0$$

(β) Σε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό, η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη από αντιστροφές στο χώρο. Τα ιδιοδιανύσματα της $\hat{H}$ έχουν σαφή αρτιότητα, $\psi(\vec{r})=\pm\psi(-\vec{r})$, οπότε $|\psi(-\vec{r})|^2=|\psi(\vec{r})|^2$. Άρα $\langle\psi|\vec{r}|\psi\rangle=\int d^3x\,\vec{r}\,|\psi(\vec{r})|^2=0$ ως ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης.

(γ) $$\langle\psi|r^{-2}|\psi\rangle=\int d^3x\,|\psi(r)|^2\frac{1}{r^2}\geq\frac{1}{\int d^3x|\psi(r)|^2r^2} = \frac{1}{\langle\psi|r^2|\psi\rangle}$$ (βλ. ΕΞ. 7.8)

Άρα

$\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle\langle\psi|r^2|\psi\rangle\geq\frac{1}{4}$. Αφού $\langle\psi|\vec{p}|\psi\rangle=0$ και $\langle\psi|\vec{r}|\psi\rangle=0$

παίρνουμε $(\Delta\vec{p})^2(\Delta r)^2\geq\frac{1}{4}\rightarrow(\Delta p)(\Delta r)\geq\frac{1}{2}$

---

② όταν $F=\hat{\vec{r}}\,\hat{\vec{p}}$. $[\hat{H},\hat{F}]=\left[\frac{\vec{p}^2}{2m}+V(r),\vec{r}\cdot\vec{p}\right]=\sum_i\left[\frac{\vec{p}^2}{2m},\hat{x}_i\right]+\sum_i \hat{x}_i\left[V(\vec{r}),\hat{p}_i\right]$

$$=-\frac{i}{m}\sum_i\hat{p}_i\hat{p}_i+i\sum_i x_i\frac{\partial V}{\partial x_i}=-i\left(\frac{\hat{\vec{p}}^2}{m}-\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V\right)$$

Αν $\hat{H}|\psi\rangle=E|\psi\rangle\rightarrow\langle\psi|\hat{H}\hat{F}-\hat{F}\hat{H}|\psi\rangle=E\langle\psi|\hat{F}-\hat{F}|\psi\rangle=0$

Άρα $\langle\psi|\frac{\vec{p}^2}{m}-\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V|\psi\rangle=0\longrightarrow$ το ζητούμενο

Για $V=\frac{a}{r^n}$, $\vec{\nabla}V=-\frac{na}{r^{n+1}}\frac{\vec{r}}{r}\longrightarrow\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V=-\frac{na}{r^n}=-nV$

Άρα $2\langle\hat{T}\rangle+n\langle\hat{V}\rangle=0$

---

③ Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Χάρντυ, βρίσκοντας το ελάχιστο της $\varepsilon(r)=V(r)+\frac{1}{8mr^2}$.

(α) $\varepsilon'(r)=-\frac{ak}{r^{a+1}}-\frac{1}{4mr^3}$. $\varepsilon'=0$ μόνο αν $k<0\rightarrow r^{a-2}=4a|k|m\rightarrow r=(4a|k|m)^{\frac{1}{a-2}}$

$$\varepsilon_{min}=-\frac{|k|}{(4a|k|m)^{\frac{a}{a-2}}}+\frac{1}{8m(4a|k|m)^{\frac{2}{a-2}}}=\frac{1}{4m(4a|k|m)^{\frac{2}{a-2}}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)$$

β) $f' = 0 \to r^2 = \frac{1}{4mV_0} \to E_{min} = V_0 \log\left(\frac{1}{\sqrt{4mV_0}\, r_0}\right) + \frac{4mV_0}{8m}$

$= V_0\left(\frac{1}{2} - \log(\sqrt{4mV_0}\, r_0)\right)$

---

5. Επιλέγω $\psi(\vec r) = (2\pi\sigma^2)^{3/4}\, e^{-\frac{\vec r^2}{4\sigma^2}}$

$\langle\psi|H|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{\hat p^2}{2m}|\psi\rangle + \langle\psi|V(r)|\psi\rangle$

Για την επιλογή $\psi(\vec r)$ $\langle\psi|\hat p^2|\psi\rangle = \int d^3x\, |\nabla\psi|^2 =$

$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\, 4\pi \int_0^\infty r^2 dr\, \frac{r^2}{16\sigma^4}\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{8\sigma^6} \int_0^\infty dr\, r^4 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

$= \frac{3}{8\sigma^2}$

$\langle\psi|V(r)|\psi\rangle = -\lambda \int d^3x\, \delta^3(\vec r)\, |\psi(r)|^2 = -\lambda\, |\psi(0)|^2 = -\frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}$

Άρα $\langle\psi|\hat H|\psi\rangle = \frac{3}{8\sigma^2} - \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}$.

Για $\sigma \to 0$, $\langle\psi|\hat H|\psi\rangle \to -\infty$, Άρα η Χαμιλτονιανή δεν είναι φραγμένη από κάτω

---

6. Για $r<R$, η λύση είναι $R_{k\ell}(r) = A_\ell(k)\, j_\ell(kr)$ για $r<0$.

Για $r \geq R$, $R_{k\ell}(r) = 0$. Οπότε η συνέχεια στο $r=R$ δίνει

$j_\ell(kR) = 0 \to kR = z_{n,\ell}$ εξ. ορισμού.

Άρα $E = \frac{1}{2mR^2}\, z_{n,\ell}^2$

Οι τιμές $z_{n,\ell}$ βρίσκονται με αναζήτηση στο διαδίκτυο.

(9) Για $\ell=0$, η εξίσωση είναι $u''+2m(E-V(r))u=0$

$r<a \to u''+2m(E-V_0)u=0 \to u=A\sinh\lambda r+B\cosh\lambda r \qquad \lambda=\sqrt{2m(V_0-E)}$

$r>a \to u''+2mEu=0 \to u=C\sin kr+D\cos kr \qquad , k=\sqrt{2mE}$

$u(0)=0 \to B=0 \to u=A\sinh\lambda r$

Συνέχεια στο $r=a \to A\sinh\lambda a=C\sin ka+D\cos ka$

Συνέχεια του u' στο $r=a \to A\lambda\cosh\lambda a=k(C\cos ka-D\sin ka)$

διαιρώντας $\frac{k}{\lambda}\tanh\lambda a=\frac{C\sin ka+D\cos ka}{C\cos ka-D\sin ka}=\frac{\sin ka+\frac{D}{C}\cos ka}{\sin ka-\frac{D}{C}\cos ka}$

για $ka\ll 1$, $\lambda\approx K_0=\sqrt{2mV_0}$, $\cos ka\approx 1$, $\sin ka\approx ka$

άρα $-\frac{k}{K_0}\tanh K_0 a=\frac{\frac{D}{C}+ka}{\frac{D}{C}-ka}$, $\frac{D}{C}=\tan\delta_0(k)\approx\delta_0(k)$

Λύνοντας βρίσκουμε $\delta_0(k)=ka\,\frac{(\tanh K_0 a)/K_0 a-1}{(\tanh K_0 a)/K_0 a+1}$

---

(10) Η κυματοσυνάρτηση για το άτομο του υδρογόνου είναι $\psi(\vec r)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$

Ως προς την ορμή $\tilde\psi_0(\vec p)=\langle\vec p|\psi_0\rangle=\int d^3x\,\langle\vec p|\vec x\rangle\langle\vec x|\psi_0\rangle=$

$=\int\frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\,e^{-i\vec p\cdot\vec r}\,\psi_0(\vec r)$

σε πολικές συντεταγμένες ~~για την ορμή~~ $\vec p\cdot\vec r=pr\cos\theta$, $p=|\vec p|$

οπότε $\tilde\psi_0(\vec p)=\int_0^\infty r^2dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\;\frac{e^{-ipr\cos\theta}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$

Θέτω $\xi=\cos\theta$, οπότε

$\tilde\psi_0(\vec p)=2\pi\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\int_0^\infty dr\,r^2e^{-r/a_0}\int_{-1}^{1}d\xi\;e^{-ipr\xi}=$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\sqrt{\pi}}{a_0^{3/2}}\int_0^\infty dr\,r^2e^{-r/a_0}\frac{2}{pr}\sin pr=\frac{4\sqrt{\pi}}{a_0^{3/2}\,p\,(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty re^{-r/a_0}\sin pr$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{4\sqrt{\pi}}{a_0^{3/2}p}\frac{2a_0^{3}p}{(1+a_0^2p^2)^2}=\frac{2\sqrt{2}\,a_0^{3/2}}{(1+a_0^2p^2)^2}$

Άρα η πυκνότητα πιθανότητας ως προς ορμή είναι

$$|\tilde{\psi}(\vec{p})|^2 = \frac{8\alpha_0^3}{(1+\alpha_0^2 p^2)^4}$$, Δεδομένου ότι εξαρτάται μόνο από το μέτρο

της ορμής, η πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$P(p) = \int d^3p \; \delta(|\vec{p}|^2 - p)\, |\tilde{\psi}(\vec{p})|^2 = 4\pi p^2 \cdot \frac{8\alpha_0^3}{(1+\alpha_0^2 p^2)^4} = \frac{32\pi\, \alpha_0^3\, p^2}{(1+\alpha_0^2 p^2)^4}$$

---

(11) (α) $E_\lambda = \langle \psi_\lambda | \hat{H}_\lambda | \psi_\lambda \rangle \rightarrow \frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = \langle \dot{\psi}_\lambda | \hat{H}_\lambda | \psi_\lambda \rangle + \langle \psi_\lambda | \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda} | \psi_\lambda \rangle + \langle \psi_\lambda | H_\lambda | \dot{\psi}_\lambda \rangle$

$= E_\lambda \left(\langle \dot{\psi}_\lambda | \psi_\lambda \rangle + \langle \psi_\lambda | \dot{\psi}_\lambda \rangle \right) + \langle \psi_\lambda | \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda} | \psi_\lambda \rangle = E_\lambda \underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle}_{0} + \langle \psi_\lambda | \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda} | \psi_\lambda \rangle$

όπου γράψαμε $|\dot{\psi}_\lambda\rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda} |\psi_\lambda\rangle$

(β) Η Χαμιλτονιανή $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$ για το άτομο του υδρογόνου έχει ιδιοτιμές

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2n^2}$$

η παραπάνω ισότητα είναι

$$\langle n,\ell,m | \frac{1}{r} | n,\ell,m \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\alpha^2 m}{2n^2} \right) = \frac{\alpha m}{n^2}$$

(γ) Είδαμε ότι το σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό είναι ισοδύναμο με μονοδιάστατο πρόβλημα: τελεστή Σρέντινγκερ

$$\hat{H}_\ell = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2}$$ και ιδιοτιμές $E_{n_r\ell} = -\frac{\alpha^2 m}{2(n_r+\ell+1)^2}$

παίρνουμε $\lambda = \ell$

$$\frac{(2\ell+1)}{2m} \langle n_r\ell | \frac{1}{r^2} | n_r \ell \rangle = \frac{\alpha^2 m}{(n_r+\ell+1)^3} \rightarrow \langle n_r \ell | \frac{1}{r^2} | n_r,\ell \rangle = \frac{\alpha^2 m^2}{n^3(\ell+\frac{1}{2})}$$

$$\langle n\,\ell, m | \frac{1}{r^2} | n\,\ell, m \rangle$$

17

Στην ακτινική εξίσωση για δυναμικό Κουλόμπ

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2}-\frac{a}{r}-E\right)u=0 \qquad (1)$$

Θέτουμε $r=b\rho^2$ (b σταθερά)

$u=\sqrt{\rho}\,\psi$

οπότε

$$\frac{du}{dr}=\frac{1}{dr/d\rho}\frac{d(\sqrt{\rho}\,\psi)}{d\rho}=\frac{1}{2b\rho}\left(\psi'\sqrt{\rho}+\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\psi\right) \qquad \left(\psi'=\frac{d\psi}{d\rho}\right)$$

$$=\frac{1}{2b}\left(\frac{\psi'}{\sqrt{\rho}}+\frac{1}{2\rho^{3/2}}\psi\right)$$

$$\frac{d}{dr}\frac{du}{dr}=\frac{1}{dr/d\rho}\frac{1}{2b}\left(\frac{\psi'}{\sqrt{\rho}}+\frac{1}{2\rho^{3/2}}\psi\right)'=\frac{1}{4b^2\rho}\left(\frac{\psi''}{\sqrt{\rho}}-\frac{\psi'}{2\rho^{3/2}}+\frac{\psi'}{2\rho^{3/2}}-\frac{3}{4\rho^{5/2}}\psi\right)$$

$$=\frac{1}{4b^2\rho^{3/2}}\left(\psi''-\frac{3}{4\rho^2}\psi\right)$$

Η (1) γίνεται

$$-\frac{1}{2m}\frac{1}{4b^2\rho^{3/2}}\left(\psi''-\frac{3}{4\rho^2}\psi\right)+\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2mb^2\rho^4}-\frac{a}{b\rho^2}-E\right)\sqrt{\rho}\,\psi=0$$

$$-\frac{1}{2m}\psi'' + \left[\frac{4\ell(\ell+1)+\frac{3}{4}}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m^2\omega^2\rho^2 - \varepsilon\right]\psi = 0$$

(b) Ταυτίζεται με την ακτινική εξίσωση για 3-δ ταλαντωτή

$$-\frac{1}{2m}\psi'' + \left[\frac{\lambda(\lambda+1)}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 - \varepsilon\right]\psi = 0$$

$$\lambda(\lambda+1) = 4\ell(\ell+1)+\frac{3}{4}$$

$$4ab = \varepsilon$$

$$4b^2|E| = \frac{1}{2}m\omega^2$$

---

20 $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{q}{2m}\vec{B}\cdot\vec{\ell}$, όπου $H_0 = \frac{p^2}{2m} + q\phi(r)$ τελεστής Σρέντιγκερ για κεντρικό δυναμικό.

(α) Καθώς σε κεντρικό δυναμικό $[\hat{H}_0, \hat{\ell}_i] = 0 \longrightarrow [\hat{H}, \hat{H}_0] = 0$, άρα οι $\hat{H}$ και $\hat{H}_0$ έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα $\equiv$ τα ιδιοδιανύσματα δεν εξαρτώνται από το B.

(β) Διαλέγουμε $\vec{B} = (0,0,B)$, οπότε $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{q}{2m}B\hat{\ell}_z$

Αν $H_0|n,\ell,m\rangle = E_{n,\ell}|n,\ell,m\rangle$ τότε

$$\hat{H}|n,\ell,m\rangle = E_{n,\ell}|n,\ell,m\rangle - \frac{q}{2m}B\,\hat{\ell}_z|n,\ell,m\rangle =$$

$$= \left(E_{n,\ell} - \frac{q}{2m}Bm\right)|n,\ell,m\rangle \longrightarrow E'_{n,\ell,m} = E_{n,\ell} - \frac{q}{2m}Bm$$

(γ) Για δυναμικό Κουλόμπ, το $E_{n,\ell}$ εξαρτάται μόνο από το n. Άρα το $E_{n,\ell,m}$ δεν εξαρτάται από το ℓ. Καθώς $\ell<n$, για δεδομένο n, υπάρχουν τιμές του ℓ από 0 ως $n-1$. Για κάθε m υπάρχουν $\ell_{max}-|m|+1$ επιτρεπτές τιμές του ℓ, ή ισοδύναμα $n-|m|$ τιμές

άρα $g(E'_{n,m}) = n-|m|$

Για αρμονικό ταλαντωτή $E = N\omega$ όπου $N = 2n_r + \ell$

Για δεδομένο N, το ℓ παίρνει τιμές από 0 ή 1 ως $N \rightarrow \ell_{max} = N$

Για δεδομένο m, υπάρχουν $\ell_{max} - |m| + 1$ τιμές του ℓ. άρα

$N - |m| + 1$ τιμές

άρα $g = N - |m| + 1$

---

21 $$\langle x|E\rangle = \int dk \langle x|k\rangle\langle k|E\rangle = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi q\mathcal{E}}} e^{i\frac{Ek}{q\mathcal{E}} - i\frac{k^3}{6q\mathcal{E}m}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{q\mathcal{E}}} \int dk \; e^{i\left(x+\frac{E}{q\mathcal{E}}\right)k - \frac{ik^3}{6q\mathcal{E}m}}$$

αλλαγή μεταβλητών $\frac{k^3}{2q\mathcal{E}m} = t^3 \rightarrow k = t\,(2q\mathcal{E}m)^{1/3}$

$$\langle x|E\rangle = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{q\mathcal{E}}}(2mq\mathcal{E})^{1/3} \int dt\; e^{it\left(x+\frac{E}{q\mathcal{E}}\right)(2q\mathcal{E}m)^{1/3} - \frac{it^3}{3}} =$$

$$= \left(\frac{4m^2}{q\mathcal{E}}\right)^{1/6} Ai\left[(2mq\mathcal{E})^{1/3}\left(x+\frac{E}{q\mathcal{E}}\right)\right]$$
