Κεφ. 16

① Οι 3 πρώτες ενεργειακές στάθμες του αδιατάρακτου συστήματος είναι

$|0,0\rangle$ με ενέργεια 0

$|0,1\rangle, |1,0\rangle$ " ω

$|2,0\rangle, |0,2\rangle, |1,1\rangle$ " 2ω

$$\hat{V} = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2 \otimes (\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2$$

• Θεμελιώδης: $E_0^{(1)} = \langle 0,0|\hat{V}|0,0\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle \cdot \langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle$

$$= \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle\right)^2 = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}$$

• 2η στάθμη: Λόγω εκφυλισμού υπολογίζουμε τον πίνακα 2×2 V_{ab}

$$\langle 1,0|\hat{V}|1,0\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 1|(a+a^\dagger)^2|1\rangle \langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle$$

$$= \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 1|aa^\dagger + a^\dagger a|1\rangle \langle 0|aa^\dagger + a^\dagger a|0\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\cdot 3$$

όμοια $\langle 0,1|\hat{V}|0,1\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\cdot 3$

$$\langle 0,1|\hat{V}|1,0\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 1|a^\dagger a + aa^\dagger|0\rangle \langle 0|a^\dagger a + aa^\dagger|1\rangle = 0$$

ο V_{ab} είναι ήδη διαγώνιος

οι $|0,1\rangle$ και $|1,0\rangle$ παραμένουν εκφυλισμένες με ενέργεια

$$\omega + \frac{3\lambda}{4m^2\omega^2}$$

3η στάθμη: Υπολογίζουμε 3×3 πίνακα V_{ab}

$$\langle 2,0|\hat{V}|2,0\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 2|(a+a^\dagger)^2|2\rangle \langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\cdot 5$$

$$\langle 2,0|\hat{V}|2,0\rangle = \langle 0,2|\hat{V}|0,2\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\cdot 5$$

$$\langle 1,1|\hat{V}|1,1\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(\langle 1|(a+a^\dagger)^2|1\rangle\right)^2 = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\cdot 3^2 = \frac{9\lambda}{4m^2\omega^2}$$

$$\langle 2,0|\hat{V}|0,2\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 2|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 0|(a+a^\dagger)^2|2\rangle =$$

$$= \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 2|a^{\dagger 2}|0\rangle\langle 0|a^2|2\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\lambda}{2m^2\omega^2}$$

$$\langle 1,1|\hat{V}|0,2\rangle = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\langle 1|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 1|(a+a^\dagger)^2|2\rangle = 0 = \langle 1,1|\hat{V}|2,0\rangle$$

Άρα παίρνουμε πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} |1,1\rangle & |2,0\rangle & |0,2\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} |1,1\rangle \\ |2,0\rangle \\ |0,2\rangle \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{9\lambda}{4m^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5\lambda}{4m^2\omega^2} & \frac{\lambda}{2m^2\omega^2} \\ 0 & \frac{\lambda}{2m^2\omega^2} & \frac{5\lambda}{4m^2\omega^2} \end{pmatrix} \end{array} = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ο πίνακας $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμή 9 με ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

" 7 " $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

" 3 " $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Άρα η $|1,1\rangle$ έχει ενέργεια $2\omega + \frac{9\lambda}{4m^2\omega^2}$

η $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,2\rangle + |2,0\rangle\right)$ " $2\omega + \frac{7\lambda}{4m^2\omega^2}$

η $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,2\rangle - |2,0\rangle\right)$ " $2\omega + \frac{3\lambda}{4m^2\omega^2}$

πλήρης άρση εκφυλισμού

(2) Σε φερμιονικούς ταλαντωτές·

1η στάθμη: $|0,1\rangle_A$, $E=\omega$, $g=1$

2η ״ $|0,2\rangle_A$, $E=2\omega$, $g=1$

3η ״ $|0,3\rangle_A$, $|1,2\rangle_A$ $E=3\omega$ $g=2$

Για την πρώτη στάθμη $E_1^{(1)} = {}_A\langle 0,1|\hat V|0,1\rangle_A = \frac{1}{2}\Big(\langle 0,1|\hat V|0,1\rangle - \langle 0,1|\hat V|1,0\rangle$
$+ \langle 1,0|\hat V|1,0\rangle - \langle 1,0|\hat V|0,1\rangle\Big) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\Big(\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 1|(a+a^\dagger)^2|1\rangle$
$- \langle 0|(a+a^\dagger)^2|1\rangle\langle 1|(a+a^\dagger)^2|0\rangle + \langle 1|(a+a^\dagger)^2|1\rangle\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle - \langle 1|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 0|(a+a^\dagger)^2|1\rangle\Big)$

$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(1\cdot 3 - 0\cdot 0 + 1\cdot 3 - 0\cdot 0\right) = \frac{3\lambda}{4m^2\omega^2}$$

Για τη 2η στάθμη: $E_2^{(1)} = {}_A\langle 0,2|\hat V|0,2\rangle_A = \frac{1}{2}\Big(\langle 0,2|\hat V|0,2\rangle - \langle 0,2|\hat V|2,0\rangle$
$+ \langle 2,0|\hat V|2,0\rangle - \langle 2,0|\hat V|0,2\rangle\Big) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\Big(\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 2|(a+a^\dagger)^2|2\rangle$
$- \langle 0|(a+a^\dagger)^2|2\rangle\langle 2|(a+a^\dagger)^2|0\rangle + \langle 2|(a+a^\dagger)^2|2\rangle\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle - \langle 2|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 0|(a+a^\dagger)^2|2\rangle\Big)$

$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(1\cdot 5 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 5\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right) = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\cdot 3$$

Για την 3η στάθμη: Γράφουμε $|k\rangle = |0,3\rangle_A$, $|l\rangle = |1,2\rangle_A$

$$V_{kk} = \langle k|\hat V|k\rangle = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\Big(2\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\langle 3|(a+a^\dagger)^2|3\rangle - 2\langle 0|(a+a^\dagger)^2|3\rangle\langle 3|(a+a^\dagger)^2|0\rangle\Big)$$

$$= \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(1\cdot 7 - 0\right) = \frac{7\lambda}{4m^2\omega^2} \qquad \left(\langle 3|(a+a^\dagger)^2|3\rangle = 7\right)$$

$$V_{ll} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\Big(2\langle 1|(a+a^\dagger)^2|1\rangle\langle 2|(a+a^\dagger)^2|2\rangle - 2\langle 1|(a+a^\dagger)^2|2\rangle\langle 2|(a+a^\dagger)^2|1\rangle\Big)$$

$$= \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(3\cdot 5 - 0\right) = \frac{15\lambda}{4m^2\omega^2}$$

$$V_{KL} = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\,\frac{1}{2}\Big(\langle 0|(a+a^\dagger)^2|1\rangle \langle 3|(a+a^\dagger)^2|2\rangle$$

$$\langle 0|(a+a^\dagger)^2|2\rangle \langle 3|(a+a^\dagger)^2|1\rangle - \langle 3|(a+a^\dagger)^2|1\rangle \langle 0|(a+a^\dagger)^2|2\rangle + \langle 3|(a+a^\dagger)^2|2\rangle\langle 0|(a+a^\dagger)^2|1\rangle \Big)$$

$$= \frac{\lambda}{4m^2\omega}\,\frac{1}{2}\left(0\cdot 0 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{6} - \sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + 0\cdot 0\right) = -\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\, 2\sqrt{3}$$

$$\left(\langle 1|(a+a^\dagger)^2|3\rangle = \langle 1|a^2|3\rangle = \sqrt{6}\langle 1|1\rangle = \sqrt{6} \right)$$

$$V = \frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\begin{pmatrix} 7 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 15 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\frac{\lambda}{4m^2\omega^2}\left(11 \pm 2\sqrt{7}\right)$

(6) α) Ο δεύτερος όρος γράφεται

$$-\sum_{i,j} \frac{\mu_{1i}\,\mu_{2j}}{4\pi} \cdot \left(\frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5}\right)$$

Η συνεισφορά του στην $E_0^{(1)}$ είναι

$$-\sum_{i,j} \frac{\mu_{1i}\,\mu_{2j}}{4\pi} \int d^3r\, |\psi_0(r)|^2 \left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \delta_{ij} r^2\right) \quad (1)$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\int d^3r\, |\psi_0(r)|^2 \frac{r_i r_j}{r^5} = f(r)\,\delta_{ij}$$ (δεν εμφανίζεται προτιμητέα κατεύθυνση)

Θέτοντας $i=j$ και αθροίζοντας

$$3f(r) = \int d^3r\, |\psi_0(r)|^2 \frac{r^2}{r^5}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι η συνεισφορά του 2ου όρου μηδενίζεται.

(β) Άρα $E_0^{(1)} = \langle \psi_0 | -\frac{2}{3} \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2\, \delta(r) | \psi_0 \rangle = -\frac{2}{3} \frac{e}{2m} g_e \frac{e}{2m} g_p\, \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p \int d^3r\, \delta(\vec{r}) |\psi_0(r)|^2$

$$= -\frac{e^2 g_e g_p}{6m^2} |\psi_0(0)|^2\, \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p$$ (όπου ~~…~~ υπονοείται αναμενόμενη τιμή για τους βαθμούς ελευθερίας του σπιν).

γ) Για τις καταστάσεις με ολικό ~~…~~ σπιν $F=0$ οι ιδιοτιμές του $\vec{S}_e \cdot \vec{S}_p$ είναι $\frac{1}{2}\left(0\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

Άρα $$E_0^{(1)} = \frac{e^2 g_e g_p}{8m^2} |\psi_0(0)|^2$$

για καταστάσεις με ολικό σπιν $F=1$, οι ιδιοτιμές της $\vec{S}_e \cdot \vec{S}_p$ είναι

$$\frac{1}{2}\left(1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

άρα $$E_0^{(1)} = -\frac{e^2 g_e g_p}{24m^2} |\psi_0(0)|^2$$

Για τη θεμελιώδη του ατόμου του υδρογόνου $\psi_0(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a_0^{3/2}}$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο

8 Θεωρούμε $\psi_b(r) = C e^{-b\mu r}$. Κανονικοποιώντας $C^2\int_0^\infty 4\pi r^2 dr\, e^{-2b\mu r} = 4\pi C^2 \frac{2}{8b^3\mu^3} = 1$

$\longrightarrow C = \sqrt{\frac{b^3\mu^3}{\pi}}$

Υπολογίζουμε $\langle\psi_b|\hat{p}^2|\psi_b\rangle = \int d^3r\, |\nabla\psi|^2 = \int 4\pi r^2\, C^2\, b^2\mu^2 e^{-2b\mu r}$

$= b^2\mu^2\langle\psi_b|\psi_b\rangle = b^2\mu^2$

$\langle\psi_b|V(r)|\psi_b\rangle = -g\int_0^\infty 4\pi r^2 dr\, C^2 \frac{e^{-(2b+1)\mu r}}{r} = -4\pi g C^2 \frac{1}{(2b+1)^2\mu^2} = -g\mu\frac{b^3}{(\frac{2b+1}{2})^2}$

$E(b) = \langle\psi_b|\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)|\psi_b\rangle = \frac{b^2\mu^2}{2m} - g\mu\frac{b^3}{(b+\frac{1}{2})^2}$

$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\mu^2 b}{m} - \frac{3g\mu b^2}{(b+\frac{1}{2})^2} + \frac{2g\mu b^3}{(b+\frac{1}{2})^3} = 0$

Η λύση $b=0$ απορρίπτεται καθώς δεν οδηγεί σε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ψ_b

Παίρνουμε $\frac{3gbm}{\mu(b+\frac{1}{2})^2} - \frac{2gb^2m}{\mu(b+\frac{1}{2})^3} = 1 \longrightarrow \frac{b}{(b+\frac{1}{2})^2} - \frac{2b^2}{3(b+\frac{1}{2})^3} = \frac{\mu}{gm} \ll 1$

Άρα περιμένουμε ότι $b \ll 1$, άρα στο αριστερό μέλος κυριαρχεί ο πρώτος όρος

$b \gg b^2$ και $b \ll \frac{1}{2}$, οπότε $b_{min} = \frac{\mu}{gm}$

$E(b_{min}) = \frac{\mu^2}{2m}\frac{\mu^2}{g^2m^2} - \frac{g\mu}{(\frac{1}{2})^3}\frac{\mu^3}{g^3m^3} = \frac{\mu^4}{g^2m^3}\left(\frac{1}{2} - 8\right) = -\frac{15}{2}\frac{\mu^4}{g^2m^3}$

---

9 Χρησιμοποιούμε Γκαουσιανή $\psi_b(x) = \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

$\langle p^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}}\int dx\, e^{-\frac{x^2}{b^2}}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{b^4}\right) = \frac{\sqrt{\pi b^2}}{\sqrt{\pi b^2}}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^4}\frac{b^2}{2}\right) = \frac{1}{2b^2}$

$\langle x^4\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}}\int dx\, e^{-\frac{x^2}{b^2}} x^4 = \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}}\sqrt{\pi b^2}\,\frac{3b^4}{4} = \frac{3b^4}{4}$

$E(b) = \langle\psi_b|\hat{H}|\psi_b\rangle = \frac{1}{4mb^2} + \frac{3\lambda}{4}b^4 \longrightarrow \frac{\partial E}{\partial b} = -\frac{1}{8mb^3} + 3\lambda b^3 = 0 \longrightarrow$

$b^6 = \frac{1}{24m\lambda} \longrightarrow b^2_{min} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3m\lambda}\right)^{1/3}$

$E(b_{min}) = \frac{1}{4m}\,2(3m\lambda)^{1/3} + \frac{3\lambda}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{(3m\lambda)^{2/3}} = \frac{3}{16}\left(\frac{3\lambda}{m^2}\right)^{1/3}$

10 Δοκιμάζουμε τη $\psi_b(x) = Cxe^{-bx}$, η οποία έχει 0 κόμβους

Κανονικοποίηση: $C^2\int_0^\infty x^2 e^{-2bx} = 1 \to C^2 \frac{2}{4b^3} = 1 \to C = 2b^{3/2}$

$$\langle\psi_b|\hat{p}^2|\psi_b\rangle = \int_0^\infty dx\, |\psi_b'(x)|^2 = \int_0^\infty C^2 dx\, e^{-2bx}(1-bx)^2$$

$$= 4b^3 \int_0^\infty dx\, e^{-2bx}(1-2bx+b^2x^2) = 4b^3\left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} + \frac{b^2}{4b^3}\right) = b^2$$

$$\langle\psi_b|\hat{V}|\psi_b\rangle = C^2 a\int_0^\infty x^3 e^{-2bx} = C^2 \alpha \frac{6}{16b^4} = 4b^3\alpha\frac{6}{16b^4} = \frac{3a}{2b}$$

$$E(b) = \langle\psi_b|\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)|\psi_b\rangle = \frac{b^2}{2m} + \frac{3a}{2b}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{b}{m} - \frac{3a}{2b^2} = 0 \to b^3 = \frac{3am}{2} \to b_{min} = \left(\frac{3am}{2}\right)^{1/3}$$

$$E_{min} = \frac{1}{2m}\left(\frac{3am}{2}\right)^{2/3} + \frac{3a}{2}\left(\frac{3am}{2}\right)^{-1/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5/3}\left(\frac{a^2}{m}\right)^{1/3}$$

---

14 (α) Για $x \ll 1$, οπότε $\phi(x) = 1 + f(x)$ με $f(x) \ll 1$

$$\sqrt{x}\,\phi'' = \phi^{3/2} \to \sqrt{x}\, f'' \simeq 1 \to f'' = \frac{1}{\sqrt{x}} \to f' = 2\sqrt{x} + c \to f = \frac{4}{3}x^{3/2} + cx + d$$

αφού $f(0) = 0 \to d = 0$

(β) αποδείχθηκε αντικατάσταση.

(γ) Έστω $\phi(x) = \frac{144}{x^3} + \frac{C}{x^\sigma}$ για $x \gg 1$

$$\phi''(x) \underset{x\gg1}{=} \frac{2048}{x^5} + \frac{\sigma(\sigma+1)c}{x^{\sigma+2}}$$. Αφού $\sigma > 3 \to \phi = \frac{144}{x^3}\left(1 + \frac{C}{144x^{\sigma-3}}\right)$

Οπότε $$\phi^{3/2} \simeq \frac{2048}{x^{9/2}}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{C}{144x^{\sigma-3}}\right) = \frac{2048}{x^{9/2}} + \frac{18c}{x^{\sigma+3/2}}$$

Η εξ. TΦ είναι

$$\frac{2048}{x^{9/2}} + \frac{\sigma(\sigma+1)c}{x^{\sigma+3/2}} = \frac{2048}{x^{9/2}} + \frac{18c}{x^{\sigma+3/2}} \to \sigma(\sigma+1) = 18$$

$\to \sigma = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2}$, δεκτή μόνο η ρίζα με +, αφού $\sigma > 3$

15 Η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου είναι $E_n = \frac{Z^2}{2ma_0^2 n^2}$ με εκφυλισμό $g = 2n^2$

Ορίζουμε αδιάστατη μεταβλητή $\varepsilon_n = \frac{2ma_0^2}{Z^2} E_n = -\frac{1}{n^2}$

$$\Omega(\varepsilon) = \sum_{-\frac{1}{n^2} < \varepsilon} 2n^2 \xrightarrow{\text{συνεχές}} \int_0^{1/\sqrt{|\varepsilon|}} dn\, 2n^2 = \frac{2}{3|\varepsilon|^{3/2}}$$

Για Z ηλεκτρόνια $\Omega(\varepsilon_F) = Z \rightarrow \frac{2}{3|\varepsilon_F|^{3/2}} = Z \rightarrow |\varepsilon_F| = \left(\frac{2}{3Z}\right)^{2/3}$

$$g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = \frac{1}{|\varepsilon|^{5/2}}$$

Άρα $\varepsilon_0 = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, \varepsilon\, d\varepsilon = -\frac{1}{2}|\varepsilon_F|^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3Z}{2}\right)^{1/3} = -(12Z)^{1/3}$

Άρα $E_0 = \frac{Z^2}{2ma_0^2}\varepsilon_0 = -12^{1/3} \frac{1}{2ma_0^2} Z^{7/3}$