Λύσεις Ασκήσεων

25 Απριλίου 2024

Κεφάλαιο 3

3.1 Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x}$, $\frac{x}{\sinh x}$, $\frac{1}{|x|^{1/4}(x^2+1)}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο $\boldsymbol{R}$.

Απάντηση

- Για $\psi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,

$$||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\int_0^{\infty} dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\int_0^1 dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2} + 2\int_1^{\infty} dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Αφού $|\sin x| \leq |x|,\ \displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \int_0^1 dx = 1,$ και

$$|\sin x| \leq 1,\ \int_1^{\infty} dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1,$$

προκύπτει ότι $||\psi||^2 \leq 4$.

- Για $\psi(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$,

$$\begin{aligned} ||\psi||^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{(1-\cos x)^2}{x^2} \\ &= 2\int_0^{\infty} dx\, \frac{(1-\cos x)^2}{x^2} = 2\int_0^1 dx\, \frac{(1-\cos x)^2}{x^2} + \int_1^{\infty} dx\, \frac{(1-\cos x)^2}{x^2}. \end{aligned}$$

Αφού $(1-\cos x) \leq \dfrac{x^2}{2},\ \displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{(1-\cos x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{4}\int_0^1 dx\, x^2 = \frac{1}{12}\,(1-\cos x) \leq 2,$

και $\displaystyle\int_1^{\infty} dx\, \frac{(1-\cos x)^2}{x^2} \leq 4\int_1^{\infty} x^2 dx = 4,$

προκύπτει ότι $||\psi||^2 < \dfrac{1}{6} + 8 = \dfrac{49}{6}$.

- Για $\psi(x) = \dfrac{x}{\sinh x}$,

$$||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x^2}{\sinh^2 x} = 2\int_0^{\infty} dx\, \frac{x^2}{\sinh^2 x} = 2\int_0^1 dx\, \frac{x^2}{\sinh^2 x} + 2\int_1^{\infty} dx\, \frac{x^2}{\sinh^2 x}.$$

Αφού $\dfrac{\sinh x}{x} \geq 1, \;\; \displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{x^2}{\sinh^2 x} < \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Για $x > 1, \;\; \dfrac{\sinh x}{e^x} > \sinh 1 \cdot e^{-1} = 0.43 > \dfrac{1}{3}$, οπότε $\displaystyle\int_1^{\infty} dx\, \frac{x^2}{\sinh^2 x} < 9\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx =$
$9 \cdot \dfrac{5}{4}e^{-2} = \dfrac{45}{4}e^{-2} < 2$. Άρα $||\psi||^2 < \dfrac{2}{3} + 4 = \dfrac{14}{3}$.

- Για $\psi(x) = \dfrac{1}{|x|^{1/4}(x^2+1)}$,

$$||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x^2+1)^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x^2+1)^2} + 2\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x^2+1)^2}.$$

Αφού $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x^2+1)^2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ και $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x^2+1)^2} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{9/2}} = \frac{2}{7}$,

προκύπτει ότι $||\psi||^2 < 4 + \dfrac{4}{7} = \dfrac{32}{7}$. $\square$

3.2 Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^{-2} και $\frac{1}{\sqrt{|x|+1}}$, δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο $\boldsymbol{R}$.

Απάντηση

Για $\psi(x) = x^{-2}$,

$$|||\psi||^2 \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^4} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}.$$

Καθώς $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}$ and $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_0^1 = \infty$, $||\psi||^2 \to \infty$.

Για $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|+1}}$, $\displaystyle ||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} = 2\ln(x+1)\Big|_0^{\infty} = \infty$.

$\square$

3.3 Έστω χώρος Χίλμπερτ $L^2([a,b])$ για $b > a$. Τι συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα a και b ώστε $(\sin x, \cos x) = 0$;

Απάντηση

$(\sin x, \cos x) = \int_a^b dx \sin x \cos x = \frac{1}{4}\left(\cos(2a) - \cos(2b)\right)$.

Οπότε $(\sin x, \cos x) = 0$ συνεπάγεται ότι $\cos(2b) = \cos(2a)$, δηλαδή $b = a + npi$, n θετικός ακέραιος. $\square$

3.4 (α) Αποδείξτε την Εξ. (3.14) από τον τύπο του Ροντρίγκεζ (3.13). (β) Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να αποδείξετε τον τύπο του Ροντρίγκεζ.

Απάντηση

(α) Έστω f_ℓ πολυώνυμο που ικανοποιεί τον τύπο του Rodriguez $f_\ell = \dfrac{1}{2^\ell \ell!}\dfrac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell$.

Υπολογίζουμε

$$(f_\ell, f_{\ell'}) = \frac{1}{(2^\ell \ell!)(2^{\ell'}\ell'!)}\int_{-1}^{1} dx \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \frac{d^{\ell'}}{dx^{\ell'}}(x^2-1)^{\ell'} \, .$$

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες οδηγεί σε συνοριακούς όρους με $\dfrac{d^k}{dx^k}\,(x^2-1)^\ell$ για $k \ll \ell$, οι οποίοι μηδενίζονται στο $x = \pm 1$. Άρα

$$(f_\ell, f_{\ell'}) = \frac{(-1)^{\ell'}}{2^{\ell+\ell'}\ell!\,\ell'!}\int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^{\ell'} \frac{d^{\ell+\ell'}}{dx^{\ell+\ell'}}(x^2-1)^\ell, \text{ για } \ell' > \ell \, .$$

Ολοκληρώσαμε κατά παράγοντες ℓ' φορές. Καθώς το $(x^2-1)^\ell$ είναι πολυώνυμο τάξης 2ℓ, $\ell + \ell'$ διαφορίσεις δίνουν μηδέν, εκτός αν $\ell = \ell'$. Οπότε $(f_\ell, f_{\ell'}) = ||f_\ell||^2 \delta_{\ell\ell'}$.

Βρίσκουμε ότι

$$||f_\ell||^2 = \frac{(-1)^\ell}{2^{2l}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell \, .$$

Ο μόνος μη μηδενικός όρος μετά την παραγώγιση είναι $\dfrac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}\,x^{2\ell} = (2\ell)!$.

Οπότε,

$$||f_\ell||^2 = \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^\ell.$$

Θέτοντας $x = \cos\theta$, βρίσκουμε ότι $||f_\ell||^2 = \dfrac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}\,(\ell!)^2}\displaystyle\int_{-1}^{1} d\theta \, \sin^{2l+1}\theta$.

Υπολογίζουμε το $I_\ell = \displaystyle\int_0^\pi d\theta \sin^{2\ell+1}\theta$ με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$I_\ell = \frac{2\ell}{2\ell+1} I_{\ell-1} \, ,$$

που σημαίνει ότι

$$I_\ell = \frac{(2\ell)(2\ell-2)....2}{(2\ell+1)(2\ell-1)...1} I_0.$$

Καθώς $I_0 = 2$,

$$I_l = \frac{2^{2\ell+1}(\ell!)^2}{(2\ell+1)!} \, .$$

Άρα, $||f_\ell||^2 = \dfrac{2}{2\ell+1}$. Οι συναρτήσεις f_ℓ ικανοποιούν τις συνθήκες κανονικοποίησης των πολυωνύμων Legendre.

(β) Αφού τα πολυώνυμα f_ℓ ορίζουν ορθογώνια πολυωνυμική βάση στο $L^2([-1,1])$, και η μόνη τέτοια βάση δίνεται από τα πολυώνυμα Legendre, τα f_ℓ ταυτίζονται με τα P_ℓ. $\square$

3.5 Το σκεπτικό που εφαρμόζεται στον ορισμό των πολυωνύμων Λεζάντρ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστούν ορθοκανονικές πολυωνυμικές βάσεις και σε άλλους χώρους Χίλμπερτ. (α) Βρείτε τα πρώτα 5 διανύσματα της πολυωνυμικής βάσης στον χώρο Χίλμπερτ $L^2(\boldsymbol{R}, e^{-x^2}dx)$. Αυτά είναι γνωστά πολυώνυμα Ερμίτ. (β) Βρείτε τα πρώτα 3 διανύσματα της πολυωνυμικής βάσης στον χώρο Χίλμπερτ $L^2(\boldsymbol{R}^+, e^{-x}dx)$. Αυτά είναι τα πολυώνυμα Λαγκέρ. (γ) Διαλέξτε έναν κατάλληλο χώρο Χίλμπερτ και κατασκευάστε μία δική σας πολυωνυμική βάση.

Απάντηση

(α) Είναι απλούστερο να θεωρήσουμε ότι τα πολυώνυμα Ψ_n που ορίζουν βάση στο $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2dx})$ έχουν ως συντελεστή της μέγιστης δύναμής τους τη μονάδα. Άρα $\Psi_0(x) = 1$ και $\Psi_1(x) = x + a$. Η συνθήκη $(\Psi_0, \Psi_1) = 0$ δίνει $a = 0$. Παρατηρούμε ότι για άρτιο n παίρνουμε άρτια πολυώνυμα και για περιττό n odd παίρνουμε περιττά πολυώνυμα.

Το επόμενο πολυώνυμο είναι το $\Psi_2(x) = x^2 + a$, για το οποίο

$$(\Psi_0, \Psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}(x^2 + a) = \sqrt{\pi}(\tfrac{1}{2} + a) = 0.$$

Άρα $a = -\frac{1}{2}$. Οπότε, $\Psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$.

Το επόμενο πολυώνυμο είναι το $\Psi_3(x) = x^3 + ax$, για το οποίο

$$(\Psi_1, \Psi_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}(x^4 + ax^2) = \sqrt{\pi}(\tfrac{3}{4} + \tfrac{a}{2}) = 0.$$

Προκύπτει ότι $a = -\frac{3}{2}$. Άρα, $\Psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}a$.

Ακολουθεί το πολυώνυμο $\Psi_4(x) = x^3 + ax^2 + b$, για το οποίο

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \Psi_4) &= 0 \longrightarrow \frac{3}{4} + \frac{a}{2} + b = 0,\\ (\Psi_2, \Psi_4) &= 0 \longrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0,\end{aligned}$$

άρα $a = -3$ and $b = \frac{3}{4}$. Οπότε, $\Psi_4(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$.

(β) Σ' αυτήν την περίπτωση, είναι βολική η συνθήκη $\Psi_n(0) = 1$. Ξεκινάμε με το $\Psi_0(x) = 1$. Θέτουμε $\Psi_1(x) = ax + 1$, οπότε $(\Psi_0, \Psi_1) = 0$, $a + 1 = 0$. Άρα $a = -1$ και $\Psi_1(x) = -x + 1$.

Το επόμενο πολυώνυμο είναι $\Psi_2(x) = ax^2 + bx + 1$. Παίρνουμε,

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \Psi_2) &= 0 \longrightarrow 2a + b + 1 = 0,\\ (\Psi_1, \Psi_2) &= 0 \longrightarrow 4a + b = 0,\end{aligned}$$

άρα $a = \frac{1}{2}$ και $b = -2$. Οπότε, $\Psi_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Ακολουθεί το $\Psi_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, για το οποίο

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \Psi_3) &= 0 \longrightarrow 6a + 2b + c + 1 = 0,\\ (\Psi_1, \Psi_3) &= 0 \longrightarrow 18a + 4b + c = 0,\\ (\Psi_2, \Psi_3) &= 0 \longrightarrow 18a + 2b + 1 = 0.\end{aligned}$$

Άρα $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{4}$ και $c = -4$. Οπότε, $\Psi_3(x) = -\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{5}{2}\,x^2 - 4\,x + 1$. □

3.6 Έστω V ο υπόχωρος του $\boldsymbol{C}^4$ που σαρώνεται από τα διανύσματα $\phi_1 = (0, 1, 1, 2)$ και $\phi_2 = (1, -1, 0, 0)$. Υπολογίστε την προβολή του διανύσματος $\psi = (1, 0, 0, 0)$ στο V.

Απάντηση

Ορίζουμε ορθοκανονική βάση στο V, me διανύσματα $e_1 = \phi_2/||\phi_2|| = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2$ και $e_2 = a\phi_2 + b\phi_1$. Η συνθήκη $(e_1, e_2) = 0$ δίνει $a(\phi_2, \phi_2) + b(\phi_2, \phi_1) = 0$, άρα $b = 2a$. Οπότε $e_2 = a(1, 1, 2, 4)$. Με κανονικοποίηση παίρνουμε $e_2 = \frac{1}{\sqrt{22}}(1, 1, 2, 4)$.

Υπολογίζουμερ $(e_1, \psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $(e_2, \psi) = \frac{1}{\sqrt{22}}$. Οπότε,

$\psi_V = (\psi, e_1)e_1 + (\psi, e_2)e_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{22}(1, 1, 2, 4) = \frac{1}{11}(6, -5, 1, 2)$. □

3.7 Έστω ο χώρος Χίλμπερτ $L^2([0, 1], dx)$ και V ο υπόχωρος που ορίζεται από όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις μέχρι 2ου βαθμού. Υπολογίστε την προβολή της συνάρτησης $f(x) = \sin(\pi x)$ στο V.

Απάντηση

Πρώτα κατασκευάζουμε πολυωνυμική βάση στο $L^2([0, 1], dx)$. Ξεκινάμε με τη συνθήκη $\Psi_n(0) = 1$, και κανονικοποιούμε αργότερα.

Then,

$$\begin{aligned}\Psi_0(x) &= 1,\\ \Psi_1(x) &= ax + 1 : \ (\Psi_0, \Psi_1) = 0 \longrightarrow a = -2 \longrightarrow \Psi_1 = -2x + 1,\\ \Psi_2(x) &= ax^2 + bx + 1 : \begin{cases}(\Psi_0, \Psi_2) = 0 & \longrightarrow \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + 1 = 0\\ (\Psi_1, \Psi_2) = 0 & \longrightarrow a + b = 0\end{cases}, \ a = 6\ , \ b = -6\ .\end{aligned}$$

Άρα $\Psi_2 = 6x^2 - 6x + 1$.

Βρίσκουμε ότι

$$||\Psi_0|| = 1\ , \ ||\Psi_1|| = \frac{1}{\sqrt{3}}\ , \ ||\Psi_2|| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα διανύσματα είναι

$$e_0(x) = \Psi_0(x)\ ,\ e_1(x) = \sqrt{3}\Psi_1(x)\ ,\ e_2(x) = \sqrt{5}\Psi_2(x).$$

For $f(x) = \sin(\pi x)$, υπολογίζουμε $(f, e_0) = \int_0^1 dx \sin(\pi x) = \frac{2}{\pi}$
$(f, e_1) = \sqrt{3} \int_0^1 dx \sin(\pi x)(-2x+1)$ = 0
$(f, e_2) = \sqrt{5} \int_0^1 dx \sin(\pi x)(6x^2 - 6x + 1) = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{24}{\pi^3}\right)$.
Οπότε $f_V(x) = \frac{2}{\pi} + 5\left(\frac{2}{\pi} - \frac{24}{\pi^3}\right)\Psi_2(x)$. $\square$

3.8 Υπολογίστε τον συζυγή του τελεστή $\hat{D}_s\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(x/s)$ στο $L^2(\boldsymbol{R})$.

Απάντηση

$(D_s\psi(x), \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi^*(x)\dfrac{1}{\sqrt{s}}\psi(x/s).$

Θέτουμε $y = x/s$. $(D_s\psi(x), \phi) = \sqrt{s}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \phi^*(ys)\psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\sqrt{s}\phi(ys)\right)^* \psi(y).$

Άραr, $D_s^\dagger\phi = \sqrt{s}\phi(sx)$. $\square$

3.9 Δείξτε ότι αν $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ και ο τελεστής $\hat{A}$ έχει μη εκφυλισμένες ιδιοτιμές, τότε ο $\hat{B}$ είναι συνάρτηση του $\hat{A}$.

Απάντηση

Έστω $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Αν $\hat{A}\phi = a\phi$, τότε, $\hat{A}\hat{B}\phi = \hat{B}\hat{A}\phi = a\hat{B}\phi$. Άρα το $\hat{B}\phi$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{A}$ με ιδιοτιμή a. Αν ο $\hat{A}$ δεν είναι εκφυλισμένος, τότε $\hat{B}\phi \sim \phi$, δηλαδή $\hat{B}\phi = b\phi$. Υπάρχει ένα και μοναδικό b για κάθε a, άρα τα b ορίζονται από μία συνάρτηση $f(a)$. Οπότε, $\hat{B} = \sum_a f(a)|a\rangle\langle a| = f(\hat{A})$. $\square$

3.10 Δείξτε ότι αν δύο αυτοσυζυγείς τελεστές μετατίθενται, τότε μετατίθενται και οι φασματικοί τους προβολείς.

Απάντηση

Δείξαμε ότι αν $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, τότε $[f(\hat{A}), \hat{B}] = 0$, για κάθε συνάρτηση f. Παίρνουμε $f = \chi_U$, όπου χ_U η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $U \subseteq \boldsymbol{R}$. Οπότε, ο $\hat{P} = \chi_U(\hat{A})$ είναι φασματικός προβολέας του $\hat{A}$, και $[\hat{P}, \hat{B}] = 0$. Επαναλαμβάνοντας, $[\hat{P}, f(\hat{B})] = 0$, και με τα ίδια επιχειρήματα $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$, όπου $\hat{Q}$ είναι φασματικός προβολέας του $\hat{B}$. $\square$

3.11 Δείξτε ότι αν δύο θετικοί τελεστές $\hat{A}$ και $\hat{B}$ μετατίθενται, τότε και ο $\hat{A}\hat{B}$ είναι θετικός τελεστής.

Απάντηση

Καθώς $\hat{B} \geq 0$, $\hat{B} = \sqrt{\hat{B}}\sqrt{\hat{B}}$. Επίσης, η σχέση $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ σημαίνει ότι $[\hat{A}, \sqrt{\hat{B}}] = 0$. Άρα

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\sqrt{\hat{B}}\sqrt{\hat{B}} = \sqrt{\hat{B}}\hat{A}\sqrt{\hat{B}}.$$

Οπότε

$$\langle\phi|\hat{A}\hat{B}|\phi\rangle = \langle\phi|\sqrt{\hat{B}}\hat{A}\sqrt{\hat{B}}|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \geq 0,$$

εξ ορισμού, όπουr $|\psi\rangle = \sqrt{\hat{B}}|\phi\rangle$. $\square$

3.12 Έστω a_{max} η μέγιστη και a_{min} η ελάχιστη ιδιοτιμή του $\hat{A} \geq 0$. Δείξτε ότι $a_{max}\hat{I} \geq \hat{A}$ και ότι $a_{min}\hat{A} \leq \hat{A}^2$.

Απάντηση

Έστω $\hat{A} = \sum_n a_n P_n$.

Τότε,

$$a_{max}\hat{I} - \hat{A} = a_{max}\sum_n P_n - \sum_n a_n P_n = \sum_n (a_{max} - a_n)P_n \geq 0,$$

αφού $(a_{max} - a_n) \geq 0$.

Ομοίως,

$$\hat{A}^2 - a_{min}\hat{A} = \sum_n a_n^2 \hat{P}_n - a_{min}\sum_n a_n \hat{P}_n = \sum_n a_n(a_n - a_{min})\hat{P}_n \geq 0,$$

αφού $a_n > 0$ and $(a_n - a_{min}) \geq 0$. $\square$

3.13 Έστω $\hat{P}_1$ και $\hat{P}_2$ προβολικοί τελεστές με αντίστοιχους υπόχωρους V_1 και V_2, πεπερασμένης διάστασης. (α) Δείξτε ότι αν $[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = 0$, τότε ο $\hat{P}_1\hat{P}_2$ είναι προβολικός τελεστής, που προβάλλει στην τομή των V_1 και V_2. (β) Δείξτε ότι αν $\hat{P}_1\hat{P}_2 = 0$, τότε ο $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ είναι προβολικός τελεστής, που προβάλλει στο $V_1 \oplus V_2$. (γ) Δείξτε ότι αν $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_1$, τότε $V_1 \subset V_2$.

Απάντηση

(α) $[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = 0 \longrightarrow \begin{cases} (\hat{P}_1, \hat{P}_2)^\dagger = \hat{P}_2^\dagger \hat{P}_1^\dagger = \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{P}_1\hat{P}_2 \\ (\hat{P}_1\hat{P}_2)^2 = \hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_1^2\hat{P}_2^2 = \hat{P}_1\hat{P}_2 \end{cases}$.

Τότε, $\hat{P}_1\,\hat{P}_2$ είναι προβολικός.

Αν $\hat{P}_1\,\hat{P}_2\,\phi = \phi$, then, $\hat{P}_1^2\,\hat{P}_2\,\phi = \hat{P}_1\,\phi$, and $\hat{P}_1\,\hat{P}_2\,\phi = \hat{P}_1\,\phi$.
Κατά συνέπεια $\hat{P}_1\,\phi = \phi,$ i.e., $\phi \in V_1$.

Ομοίως, δείχνουμε ότι $\phi \in V_2$, άρα $\phi \in V_1 \cap V_2$.

(β) $\hat{P}_1\hat{P}_2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} (\hat{P}_1 + \hat{P}_2)^\dagger = \hat{P}_1^\dagger + \hat{P}_2^\dagger = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 \\ (\hat{P}_1 + \hat{P}_2)^2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 \end{cases}$.

Άρα ο $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ είναι προβολικός. Αφού $\hat{P}_1\hat{P}_2 = 0$, $(P_1P_2)^\dagger = 0$. Άρα $\hat{P}_2\hat{P}_1 = 0$.

Έστω $(\hat{P}_1 + \hat{P}_2)\phi = \phi$. Γράφουμε $\phi = \phi_1 + \phi_1^\perp$, όπου $\phi_1 \in V_1$, $\phi_1^\perp \in V_1^\perp$.
Οπότε,

$$(\hat{P}_1 + \hat{P}_2)(\phi_1 + \phi_1^\perp) = \phi_1 + \phi_1^\perp.$$

Άρα

$$\hat{P}_1\phi_1 + \hat{P}_1\phi_1^{\perp} + \hat{P}_2\phi_1 + \hat{P}_2\phi_1^{\perp} = \phi_1 + 0 + 0 + \phi_1^{\perp} = \phi_1 + \phi_1^{\perp},$$

και $\quad \hat{P}_2\phi_1^{\perp} = \phi_1^{\perp}$, δηλαδή $\phi_1^{\perp} \in V_2,$ Άρα $\phi = \phi_1 + \phi_1^{\perp} \in V_1 \oplus V_2$.

(γ) Έστω $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_1$. Τότε $(\hat{P}_1\hat{P}_2)^{\dagger} = \hat{P}_1^{\dagger}$, δηλαδή $\hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{P}_1$. Έστω $\phi \in V_1$ και $\hat{P}_1\phi = \phi$. Τότε $\hat{P}_2\,\hat{P}_1\,\phi = \hat{P}_2\,\phi$, $\hat{P}_1\,\phi = \hat{P}_2\,\phi$, δηλαδή $\phi = \hat{P}_2\,\phi, \phi \in V_2$. Άρα, αν $\phi \in V_1$, τότε $\phi \in V_2$, που συνεπάγεται ότι $V_1 \subseteq V_2$. r $\quad\square$

3.14 Υπολογίστε τους μεταθέτες $[\hat{x}^3\hat{p}, \hat{x}\hat{p}]$ and $[x^2, [\hat{p}^2, \hat{x}^3]]$.

Απάντηση

$$\begin{aligned}
[\hat{x}^3\hat{p}, \hat{x}\hat{p}] &= \hat{x}^3[\hat{p}, \hat{x}\hat{p}] + [\hat{x}^3, \hat{x}\hat{p}]\hat{p} = \hat{x^3}[\hat{p}, \hat{x}]\hat{p} + \hat{x}[\hat{x}^3, \hat{p}]\hat{p} = \hat{x}^3(-i\hat{I})\hat{p} + \hat{x}(3\hat{x}^2 i)\hat{p} \\
&= 2i\hat{x}^3\hat{p}. \\
[\hat{p}^2, \hat{x}^3] &= \hat{p}[\hat{p}, \hat{x}^3]\hat{p} + [\hat{p}, \hat{x}^3]\hat{p} = \hat{p}(-i3\hat{x}^2) + (-i3\hat{x}^2)\hat{p} = -3i(\hat{p}\hat{x}^2 + \hat{x}^2\hat{p}), \\
[\hat{x}^2, [\hat{p}^2, \hat{x}^3]] &= -3i[\hat{x}^2, \hat{p}\hat{x}^2] - 3i[\hat{x}^2, \hat{x}^2\hat{p}] = -3i[\hat{x}^2, \hat{p}]\hat{x}^2 - 3i[\hat{x}^2, \hat{p}] \\
&= -3i\left[(2i\hat{x})\hat{x}^2 + \hat{x}^2(2i\hat{x})\right] = 12\hat{x}^3. \quad \square
\end{aligned}$$

3.15 Δείξτε ότι κάθε αυτοσυζυγής τελεστής μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο μοναδιαίων τελεστών επί μία σταθερά.

Απάντηση

Έστω $\hat{A}$ αυτοσυζυγής.

Διαιρούμε τον $\hat{A}$ με τη μεγαλύτερη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή a_{max}, ορίζοντας τον τελεστή $\hat{B} = \hat{A}/a_{max}$. Όλες οι ιδιοτιμές του $\hat{B}$ είναι μικρότερες σε απόλυτη τιμή από το 1, οπότε $\hat{B} \leq \hat{I}$.

Ορίζουμε

$$\hat{U}_{\pm} = \hat{B} \pm \sqrt{\hat{I} - \hat{B}^2}.$$

Βρίσκουμε ότι $\hat{U}_{+} = \hat{U}_{-}^{\dagger}$.

Κατόπιν, υπολογίζουμε

$$\hat{U}_{+}^{\dagger}\hat{U}_{+} = \hat{U}_{-}\hat{U}_{+} = \hat{B}^2 + \hat{I} - \hat{B}^2 = \hat{I},$$

και ομοίως $\hat{U}_{-}^{\dagger}\hat{U}_{-} = \hat{I}$.

Άρα οι τελεστές $\hat{U}_{+}$, $\hat{U}_{-}$ είναι μοναδιαίοι, $\hat{B} = \dfrac{1}{2}(\hat{U}_{+} + \hat{U}_{-})$ και $A = \dfrac{a_{max}}{2}(\hat{U}_{+} + \hat{U}_{-}).\quad \square$

3.16 (α) Δείξτε ότι ο τελεστής Λεζάντρ $\hat{\Lambda}$ είναι αυτοσυζυγής. (β) Δείξτε ότι οι μη πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης ιδιοτιμών του $\hat{\Lambda}$ δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Απάντηση

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned}(\hat{\Lambda}\phi,\psi) &= -\int_{-1}^{1} dx\, \psi^* \frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{d\phi}{dx}\Big] \\ &= -\psi^*(x)(1-x^2)\frac{d\phi}{dx}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} dx\, \frac{d\psi^*}{dx}(1-x^2)\frac{d\phi}{dx} \\ &= \frac{d\psi^*}{dx}(1-x^2)\phi\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} dx\, \phi\, \frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{d\psi^*}{dx}\Big] = (\phi,\hat{\Lambda}\psi),\end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος στη δεύτερη και τρίτη ισότητα μηδενίζονται. Άρα $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^\dagger$.

(β) Από την Εξ. (3.34), οι συντελεστές c_n μιας λύσεις $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \psi_\lambda(x)$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση $c_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)} c_n$. Για μεγάλα n, παίρνουμε $c_{n+2} = c_n$, άρα οι λύσεις συμπεριφέρονται ασυμπτωτικά ως $\sum_{n=n_0}^{\infty} x^{2n}$, ή ισοδύναμα $\sum_{n=n_0}^{\infty} x^{2n+1}$, όπου n_0 είναι ένας ακέραιος, τέτοιος ώστε η προσέγγιση $c_{n+2} = c_n$ να είναι καλή για $n > n_0$. Τότε,

$$\psi_\lambda(x) \sim \frac{x^{2n_0}}{1-x^2} \quad \text{or} \quad \frac{x^{2n_0+1}}{1-x^2}.$$

Στις ολοκληρώσεις για τον υπολογισμό του $||\psi_\lambda||^2$, συναντάμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-1}^{1} dx \frac{f(x)}{(1-x^2)^2}$, για συναρτήσεις $f(x)$ που είναι πεπερασμένες στο $x = \pm 1$. Αυτά τα ολοκληρώματα αποκλίνουν, άρα

$$||\psi_\lambda||^2 \to \infty\,. \quad \square$$

3.17 Έστω απειροδιάστατος χώρος Χίλμπερτ $\mathcal{H}$ με ορθοκανονική βάση $|n\rangle$, για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε τον τελεστή $\hat{S}$, ως $\hat{S}|n\rangle = |n+1\rangle$. Βρείτε τον συζυγή του. Είναι ο $\hat{S}$ μοναδιαίος;

Απάντηση

Για την απόδειξη, δε θα χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό Ντιράκ. Γράφουμε τα διανύσματα βάσης $|n\rangle$ ως e_n. Εξ' ορισμού $(\hat{V}^\dagger e_n, e_m) = (e_n, \hat{V} e_m) = (e_n, e_{m+1}) = \delta_{n,m+1} = \delta_{n-1,m}$. Για $n = 0$, $\hat{V}^\dagger e_0 = 0$, αφού $\delta_{0,m+1} = 0$ για κάθε $m > 0$. Για $n > 0$, $\hat{V}^\dagger e_n = e_{n-1}$.

Άρα $\hat{V}^\dagger \hat{V} e_n = e_n$, για κάθε n; και $\hat{V}^\dagger \hat{V} = \hat{I}$. Ωστόσο, ο $\hat{V}$ δεν είναι μοναδιαίος γιατί $\hat{V}\hat{V}^\dagger e_n = e_n$ μόνο για $n > 0$. Για $n = 0$, $\hat{V}\hat{V}^\dagger e_0 = 0$. Άρα, $\hat{V}\hat{V}^\dagger = \hat{I} - \hat{P}_0$, όπου $\hat{P}_0$ είναι ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί στο διάνυσμα e_0.

3.18 Για κάθε κατανομή ω στο $\boldsymbol{R}$, ορίζουμε την παράγωγο ω' ως $\omega'(f) = -\omega(f')$, για κάθε λεία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f. (α) Δείξτε ότι αν η κατανομή αντιστοιχεί σε συνήθη συνάρτηση, αυτός ο ορισμός ταυτίζεται με τον καθιερωμένο. (β) Γράψτε τις εξισώσεις ορισμού της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης δέλτα. (γ) Υπολογίστε τις ποσότητες $\delta'(x^2-1)$ και $\delta''(x^2-1)$.

Απάντηση

(α) Έστω $\omega(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x) f(x)$.

Τότε,

$$\begin{aligned}\omega'(f) &= -\omega(f') = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho(x) f'(x) = -\rho(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho'(x) f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho'(x) f(x).\end{aligned}$$

Άρα η κατανομή ω' ορίζεται μέσω της παραγώγου ρ'.

(β) Για δ': $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x)f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x)f'(x) = -f(0)$.

Για δ'': $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta''(x)f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x)f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x)f''(x) = f''(0)$.

(γ)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x^2-1) &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x^2-1)f'(x) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-1)f'(x) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x+1)f'(x) \\ &= -\frac{1}{2}f'(1) - \frac{1}{2}f'(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \big[\delta'(x-1)+\delta'(x+1)\big].\end{aligned}$$

Άρα, $\delta'(x^2-1) = \frac{1}{2}\delta'(x-1) + \frac{1}{2}\delta'(x+1)$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\delta''(x^2-1) = \frac{1}{2}\delta''(x-1) + \frac{1}{2}\delta''(x+1)$.

$\square$

3.19 Έστω $|p\rangle$ και $|x\rangle$ τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα των τελεστών ορμής $\hat{p}$ και θέσης $\hat{x}$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι

1. $\langle p|\hat{p}|x\rangle = \frac{p}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx}$.
2. $\langle p_1|\hat{x}|p_2\rangle = i\delta'(p_1-p_2)$, όπου ο τόνος δηλώνει παράγωγο.
3. $\langle p|\hat{x}\hat{p}|x\rangle = \frac{px+i}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx}$.

Απάντηση

(1) $\langle p|\hat{p}|x\rangle = p\langle p|x\rangle = \dfrac{p}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx}$.

(2) $\langle p_1|\hat{x}|p_2\rangle = \int dx\ x\langle p_1|x\rangle\langle x|p_2\rangle = \int dx\ \dfrac{dx}{2\pi}\ x\ e^{i(p_2-p_1)x}$.

Βλέπουμε ότι $\int dx\ x\ e^{i\xi x} = -i\dfrac{\partial}{\partial\xi}\int dx\ e^{i\xi x} = -2\pi\delta'(\xi)$.

Άρα,

$$\langle p_1|\hat{x}|p_2\rangle = -i\delta'(p_2-p_1).$$

(3) $\langle p|\hat{x}\hat{p}|x\rangle = \langle p|(\hat{p}\hat{x}+i\hat{I})|x\rangle = px\langle p|x\rangle + i\langle p|x\rangle = \dfrac{px+i}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx}$. $\square$

Κεφάλαιο 4

4.1 Σύστημα προετοιμάζεται σε κατάσταση $\hat{\rho}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και πάνω του γίνεται μέτρηση που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A}=\epsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, όπου $\epsilon>0$. Ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες;

Απάντηση

$$\hat{A}=\epsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+3\,\epsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\epsilon\,\hat{P}_{\epsilon}+3\,\epsilon\,\hat{P}_{3\epsilon}.$$

Τα πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης είναι ϵ and $3\,\epsilon$, με πιθανότητες

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\epsilon) &= Tr\big(\hat{\rho}\hat{P}_{\epsilon}\big)=\frac{1}{4}\,Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{3}{4}\,, \\ \text{Prob}(3\epsilon) &= 1-\text{Prob}(\epsilon)=\frac{1}{4}.\ \square \end{aligned}$$

4.2 Βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η μήτρα πυκνότητας

$$\hat{\rho}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} \alpha & -i & \beta & i \\ i & 1 & 2i & -1 \\ \beta & -2i & 2\beta & 2i \\ -i & -1 & -2i & \alpha \end{pmatrix}$$

αντιστοιχεί σε καθαρή κατάσταση.

Απάντηση

Η συνθήκη θετικότητας για τη μήτρα πυκνότητας σημαίνει ότι $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$.
Απαιτώντας κανονικοποίηση, $Tr\hat{\rho}=1$, παίρνουμε $\frac{1}{7}(2\alpha+2\beta+1)=1$.

Άρα $\alpha+\beta=3$. (I)

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το κριτήριο καθαρότητας, $Tr\hat{\rho}^2=1$,

$$Tr\hat{\rho}^2 = \frac{1}{49}\,Tr\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+2 & & & \\ & 7 & & \\ & & 5\beta^2+8 & \\ & & & \alpha^2+6 \end{pmatrix}=\frac{1}{49}(2\alpha^2+\beta^2+23)=1.$$

Οπότε,

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 13.$$

Από την Εξ.(I), παίρνουμε

$$(3-\beta)^2 + 3\beta^2 = 13\,.$$

Άρα

$$2\beta^2 - 3\beta - 2 = 0\ ,\ \text{i.e.,}\ \ \beta = 2, -1/2.$$

Η λύση $-1/2$ είναι μη αποδεκτή, λόγω της συνθήκης θετικότητας. Άρα, $\beta = 2$ and $\alpha = 1$. $\square$

4.3 Έχουμε μία πηγή μικροσκοπικών συστημάτων που περιγράφονται από τον χώρο Χίλμπερτ $\boldsymbol{C}^3$ (σωμάτια με σπιν 1). Σ' αυτά τα συστήματα γίνονται μετρήσεις που αντιστοιχούν στους τελεστές

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ύστερα από μια σειρά μετρήσεων βρίσκουμε ότι $\langle \hat{J}_1 \rangle = \langle \hat{J}_2 \rangle = 0$, ενώ $\langle \hat{J}_3 \rangle = a$. (α) Βρείτε όλες τις καταστάσεις που είναι συμβατές με την παραπάνω πληροφορία αν $a = 1$. (β) Ποιες από τις παραπάνω καταστάσεις είναι καθαρές; (γ) Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για $a = 0$.ρ

Απάντηση

(α) Η γενικότερη έκφραση για μια μήτρα πυκνότητας στο $\mathbb{C}^3$ είναι

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha^* & y & \gamma \\ \beta^* & \gamma^* & z \end{pmatrix},$$

όπου $x, y, z \geq 0,\ x + y + z = 1,\ |\alpha| \leq \sqrt{xy},\ |\beta| \leq xz,\ |\gamma| \leq yz.$

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_1 \rangle &= 0 \longrightarrow Tr(\hat{\rho}\hat{J}_1) = 0 \longrightarrow \alpha + \alpha^* + \gamma + \gamma^* = 0 \to \text{Re}(\alpha + \gamma) = 0\,. \\ \langle \hat{J}_2 \rangle &= 0 \longrightarrow Tr(\hat{\rho}\hat{J}_2) = 0 \longrightarrow i(-\alpha + \alpha^* - \gamma + \gamma^*) = 0 \to \text{Im}(a + \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Παίρνουμε $\alpha + \gamma = 0$.

Άρα,

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha^* & y & -\alpha \\ \beta^* & -\alpha^* & z \end{pmatrix}.$$

$$\langle \hat{J}_3 \rangle = 1 \longrightarrow Tr(\hat{\rho}\hat{J}_3) = 1 \longrightarrow x - z = 1 \to x = z + 1.$$

Καθώς $0 \leq x, y, z \leq 1$, η παραπάνω εξίσωση ισχύει αν $z = 0$, στην οποία περίπτωση $x = 1$ and $y = 0$.

Αλλά τότε, $\alpha = \beta = 0$ and $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(β) Η $\hat{\rho}$ που υπολογίστηκε παραπάνω είναι καθαρή.

(γ) $\langle \hat{J}_3 \rangle = 0 \ \longrightarrow \ x - z = 0 \ \longrightarrow y = 1 - 2x\,.$

Επίσης, $|a| \leq \sqrt{x(1-2x)}$, $|\beta| \leq x$.
Οπότε

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha^* & i - 2x & -\alpha \\ \beta^* & -\alpha^* & x \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε

$$Tr\hat{\rho}^2 = 2x^2 + 4|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + (1-2x)^2.$$

Η συνθήκη $Tr\hat{\rho}^2 = 1$ σημαίνει ότι

$$3x^2 - 2x + 2|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0. \quad (A)$$

Οπότε, $|\beta|^2 = 2x - 3x^2 - 2|a|^2$. Η συνθήκη $|\beta|^2 \leq x^2$ σημαίνει ότι $|\alpha|^2 \geq x(1-2x)$. Αλλά επίσης $|\alpha|^2 \leq x(1-2x)$. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν

$$|\alpha|^2 = x(1-2x).$$

Από την Εξ. (A), $x^2 + |\beta|^2 = 0$, οπότε $x = \beta = 0$.
Η μόνη καθαρη κατάσταση είναι η

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \ \square$$

4.5 Θεωρήστε την Γκαουσιανή κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$ exp$[-\frac{(1+ir)(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ip_0x]$, όπου σ, r, x_0, p_0 σταθερές. (α) Δείξτε ότι $\langle \hat{x} \rangle = x_0$ και $\langle \hat{p} \rangle = p_0$. (β) Υπολογίστε τις τυπικές αποκλίσεις $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$ και τη σύζευξη C_{xp}. (γ) Για ποιες τιμές των παραμέτρων επιτυγχάνεται το κάτω όριο στην Εξ. (4.50); (δ) Υπολογίστε την ποσότητα $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 - C_{xp}^2$ και συγκρίνετε με το κάτω όριο της Εξ. (4.49).

Απάντηση

(α) $\langle \hat{x} \rangle = \int dx x |\psi(x)|^2 = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int dx x$ exp$[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}] = x_0$
$\langle \hat{p} \rangle = -i \int dx \psi^*(x)\psi'(x) = -i \int dx \left(-\frac{1+ir}{2\sigma^2}(x-x_0) + ip_0\right) |\psi(x)|^2 = p_0$.

(β) Για να βρούμε τις τυπικές αποκλίσεις και τη σύζευξη αρκεί να κάνουμε τους υπολογισμούς με $x_0 = 0$ και $p_0 = 0$.
Οπότε $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle = \int dx x^2 |\psi(x)|^2 = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int dx x^2$ exp$[-\frac{x^2}{2\sigma^2}] = \sigma^2$
$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle = -\int dx \psi^*(x)\psi''(x) = \int dx |\psi'(x)|^2 = \int dx \frac{1+r^2}{4\sigma^4} x^2 |\psi(x)|^2 = \frac{1+r^2}{4\sigma^4} \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{1+r^2}{4\sigma^2}$.
$C_{xp} = \frac{1}{2}\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle = -i \int dx (x\psi^*(x)\psi'(x) + |\psi(x)|^2) = \frac{-i}{2} + i\frac{1+ir}{2\sigma^2}\langle \hat{x}^2 \rangle = -\frac{r}{2}$.

(β) $(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{2}$ μόνο αν $r = 0$.

(γ) Υπολογίζουμε $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 - C_{xp}^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή επιτυγχάνεται το κάτω όριο της (4.49). $\square$

4.6 Ελεύθερο σωμάτιο μάζας m περιγράφεται από την Γκαουσιανή κυματοσυνάρτηση της παραπάνω άσκησης. Υπολογίστε την τυπική απόκλιση της Χαμιλτονιανής $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2$ και τη σύζευξη C_{xH}.

Απάντηση

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}\rangle &= -\frac{1}{2m}\int dx\, \psi^*(x)\psi''(x) = \frac{1}{2m}\int dx\, |\psi'(x)|^2.\\ \langle \hat{H}^2\rangle &= \frac{1}{4m^2}\int dx\, \psi^*(x)\psi''''(x) = \frac{1}{4m^2}\int dx\, |\psi''(x)|^2.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \Big[-\frac{(1+ir)(x-x_0)}{2\sigma^2} + ip_0\Big]\psi(x),\\ \psi''(x) &= \Big[-\frac{(1+ir)}{2\sigma^2} + \big[-\frac{(1+ir)}{2\sigma^2}(x-x_0) + ip_0\big]^2\Big]\psi(x).\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\langle \hat{H}\rangle = \frac{1}{2m}\int dx\, \Big[p_0^2 + \frac{1+r^2}{4\sigma^4}(x-x_0)^2\Big]|\psi(x)|^2 = \frac{1}{2m}\Big(p_0^2 + \frac{1+r^2}{4\sigma^2}\Big).$$

Επίσης υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}^2\rangle &= \frac{1}{4m^2}\int dx\Big[-\Big(\frac{1+ir}{2\sigma^2}+p_0^2\Big) - \frac{(1+ir)^2}{4\sigma^4}(x-x_0)^2 - \frac{(1+ir)}{\sigma^2}p_0(x-x_0)\Big]^2|\psi(x)|^2\\ &= \frac{1}{4m^2}\int dx\Big[p_0^4 + \frac{p_0^2}{\sigma^2} + \frac{1+r^2}{4\sigma^4} + \frac{(1+r^2)^2}{16\sigma^8}(x-x_0)^4 + \frac{1+3r^2}{2\sigma^4}p_0^2(x-x_0)^2\\ &\qquad - \frac{1+r^2}{4\sigma^6}(x-x_0)^2\Big]|\psi(x)|^2\\ &= \frac{1}{4m^2}\Big(p_0^4 + \frac{3}{2}\,\frac{p_0^2}{\sigma^2}\,(1+r^2) + \frac{(1+r^2)^2}{16\sigma^4}\Big).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}(\Delta H)^2 &= \frac{p_0}{4m^2\sigma^2}(1+r^2),\\ C_{xH} &= \frac{1}{2}\langle \hat{x}\hat{H} + \hat{x}\hat{H}\rangle - \langle \hat{H}\rangle\langle \hat{x}\rangle = \mathrm{Re}\langle\big(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle\big)\hat{H}\rangle.\end{aligned}$$

Καθώς $\langle \hat{x}\rangle = x_0$,

$$\begin{aligned}\langle\big(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle\big)\hat{H}\rangle &= -\frac{1}{2m}\int dx\,(x-x_0)\psi''(x)\psi^*(x) = \frac{1}{2m}\int dx\,\Big[\frac{1+ir}{\sigma^2}\,p_0(x-x_0)^2\Big]|\psi(x)|^2,\\ \langle\big(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle\big)\hat{H}\rangle &= \frac{1}{2m}\,\frac{(1+ir)}{\sigma^2}\,p_0\,\sigma^2 = \frac{1+ir}{2m}\,p_0.\end{aligned}$$

Άρα,

$$C_{xH} = \frac{p_0}{2m}. \quad \square$$

4.7 Υπολογίστε τις τυπικές αποκλίσεις Δx και Δp για $\psi_0(x) = \sqrt{\gamma}e^{-\gamma|x|}$.

Answer

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{x} \rangle &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, e^{-2\gamma|x|} = 0\,. \\
\langle \hat{x}^2 \rangle &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, e^{-2\gamma|x|} = 2\gamma \int_0^{\infty} dx\, x^2\, e^{-2\gamma x} = \frac{1}{2\gamma^2}\,.
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Φουριέ της $\psi_0(x)$,

$$
\widetilde{\psi}_0(p) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ipx-\gamma|x|} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} dx\, \cos(px) e^{-\gamma x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma^{3/2}\, \frac{1}{\gamma^2+p^2}.
$$

Παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{p} \rangle &= \frac{2}{\pi}\gamma^3 \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{p}{(\gamma^2+p^2)^2} = 0\,, \\
\langle \hat{p}^2 \rangle &= \frac{2}{\pi}\gamma^3 \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{p^2}{(\gamma^2+p^2)^2} = \frac{2}{\pi}\gamma^3 \frac{\pi}{2\gamma} = \gamma^2\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \qquad \square
$$

4.8 Έστω κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από τον χώρο Χίλμπερτ $\boldsymbol{C}^3$. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος έχει ιδιοδιανύσματα $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $E_1 = 0, E_2 = \omega, E_3 = 3\omega$, όπου $\omega > 0$. Το σύστημα προετοιμάζεται αρχικά ($t = 0$) σε μία κατάσταση

$$
\hat{\rho}_0 = \frac{2}{3}|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| + \frac{1}{3}|\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|,
$$

όπου $|\alpha_\pm\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle \pm \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle)$. Μετά από χρόνο t γίνεται μέτρηση που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A} = k|\alpha_+\rangle\langle a_+| - k|\alpha_-\rangle\langle a_-|$, όπου $k > 0$. Ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες;

Απάντηση

Στη βάση που ορίζουν τα $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$,

$$
\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega \end{pmatrix}, \ e^{-i\hat{H}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3i\omega t} \end{pmatrix}, \ |\alpha_\pm\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_0 &= \frac{2}{3}|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| + \frac{1}{3}|\alpha_-\rangle\langle\alpha_-| \\
&= \frac{2}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 3 \\ \sqrt{2} & 6 & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης είναι

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= e^{-i\hat{H}t}\hat{\rho}_0 e^{i\hat{H}t} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3i\omega t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 3 \\ \sqrt{2} & 6 & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3i\omega t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2}\,e^{i\omega t} & 3\,e^{3i\omega t} \\ \sqrt{2}\,e^{-i\omega t} & 6 & \sqrt{2}\,e^{2i\omega t} \\ 3\,e^{-i\omega t} & \sqrt{2}\,e^{-2i\omega t} & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Οι δυνατές τιμές του $\hat{A}$ είναι: k με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $|\alpha_+\rangle$, $-k$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $|\alpha_-\rangle$, και 0 με ιδιοδιάνυσμα $|\alpha_0\rangle$ που ικανοποιεί$\langle\alpha_0|\alpha_+\rangle = \langle\alpha_0|\alpha_-\rangle = 0$.

Οι πιθανότητες την χρονική στιγμή t είναι

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(k,t) &= \langle\alpha_+|\hat{\rho}(t)|\alpha_+\rangle = \frac{3}{8} + \frac{1}{12}\cos(\omega t) + \frac{1}{8}\cos(3\omega t) + \frac{1}{12}\cos(2\omega t), \\
\text{Prob}(-k,t) &= \langle\alpha_-|\hat{\rho}(t)|\alpha_-\rangle = \frac{3}{8} - \frac{1}{12}\cos(\omega t) + \frac{1}{8}\cos(3\omega t) - \frac{1}{12}\cos(2\omega t), \\
\text{Prob}(0,t) &= 1 - \text{Prob}(k,t) - \text{Prob}(-k,t) = \frac{1}{4}\big(1-\cos(3\omega t)\big). \quad \square
\end{aligned}$$

□

4.9 Έστω μία ορθοκανονική βάση στο $\boldsymbol{C}^3$ με ιδιοδιανύσματα $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$. Σύστημα προετοιμάζεται στην κατάσταση $|1\rangle$ και γίνονται διαδοχικές μετρήσεις του τελεστή $\hat{A} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ και του τελεστή $\hat{B} = -|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|$. Υπολογίστε τις από κοινού πιθανότητες. Στη συνέχεια επαναλάβετε τον υπολογισμό για την αντίστροφη σειρά μετρήσεων.

Απάντηση

Ο τελεστής $\hat{A}$ γράφεται ως $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε με τον συνήθη τρόπο τις ιδιοτιμές $1, -1, 0$ και βρίσκουμε τους αντίστοιχους προβολικούς τελεστές

$$\hat{P}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{P}_{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως ο τελεστής $\hat{B} = -|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|$ γράφεται ως $\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές $1, -1, 0$ και βρίσκουμε τους αντίστοιχους προβολικούς τελεστές

$$\hat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{Q}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε άμεσα τις πιθανότητες Prob$(a_i, b_j) = \langle 1|\hat{P}_i\hat{Q}_j\hat{P}_i|1\rangle$ και βρίσκουμε

Prob$(1,1)=0$ Prob$(1,-1)=\frac{1}{4}$ Prob$(1,0)=\frac{1}{4}$ Prob$(-1,1)=0$ Prob$(-1,-1)=\frac{1}{4}$ Prob$(-1,0)=\frac{1}{4}$ Prob$(0,1)=0$ Prob$(0,-1)=0$ Prob$(0,0)=0$.

Με την αντίστροφη σειρά, οι πιθανότητας είναι Prob$(b_i,a_j)=\langle 1|\hat{Q}_i\hat{P}_j\hat{Q}_i|1\rangle$ και βρίσκουμε

Prob$(1,1)=0$ Prob$(1,-1)=0$ Prob$(1,0)=0$ Prob$(-1,1)=\frac{1}{2}$ Prob$(-1,-1)=\frac{1}{2}$ Prob$(-1,0)=0$ Prob$(0,1)=0$ Prob$(0,-1)=0$ Prob$(0,0)=0$. $\square$

4.10 Θεωρούμε το σύστημα της προηγούμενης άσκησης, αλλά με διαφορετικές μετρητικές συσκευές. Η πρώτη μετρητική συσκευή έχει μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών, που δίνει 60% πιθανότητα να γίνει μέτρηση του τελεστή $\hat{A}$ και 40% πιθανότητα να μη γίνει καμία μέτρηση. Η δεύτερη συσκευή μετράει το $\hat{B}$. Ποια η αναμενόμενη τιμή $\langle B\rangle$, αν η αρχική κατάσταση είναι η $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle+|2\rangle+|3\rangle)$;

Απάντηση

Έστω ότι η πρώτη συσκευή μετράει την $\hat{A}$. Τότε, οι πιθανότητες που αφορούν τις τιμές της $\hat{B}$, είναι Prob$(b_j)=\sum_i$ Prob(a_i,b_j), άρα

Prob$(1)=0+0+0=0$ Prob$(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=\frac{1}{2}$ Prob$(0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=\frac{1}{2}$.

Οπότε $\langle\hat{B}\rangle=0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 0=-\frac{1}{2}$.

Αν η πρώτη συσκευή δεν μετρά τίποτε, τότε Prob$(b_j)=\langle 1|\hat{Q}_j|1\rangle$, και βρίσκουμε Prob$(1)=$ Prob$(0)=0$, Prob$(-1)=1$.

Οπότε $\langle\hat{B}\rangle=0\cdot 1+1\cdot(-1)+0\cdot 0=-1$.

Άρα συνολικά $\langle\hat{B}\rangle=0,6\cdot(-\frac{1}{2})+0,4\cdot(-1)=-0,7$.
$\square$

(**4.11**) Θεωρήστε ένα διμερές σύστημα που περιγράφεται από έναν χώρο Χίλμπερτ $\boldsymbol{C}^3\otimes\boldsymbol{C}^3$. Έστω ότι τα διανύσματα $|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle$ ορίζουν μία ορθοκανονική βάση στο $\boldsymbol{C}^3$. Το σύστημα προετοιμάζεται στην κατάσταση $|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|1,1\rangle+|2,2\rangle+e^{i\theta}|3,3\rangle$. Υπολογίστε την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας για το πρώτο υποσύστημα, καθώς και το μέτρο εναγκαλισμού E.

Απάντηση

Υπολογίζουμε $\langle 1|\hat{\rho}_1|1\rangle=\langle 1,1|\Psi\rangle\langle\Psi|1,1\rangle+\langle 1,2|\Psi\rangle\langle\Psi|1,2\rangle+\langle 1,3|\Psi\rangle\langle\Psi|1,3\rangle=\frac{1}{3}$

$\langle 2|\hat{\rho}_1|2\rangle=\langle 2,1|\Psi\rangle\langle\Psi|2,1\rangle+\langle 2,2|\Psi\rangle\langle\Psi|2,2\rangle+\langle 2,3|\Psi\rangle\langle\Psi|2,3\rangle=\frac{1}{3}$

$\langle 3|\hat{\rho}_1|3\rangle=\langle 3,1|\Psi\rangle\langle\Psi|3,1\rangle+\langle 3,2|\Psi\rangle\langle\Psi|3,2\rangle+\langle 3,3|\Psi\rangle\langle\Psi|3,3\rangle=\frac{1}{3}$

$\langle 1|\hat{\rho}_1|2\rangle=\langle 1,1|\Psi\rangle\langle\Psi|2,1\rangle+\langle 1,2|\Psi\rangle\langle\Psi|2,2\rangle+\langle 1,3|\Psi\rangle\langle\Psi|2,3\rangle=0$

$\langle 2|\hat{\rho}_1|3\rangle=\langle 2,1|\Psi\rangle\langle\Psi|3,1\rangle+\langle 2,2|\Psi\rangle\langle\Psi|3,2\rangle+\langle 2,3|\Psi\rangle\langle\Psi|3,3\rangle=0$

$\langle 1|\hat{\rho}_1|3\rangle=\langle 1,1|\Psi\rangle\langle\Psi|3,1\rangle+\langle 1,2|\Psi\rangle\langle\Psi|3,2\rangle+\langle 1,3|\Psi\rangle\langle\Psi|3,3\rangle=0$.

Άρα $\hat{\rho}_1=\frac{1}{3}\hat{I}$, οπότε $Tr\hat{\rho}_1^2=3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$. Οπότε $E=`1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. $\square$

Κεφάλαιο 5

5.1 Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές των τελεστών $\hat{\sigma}_+$ και $\hat{\sigma}_-$ στο $\boldsymbol{C}^2$.

Απάντηση

(i) Γράφουμε $|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$. Οπότε η εξίσωση ιδιοτιμών $\hat{\sigma}_+|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ γίνεται $b|1\rangle = \lambda a|1\rangle + \lambda b|0\rangle$, που σημαίνει ότι $b = \lambda a$ και $\lambda b = 0$. Αν $\lambda = 0$, τότε και $b = 0$. Οπότε το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα είναι το $|1\rangle$ με ιδιοτιμή 0.

Ομοίως, το $\hat{\sigma}_-$ έχει ως μοναδικό ιδιοδιάνυσμα το $|0\rangle$ με ιδιοτιμή 0. $\square$

5.2 Βρείτε τον γενικότερο τελεστή στο $\boldsymbol{C}^2$ που είναι και αυτοσυζυγής και μοναδιαίος.

Απάντηση

Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $\hat{A}$ ικανοποιεί $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, και είναι μοναδιαίος

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{I}, \quad \text{αν} \;\; \hat{A}^2 = \hat{I}\,.$$

Γράφουμε

$$\hat{A} = a_0\,\hat{I} + (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,.$$

Άρα

$$\hat{A}^2 = a_0^2\,\hat{I} + (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 + 2a_0\,(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (a_0^2 + \mathbf{a}^2)\,\hat{I} + 2a_0\,(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,.$$

Η συνθήκη $\hat{A}^2 = \hat{I}$ σημαίνει είτε ότι $\mathbf{a} = 0$, οπότε $a_0^2 = 1$, δηλαδή, $a = \pm 1$, είτε $a_0 = 0$ και $\mathbf{a}^2 = 1$. Οπότε οι τελεστές που είναι και αυτοσυζυγείς και μοναδιαίοι ειναι οι $\pm\hat{I}$ και οι$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ με $|\mathbf{a}| = 1$. $\square$

5.3 Δείξτε ότι για οποιονδήποτε τελεστή $\hat{A}$ στο $\boldsymbol{C}^2$,

$$\sum_{i=1}^{3}\hat{\sigma}_i\hat{A}\hat{\sigma}_i = -\hat{A} + (Tr\hat{A})\hat{I}. \tag{1}$$

Απάντηση

Έστω $\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_1 \quad \hat{A}\,\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2\,\hat{A}\,\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3\,\hat{A}\,\hat{\sigma}_3 \\
=&\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
+&\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
=&\ \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+a & -b \\ -c & 2d+a \end{pmatrix} \\
=&\ \begin{pmatrix} 2d+2a & 0 \\ 0 & 2d+2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2(a+d)\hat{I} - \hat{A} = \big(Tr\hat{A}\big)\hat{I} - \hat{A}. \quad \square
\end{aligned}$$

5.4 Έστω κιούμπιτ με Χαμιλτονιανή $\hat{H} = \omega \hat{\sigma}_3$, όπου $\omega > 0$, που προετοιμάζεται σε αρχική κατάσταση $\hat{\rho}_0$ ($t = 0$). Αν τη χρονική στιγμή t γίνει μέτρηση της ποσότητας $\hat{A} = \sigma_1$, ποιες είναι οι πιθανότητες για τα αποτελέσματα της μέτρησης; Θεωρήστε το γενικότερο δυνατό $\hat{\rho}_0$.

Απάντηση Γράφουμε την αρχική κατάσταση ως

$$\hat{\rho}_0 \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_3 & n_1 - i\,n_2 \\ n_1 + i\,n_2 & 1-n_3 \end{pmatrix},$$

Η Χαμιλτονιανή και ο τελεστής χρονικής εξέλιξης για το σύστημα είναι, αντίστοιχα,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}, \quad e^{-i\,\hat{H}t} = \begin{pmatrix} e^{-i\,\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\,\omega t} \end{pmatrix}.$$

Η αρχική κατάσταση εξελίσσεται ως

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) \;&=\; \begin{pmatrix} e^{-i\,\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\,\omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_3 & n_1 - i\,n_2 \\ n_1 + i\,n_2 & 1-n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\,\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\omega t} \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_3 & (n_1 - i\,n_2)\,e^{-i\,2\omega t} \\ (n_1 + i\,n_2)\,e^{i\,2\omega t} & 1-n_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Οι φασματικοί προβολείς του $\hat{\sigma}_1$ είναι

$$\hat{P}_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathsf{Prob}(+1,t) \;&=\; \frac{1}{4}\,Tr\begin{pmatrix} 1+n_3 & (n_1 - i\,n_2)\,e^{-i\,2\omega t} \\ (n_1 + i\,n_2)\,e^{i\,2\omega t} & 1-n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{2}\big(1 + n_1 \cos(2\omega t) + n_2 \sin(2\omega t)\big), \\ \mathsf{Prob}(-1,t) \;&=\; 1 - \mathsf{Prob}(+,t) = \frac{1}{2}\big(1 - n_1\cos(2\omega t) - n_2 \sin(2\omega t)\big). \quad \square \end{aligned}$$

5.5 Κιούμπιτ προετοιμάζεται στην κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$ και υπόκειται σε διαδοχικές μετρήσεις του $\hat{\sigma}_1$ και του $\hat{\sigma}_2$. Υπολογίστε τις από κοινού πιθανότητες. Στη συνέχεια επαναλάβετε τον υπολογισμό για την αντίστροφη σειρά μετρήσεων.

Απάντηση

Η αρχική κατασταση είναι $|\psi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Οι φασματικοί προβολείς για την πρώτη μέτρηση είναι

$$\hat{P}_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

The spectral projectors for the second measurement are

$$\hat{Q}_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \; \hat{Q}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι από κοινού πιθανότητες είναι

$$\begin{aligned} \text{Prob}(+,+) &= \psi|\hat{P}_+\hat{Q}_+\hat{P}_+|\psi\rangle = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} = \text{Prob}(+,-) = \psi|\hat{P}_+\hat{Q}_-\hat{P}_+|\psi\rangle = \text{Prob}(-,+) = \psi|\hat{P}_-\hat{Q}_+\hat{P}_-|\psi\rangle. \\ &\quad = \text{Prob}(-,-) = \psi|\hat{P}_-\hat{Q}_-\hat{P}_-|\psi\rangle. \end{aligned}$$

Αν αντιστρέψουμε τις μετρήσεις, παρατηρούμε ότι $\hat{Q}_+|\psi\rangle = 0$ και $\hat{Q}_-|\psi\rangle = |\psi\rangle$.

Άρα

$$\begin{aligned} \text{Prob}(+,+) &= \langle\psi|\hat{Q}_+\hat{P}_+\hat{Q}_+|\psi\rangle = 0 = \text{Prob}(+,-) = \langle\psi|\hat{Q}_+\hat{P}_-\hat{Q}_+|\psi\rangle, \\ \text{Prob}(-,+) &= \langle\psi|\hat{Q}_-\hat{P}_+\hat{Q}_-|\psi\rangle = \frac{1}{2} = \text{Prob}(-,-) = \langle\psi|\hat{Q}_-\hat{P}_-\hat{Q}_-|\psi\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

5.7 Έστω κιούμπιτ που χαρακτηρίζεται από Χαμιλτονιανή $\hat{H} = \omega\hat{\sigma}_1$. Τη χρονική $t = 0$ βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle$ που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή της $\hat{H}$ και γίνεται μέτρηση που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A} = \hat{\sigma}_3$. Γίνεται και δεύτερη μέτρηση που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A}$ την χρονική στιγμή t. (α) Γράψτε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στα από κοινού αποτελέσματα των δύο μετρήσεων. (β) Θεωρήστε ότι κάνουμε την ύστερη επιλογή να κρατήσουμε μόνο τα αποτελέσματα για τα οποία η δεύτερη μέτρηση του $\hat{A}$ έδωσε την τιμή $+1$. Υπολογίστε τις αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες.

Απάντηση

(α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{P}_+ = |+\rangle\langle+|, \; \hat{P}_- = |-\rangle\langle-|. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\hat{U} = \cos(\omega t)\hat{I} - i\,\sin(\omega t)\,\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} cos(\omega t) & -i\sin(\omega t) \\ -i\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \text{Prob}(+,+) &= \langle\psi|\hat{P}_+\hat{U}^\dagger\hat{P}_+\hat{U}\hat{P}_+|\psi\rangle = |\langle+|\psi\rangle|^2|\langle+|\hat{U}|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2(\omega t) \\ &= \text{Prob}(-,-) = |\langle-|\psi\rangle|^2|\langle-|\hat{U}|-\rangle|^2, \\ \text{Prob}(+,-) &= |\langle+|\psi\rangle|^2|\langle+|\hat{U}|-\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(\omega t) = \text{Prob}(-,+) = |\langle-|\psi\rangle|^2|\langle-|\hat{U}|+\rangle|^2. \end{aligned}$$

(β) Οι πιθανότητες μετά από την ύστερη επιλογή είναι

$$P_+ = \frac{\text{Prob}(+,+)}{\text{Prob}(+,+)+\text{Prob}(-,+)} = \cos^2(\omega t),$$

$$P_- = \frac{\text{Prob}(-,+)}{\text{Prob}(+,+)+\text{Prob}(-,+)} = \sin^2(\omega t). \quad \square$$

5.8 Έστω σύνθετο σύστημα δύο κιούμπιτ. Θεωρούμε τις καταστάσεις,

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + e^{i\theta}|0,1\rangle$$
$$|p\rangle = \sqrt{p}|1,1\rangle + \sqrt{1-p}|0,0\rangle.$$

Και για τις δύο καταστάσεις, υπολογίστε τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις για την ποσότητα που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A} = \frac{i}{2}(\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_1)$.

Απάντηση

Για την κατάσταση $|p\rangle$, παίρνουμε $\langle p|\hat{A}|p\rangle = p\langle 1,1|\hat{A}|1,1\rangle + (1-p)\langle 0,0|\hat{A}|0,0\rangle + \sqrt{p(1-p)}\langle 1,1|\hat{A}|0,0\rangle + \sqrt{p(1-p)}\langle 0,0|\hat{A}|1,1\rangle$. Βρίσκουμε

$\langle 1,1|\hat{A}|1,1\rangle = \frac{i}{2}\left(\langle 1|\hat{\sigma}_1|1\rangle\langle 1|\hat{\sigma}_2|1\rangle - \langle 1|\hat{\sigma}_2|1\rangle\langle 1|\hat{\sigma}_2|1\rangle\right) = 0$

$\langle 0,0|\hat{A}|0,0\rangle = \frac{i}{2}\left(\langle 0|\hat{\sigma}_1|0\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_2|0\rangle - \langle 0|\hat{\sigma}_2|0\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_2|0\rangle\right) = 0$

$\langle 0,0|\hat{A}|1,1\rangle = \frac{i}{2}\left(\langle 0|\hat{\sigma}_1|1\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_2|1\rangle - \langle 0|\hat{\sigma}_2|1\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_2|1\rangle\right) = 0$

Οπότε καταλήγουμε ότι $\langle p|\hat{A}|p\rangle = 0$.

Υπολογίζουμε $\hat{A}^2 = -\frac{1}{4}(\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_1)(\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_1)$

$= -\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_1^2 \otimes \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_2^2 \otimes \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\hat{I} \otimes \hat{I} - \hat{\sigma}_3 \otimes \hat{\sigma}_3\right)$.

Αμέσως παίρνουμε ότι $\langle p|\hat{A}^2|p\rangle = -\frac{1}{2}(1 - \langle p|\hat{\sigma}_3 \otimes \hat{\sigma}_3|p\rangle) = 0$.

Αντίστοιχα γίνεται ο υπολογισμός για την κατάσταση $|\theta\rangle$. $\square$

5.9 Υπολογίστε τις ανηγμένες μήτρες πυκνότητας για τις καταστάσεις $|\psi\rangle = \sqrt{p}|1,1\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\theta}|0,0\rangle$ ενός συστήματος δύο κιούμπιτ.

Απάντηση

$\langle 1|\hat{\rho}_1|1\rangle = \langle 1,0|\psi\rangle\langle\psi|1,0\rangle + \langle 1,1|\psi\rangle\langle\psi|1,1\rangle = p$

$\langle 0|\hat{\rho}_1|0\rangle = 1 - \langle 1|\hat{\rho}_1|1\rangle = 1 - p$

$\langle 1|\hat{\rho}_1|0\rangle = \langle 1,0|\psi\rangle\langle\psi|0,0\rangle + \langle 1,1|\psi\rangle\langle\psi|0,1\rangle = 0$.

Άρα $\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}$. $\square$

5.10 Υπολογίστε τον συσχετισμό $\text{Cor}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ για τις καταστάσεις (5.32, 5.33).

Απάντηση
Υπολογίζουμε ενδεικτικά για την $|\Phi_-\rangle$.
Cor$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) =$
$\frac{1}{2}\left(\langle 1|\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|1\rangle\langle 1|\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|1\rangle + \langle 0|\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|0\rangle\langle 0|\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|0\rangle - \langle 1|\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|0\rangle\langle 1|\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|0\rangle - \langle 0|\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|1\rangle\langle 0|\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}|1\rangle\right)$
$= \frac{1}{2}\left[m_3n_3 - (-m_3)(-n_3) - (m_1+im_2)(n_1+in_2) - (m_1-im_2)(n_1-in_2)\right] = m_3n_3 + m_2n_2 - m_1n_1.$ $\square$

5.11 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους φασματικούς προβολείς των τελεστών

$$\hat{K_\pm} = \hat{\sigma}_1\otimes\hat{\sigma}_2 \pm \hat{\sigma}_2\otimes\hat{\sigma}_1,$$
$$\hat{L} = \hat{\sigma}_1\otimes\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2\otimes\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3\otimes\hat{\sigma}_3$$

για ένα σύστημα δύο κιούμπιτ.

Απάντηση
Υπολογίζουμε τη δράση των τελεστών $\hat{K}_\pm$ στα διανύσματα βάσης $|0,0\rangle$, $|1,1\rangle$, $|0,1\rangle$, $|1,0\rangle$,

$$\begin{aligned}
\hat{K}_+|0,0\rangle &= \hat{\sigma}_1|0\rangle\otimes\hat{\sigma}_2|0\rangle + \hat{\sigma}_2|0\rangle\otimes\hat{\sigma}_1|0\rangle,\\
\hat{K}_+|1,1\rangle &= \hat{\sigma}_1|1\rangle\otimes\hat{\sigma}_2|1\rangle + \hat{\sigma}_2|1\rangle\otimes\hat{\sigma}_1|1\rangle,\\
\hat{K}_+|0,1\rangle &= \hat{\sigma}_1|0\rangle\otimes\hat{\sigma}_2|1\rangle + \hat{\sigma}_2|0\rangle\otimes\hat{\sigma}_1|1\rangle,\\
\hat{K}_+|1,0\rangle &= \hat{\sigma}_1|1\rangle\otimes\hat{\sigma}_2|0\rangle + \hat{\sigma}_2|1\rangle\otimes\hat{\sigma}_1|0\rangle.
\end{aligned}$$

Τα διανύσματα $|1,0\rangle$ και $|0,1\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα του $\hat{K}_+$ με ιδιοτιμή 0.

Ορίζουμε επίσης τα διανύσματα $|W_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,1\rangle + |0,0\rangle\big)$.
Παρατηρούμε ότι
$$\hat{K}_+|W_+\rangle = 2|W_+\rangle,\ \ \hat{K}_+|W_-\rangle = -2|W_-\rangle.$$
Τα $|W_\pm\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα των $\hat{K}_+$ με ιδιοτιμές ± 2.

Οι αντίστοιχοι φασματικοί προβολείς είναι:

$$\hat{P}_0 = |1,0\rangle\langle 1,0| + |0,1\rangle\langle 0,1|,\ \ \hat{P}_2 = |W_+\rangle\langle W_+|\ ,\ \hat{P}_{-2} = |W_-\rangle\langle W_-|.$$

Ομοίως για το $\hat{K}_-$:

$$\hat{K}_-|0,0\rangle = 0\,,\ \hat{K}_-|1,1\rangle = 0\,,\ \hat{K}_-|0,1\rangle = 2i\,|0,1\rangle\,,\ \hat{K}_-|1,0\rangle = -2i\,|1,0\rangle.$$

Τα διανύσματα $|0,0\rangle$, $|1,1\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα του $\hat{K}_-$ με ιδιοτιμή 0.

Ορίζουμε
$$|\chi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,0\rangle \pm i\,|0,1\rangle\big)$$
και βρίσκουμε ότι
$$\hat{K}_-|\chi_+\rangle = -2\,|\chi_+\rangle,\ \ \hat{K}_-|\chi_-\rangle = 2\,|\chi_+\rangle.$$
Οι αντίστοιχοι προβολικοί τελεστές είναι:

$$\hat{P}_0 = |0,0\rangle\langle 0,0| + |1,1\rangle\langle 1,1|,\ \ \hat{P}_2 = |\chi_-\rangle\langle\chi_-|,\ \ \hat{P}_{-2} = |\chi_+\rangle\langle\chi_+|.\quad\square$$

5.12 Ένα σύστημα από δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + e^{i\theta}|0,1\rangle).$$

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι $\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_1\hat{\sigma}_3 \otimes \hat{I} + \frac{1}{2}\omega_2\hat{I} \otimes \hat{\sigma}_3$. Τη χρονική στιγμή t_1 γίνεται μέτρηση του $\hat{\sigma}_1$ στο πρώτο κιούμπιτ και τη χρονική στιγμή t_2 μέτρηση του $\hat{\sigma}_1$ στο δεύτερο κιούμπιτ. Υπολογίστε τις πιθανότητες για όλα τα δυνατά αποτελέσματα όλων των μετρήσεων.

Απάντηση

Έστω

$$\hat{U}_t = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_1\,\hat{\sigma}_3} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\,\omega_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\,\omega_1 t} \end{pmatrix},\ \hat{V}_t = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_2\,\hat{\sigma}_3} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\,\omega_2 t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\,\omega_2 t} \end{pmatrix}.$$

Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης είναι $\hat{U}_t \otimes \hat{V}_t$.

Η από κοινού πιθανότητα για τις δυο μετρήσεις είναι

$$\begin{aligned} \text{Prob}(a,b) &= \langle\theta|\left(\hat{U}^\dagger_{t_1} \otimes \hat{V}^\dagger_{t_1}\right)\left(\hat{P}_a \otimes \hat{I}\right)\left(\hat{U}^\dagger_{t_2-t_1} \otimes \hat{V}^\dagger_{t_2-t_1}\right)\left(\hat{I} \otimes \hat{P}_b\right)\left(\hat{U}_{t_2-t_1} \otimes \hat{V}_{t_2-t_1}\right) \\ &\quad \otimes \left(\hat{P}_a \times \hat{I}\right)\left(\hat{U}_{t_1} \otimes \hat{V}_{t_1}\right)|\theta\rangle \\ &= \langle\theta|\hat{U}^\dagger_{t_1}\,\hat{P}_a\,\hat{U}_{t_1} \otimes \hat{V}^\dagger_{t_2}\,\hat{P}_b\,\hat{V}_{t_2}|\theta\rangle. \end{aligned}$$

Γράφουμε $\hat{P}_a = |a\rangle\langle a|$, με $a = |\pm\rangle$, for $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Οπότε,

$$\text{Prob}(a,b) = \left|\langle a,b|\,\hat{U}_{t_1} \otimes \hat{V}_{t_2}\,|\,\theta\rangle\right|^2.$$

Βρίσκουμε ότι

$$\hat{U}_{t_1} \otimes \hat{V}_{t_2}\,|\,\theta\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i}{2}\,(\omega_2 t_2\,-\,\omega_1 t_1)}\,|1,0\rangle + e^{-\frac{i}{2}\,(\omega_2 t_2\,-\,\omega_1 t_1)+i\theta}\,|0,1\rangle\right).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(+,+) &= \frac{1}{2}\,\cos^2\left[\frac{1}{2}\,(\theta + \omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)\right] = \text{Prob}(-,-), \\ \text{Prob}(+,-) &= \frac{1}{2}\,\sin^2\left[\frac{1}{2}\,(\theta + \omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)\right] = \text{Prob}(-,+)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 6

6.1 Υπολογίστε τον διαδότη για ελεύθερο σωμάτιο μάζας m που κινείται στην ημιευθεία.

Απάντηση

Τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $|k\rangle$ του τελεστή $\widehat{p^2}$ στο $L^2(\mathbb{R}^+)$ αντιστοιχούν στις συναρτήσεις

$$f_k = \frac{2}{\pi} \sin(kx).$$

Από το φασματικό θεώρημα για τον τελεστή χρονικής εξέλιξης $e^{-i\hat{H}t}$,

$$\begin{aligned}
\langle x|e^{-i\hat{H}t}|x'\rangle &= \int_0^\infty dk\, \langle x|k\rangle\langle k|x'\rangle e^{-i\frac{k^2}{2m}t} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\ \sin(kx)\sin(kx')e^{-i\frac{k^2}{2m}t} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2i)^2}\int_0^\infty dk\, \big(e^{ikx} - e^{-ikx}\big)\big(e^{ikx'} - e^{-ikx'}\big)e^{-i\frac{k^2}{2m}t} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\, \big(e^{ik(x+x')} + e^{-ik(x+x')}\big)e^{-i\frac{k^2}{2m}t} \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\, \big(e^{ik(x-x')} + e^{-ik(x-x')}\big)e^{-i\frac{k^2}{2m}t} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\, e^{ik(x+x')-i\frac{k^2}{2m}\mathrm{t}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\, e^{ik(x-x')-i\frac{k^2}{2m}t}.
\end{aligned}$$

Τα δύο ολοκληρώματα αντιστοιχούν στους διαδότες $G_t(x,x')$ και $G_t(x,-x')$ για ελεύθερο σωμάτιο στην ευθεία, αντίστοιχα.

Συμπεραίνουμε ότι

$$\langle x|e^{-\hat{H}t}|x'\rangle = G_t(x,x') - G_t(x,-x'). \quad \square$$

6.2 Υπολογίστε τον διαδότη για ένα σωμάτιο που κινείται σε μία διάσταση, όταν η σχέση ενέργειας-ορμής για το σωμάτιο είναι $E = v|p|$, όπου v η ταχύτητα διάδοσης.

Απάντηση

$$\begin{aligned}
\langle x|e^{-i\hat{H}t}|x'\rangle &= \int_{-\infty}^\infty dp\, \langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle e^{-iv|p|t|} = \int_{-\infty}^\infty dp\, e^{ip(x-x')-iv|p|t} \\
&= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\cos[p(x-x')]e^{-ivpt}.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αλλάζοντας το t σε $t - i\epsilon$, με $\epsilon > 0$.

$$G_{t-i\epsilon}(x,x') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\, e^{-p(\epsilon v - ivt)}\cos[p(x-x')] = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon v - ivt}{(x-x')^2 + v^2(\epsilon - it)^2}.$$

Για $\epsilon \to 0$,

$$G_t(x,x') = -\frac{ivt}{\pi}\frac{1}{(x-x')^2 - v^2t^2}. \quad \square$$

6.3 Δείξτε ότι ο τελεστής $\hat{Q} = -ix\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}$ είναι αυτοσυζυγής στο $L^2(\boldsymbol{R}^+)$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}+iq}$ για κάθε $q \in \boldsymbol{R}$ είναι γενικευμένα ιδιοδιανύσματά του και ικανοποιούν τη συνθήκη κανονικοποίησης $\int_0^\infty dx f_q(x)f^*_{q'}(x) = \delta(q-q')$. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα του Χάνταμαρ για να δείξετε ότι $e^{is\hat{Q}}\hat{x}e^{-is\hat{Q}} = e^s\hat{x}$. Ποια είναι η φυσική σημασία του $\hat{Q}$;

Απάντηση

(i)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \phi^*(x)\hat{Q}\,\psi(x)dx &= \int_0^\infty \phi^*\Big(-ix\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\psi}{2}\Big) \\
&= \phi^*(-ix\psi)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty dx\Big(i\,\frac{\partial}{\partial x}(x\phi^*)\psi - i\,\frac{\phi^*\psi}{2}\Big) \\
&= \int_0^\infty dx\Big[i\,\phi^*\psi + i\,x\Big(\frac{\partial}{\partial x}\phi^*\Big)\psi - \frac{i}{2}\,\phi^*\Big] \\
&= \int_0^\infty dx\Big(-i\,x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\Big)^*\psi = \int_0^\infty dx(\hat{Q}\phi)^*\psi\,.
\end{aligned}$$

Άρα, ο $\hat{Q}$ είναι αυτοσυζυγής.

Υπολογίζουμε,

$$\hat{Q}f_q(x) = -ix\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+iq}}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{i}{2}f_q(x) = -i\Big(-\frac{1}{2}+iq\Big)f_q(x) - \frac{i}{2}\,f_q(x) = qf_q(x).$$

$$\int_0^\infty f_q(x)f_{q'}(x)dx = \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi x}x^{i(q-q')} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{2\pi}e^{i(q-q')y} = \delta(q-q'),$$

όπου στο τελευταίο βήμα θέσαμα $x = e^y$.

Υπολογίζουμε τον μεταθέτη $[\hat{Q},\hat{x}]$:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}\,\hat{x}\,\phi(x) &= \hat{Q}\,\hat{x}\,\phi(x) = -i\,x\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) - \frac{i}{2}\,x\phi = -i\,x^2\,\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{3i}{2}x\phi\,, \\
\hat{x}\,\hat{Q}\,\phi(x) &= -i\,x^2\,\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{i}{2}x\phi\,.
\end{aligned}$$

Άρα, $[\hat{Q},\hat{x}]\phi(x) = -i\,x\phi(x)$, οπότε,

$$[\hat{Q},\hat{x}] = -i\,x.$$

Από την ταυτότητα του Χάνταμαρ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
e^{is\hat{Q}}\hat{x}e^{-i\hat{Q}} &= \hat{x} + [is\hat{Q},\hat{x}] + \frac{1}{2!}\,\big[is\hat{Q},[is\hat{Q},\hat{x}]\big] + \cdots \\
&= \hat{x} + s\hat{x} + \frac{1}{2!}[is\hat{Q},s\hat{x}] + \cdots = \hat{x}\big(1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots\big) = e^s\hat{x}\,.
\end{aligned}$$

Άρα ο τελεστής $\hat{Q}$ γεννά ανακλιμάκωση της θέσης. $\square$

6.4 Σωμάτιο στην ημιευθεία $\boldsymbol{R}^+$ προετοιμάζεται στην κατάσταση $\psi(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$, για $\lambda > 0$. (α) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση Δx. (β) Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί στις μετρήσεις του τελεστή $\widehat{|p|}$. (γ) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση $\Delta|p|$ και το γινόμενο $\Delta x\Delta|p|$. (δ) Υπολογίστε την κατανομή πιθανοτήτων για τις τιμές του τελεστή $\hat{Q}$ της ασκ. 6.3.

Απάντηση

(α) Αμέσως υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= 4\lambda^3\int_0^\infty dx\, x^3 e^{-2\lambda x} = 4\lambda^3\,\frac{3!}{(2\lambda)^4} = \frac{3}{2\lambda},\\
\langle x^2\rangle &= 4\lambda^3\int_0^\infty dx\, x^4 e^{-2\lambda x} = 4\lambda^3\frac{4!}{(2\lambda)^5} = \frac{3}{\lambda^2},\\
(\Delta x)^2 &= \frac{3}{\lambda^2}-\frac{9}{4\lambda^2}=\frac{3}{4\lambda^2}.
\end{aligned}$$

(β) Η πυκνότητα πιθανότητας είναι $p(k)=|\langle k|\psi\rangle|^2$ όπου $|k\rangle$ τα ιδιοδιανύσματα του $\widehat{|p|}$, που ορίζονται ως

$$\langle x|k\rangle = \frac{2}{\pi}\,\mathsf{sin}(kx).$$

Υπολογίζουμε

$$\langle k|\psi\rangle = 2\lambda^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx\, x\,\mathsf{sin}(kx)e^{-\lambda x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2\,\lambda^{5/2}k}{(\lambda^2+k^2)^2}.$$

Άρα

$$p(k)=\frac{8}{\pi}\,\frac{\lambda^5k^2}{(\lambda^2+k^2)}.$$

(γ) Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{|p|}\rangle &= \frac{8\lambda^5}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{k^3}{(\lambda^2+k^2)^4} = \frac{8\lambda^5}{\pi}\,\frac{1}{12\lambda^4} = \frac{2\lambda}{3\pi},\\
\langle\widehat{|p|}^2\rangle &= \frac{8\lambda^5}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{k^4}{(\lambda^2+k^2)^4} = \frac{8\lambda^5}{\pi}\,\frac{\pi}{32\lambda^3} = \frac{\lambda^2}{4}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{(x^2+1)^4}=\frac{1}{12}\ ,\quad \int_0^\infty dx\,\frac{x^4}{(x^2+1)^4}=\frac{\pi}{12}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
(\Delta|p|)^2 &= \frac{\lambda^2}{4}\Big(1-\frac{16}{9\pi^2}\Big)\ ,\\
(\Delta x)(\Delta|p|) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{16}{9\pi^2}}\simeq 0.78.
\end{aligned}$$

(δ) Τα ιδιοδιανύσματα $|q\rangle$ του $\hat{Q}$ αντιστοιχούν σε συναρτήσεις $f_q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x^{\frac{1}{2}+iq}$.

Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle q|\psi\rangle &= 2\lambda^{3/2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dx\, x^{\frac{1}{2}+iq}e^{-\lambda x}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda^{3/2}\,\frac{\Gamma(3/2+iq)}{\lambda^{3/2+iq}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma(3/2+iq)}{\lambda^{iq}}.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$p(q) = |\langle q|\psi\rangle|^2 = \frac{2}{\pi}|\Gamma(3/2+iq)|^2. \quad \square$$

6.5 Σωμάτιο σε κουτί δυναμικού μήκους L προετοιμάζεται σε κατάσταση $\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{L^5}}x(L-x)$. (α) Υπολογίστε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στις δυνατές τιμές του τελεστή $\widehat{|p|}$. (β) Υπολογίστε τις τυπικές αποκλίσεις Δx και $\Delta|p|$, καθώς και το γινόμενο $\Delta x \Delta|p|$.

Απάντηση

(α) Τα ιδιοδιανύσματα $|n\rangle$ του τελεστή $\widehat{|p|}$ αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\langle n|\psi\rangle &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{30}{L^5}}\int_0^L dx\, x(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
&\overset{y=x/L}{=} \sqrt{60}\int_0^1 dy\, y(1-y)\sin(n\pi y) \\
&= \sqrt{60}\cdot 2\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3} = \begin{cases} 0 \quad , & n \text{ even} \\ \dfrac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3} \, , & n \text{ odd}\end{cases} .
\end{aligned}$$

Οπότε, $p_n = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \begin{cases} 0 \quad , & n \text{ even} \\ \dfrac{960}{n^6\pi^6} \, , & n \text{ odd}\end{cases}$.

(β) Πρώτα υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση του $\hat{x}$.

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle &= \frac{30}{L^5}\int_0^L dx\, x^3(L-x)^2 = 30L\int_0^1 dy\, y^3(1-y)^2 = 30L\,\frac{1}{60} = \frac{L}{2}, \\
\langle\hat{x}^2\rangle &= \frac{30}{L^5}\int_0^L dx\, x^4(L-x)^2 = 30L^2\int_0^1 dy\, y^4(1-y)^2 = 30L^2\frac{1}{105} = \frac{2L^2}{7}, \\
(\Delta x)^2 &= \frac{2L^2}{7} - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{28}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση του $\widehat{|p|}$.

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{|p|}\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}\,\frac{(2k+1)\pi}{L} = \frac{960}{L\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{960}{L\pi^5}\,\frac{31}{32}\,\zeta(5) = \frac{930\zeta(5)}{L\pi^5}, \\
\langle\widehat{|p|}^2\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}\,\frac{(2k+1)^2\pi^2}{L^2} = \frac{960}{L^2\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{960}{L^2\pi^4}\,\frac{15}{16}\,\zeta(4) = \frac{900\zeta(4)}{L^2\pi^4}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-5} = \sum_{k=1}^{\infty}n^{-5} - \sum_{k=0}^{\infty}(2k)^{-5} = \zeta(5) - 2^{-5}\zeta(5) = \zeta(5)(1-2^{-5}).$$

Βρίσκουμε ότι

$$(\Delta|p|)^2 \quad = \quad \frac{900\zeta(4)}{L^2\pi^4} - \frac{930^2\zeta(5)^2}{L^2\pi^{10}} = \frac{1}{L^2\pi^4}\Big(900\zeta(4) - \frac{930^2\zeta(5)^2}{\pi^6}\Big) = \frac{0.07}{L^2}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$(\Delta x)(\Delta|p|) \quad = \quad 0.05. \quad \Box$$

Βλέπουμε ότι $(\Delta x)(\Delta|p|) < \frac{1}{2}$. Αυτό δεν είναι πρόβλημα γιατί δεν υπάρχει περιορισμός από την ανισότητα Kennard-Robertson.

5.4 Σωμάτιο σε δακτύλιο περιμέτρου L προετοιμάζεται στην κατάσταση

$$\psi(x) = \begin{cases} Cx, & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ C(L-x) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης C. (β) Βρείτε την τυπική απόκλιση για τον τελεστή συνημιτόνου $\hat{c}$ και για τον τελεστή ημιτόνου $\hat{s}$. (γ) Βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων για τη στροφορμή $\hat{\ell}$.

Answer

(α) Βρίσκουμε τη σταθερά κανονικοποίησης,

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx \quad = \quad C^2 \int_0^{L/2} x^2 dx + C^2 \int_{L/2}^L (L-x)^2 dx = \frac{L^3}{12} C^2 = 1.$$

Άρα

$$C = \sqrt{\frac{12}{L^3}}.$$

(β) Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \langle \hat{c} \rangle \quad &= \quad \frac{12}{L^3} \left(\int_0^{L/2} x^2 \cos\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx + \int_{L/2}^L (L-x)^2 \cos\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx \right) \\ &= \quad \frac{12}{L^3}\Big(-\frac{L^3}{2\pi^2}\Big) = -\frac{6}{\pi^2}\,, \end{aligned}$$

$$\langle \hat{s} \rangle \quad = \quad \frac{12}{L^3} \left(\int_0^{L/2} x^2 \sin\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx + \int_{L/2}^L (L-x)^2 \sin\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx \right) = 0\,,$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{c^2} \rangle \quad &= \quad \frac{12}{L^3} \left(\int_0^{L/2} x^2 \cos^2\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx + \int_{L/2}^L (L-x)^2 \cos^2\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx \right) \\ &= \quad \frac{12}{L^3}\,\frac{L^3}{48}\Big(2 + \frac{3}{\pi^2}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4\pi^2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{s^2} \rangle \quad &= \quad \frac{12}{L^3} \left(\int_0^{L/2} x^2 \sin^2\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx + \int_{L/2}^L (L-x)^2 \sin^2\Big(\frac{2\pi\, x}{L}\Big) dx \right) \\ &= \quad \frac{12}{L^3}\,\frac{L^3}{48}\Big(2 - \frac{3}{\pi^2}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
(\Delta c)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4\pi^2} - \frac{36}{\pi^4} \simeq 0.206 \, , \\
(\Delta s)^2 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4\pi^2} - \frac{36}{\pi^4} \simeq 0.424 \, .
\end{aligned}$$

(γ) Υπολογίζουμε $\langle n|\psi\rangle$, όπου $f_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n/L}$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις της $\hat{\ell}$.

$$\begin{aligned}
\langle n|\psi\rangle &= \sqrt{\frac{12}{L^3}} \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\int_0^{L/2} x \, e^{2\pi i n/L} dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) e^{2\pi i n/L} dx \right) \\
&= \begin{cases} 0 \, , \quad n \neq 0 \, , \, n \text{ even} \\ -\dfrac{\sqrt{12}}{n^2\pi^2} \, , \qquad n \text{ odd} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \, , \qquad\quad n = 0 \end{cases} \, .
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$p_n = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \begin{cases} 0 \, , \quad n \neq 0 \, , \, n \text{ even} \\ -\dfrac{\sqrt{12}}{n^4\pi^4} \, , \qquad n \text{ odd} \\ \dfrac{3}{4} \, , \qquad\quad n = 0 \end{cases} \, . \qquad \square$$

Κεφάλαιο 7

7.1 Ορίζουμε τη λογαριθμική παράγωγο της κυματοσυνάρτησης στο x ως $b_E(x) := \frac{d \ln \psi_E(x)}{dx}$. Εφαρμόστε τη συνθήκη (**??**) για $E_1 = E$ και $E_2 = E + \delta E$ και αποδείξτε ότι

$$\frac{db_E(x)}{dE} = -\frac{1}{\psi_E(x)^2} \int_{-\infty}^{b} dx' \psi_E(x')^2,$$

που σημαίνει ότι η λογαριθμική παράγωγος μιας πραγματικής ιδιοσυνάρτησης του τελεστή Σρέντινγκερ είναι φθίνουσα συνάρτηση της ενέργειας για κάθε x.

Απάντηση

Γράφουμε $\psi_1 = \psi_E$, $\psi_2 = \psi_{E+\delta E}$, και ολοκληρώνουμε την Εξ. (7.3) (**??**) από $-\infty$ ως x,

$$\psi_{E+\delta E}\psi_E' - \psi_E \psi_{E+\delta E}' = \delta E \int_{-\infty}^{x} dx' \psi_E(x')\psi_{E+\delta E}(x'). \tag{2}$$

Διαιρούμε και τα δύο σκέλη της εξίσωσης με $\psi_E(x)\psi_{E+\delta E}(x)$,

$$\frac{1}{\delta E}[b_{E+\delta E}(x) - b_E(x)] = -\frac{1}{\psi_E(x)\psi_{E+\delta E}(x)} \int_{-\infty}^{x} dx' \psi_E(x')\psi_{E+\delta E}(x'),$$

where $b_E(x)$ η λογαριθμική παράγωγος.

Στο όριο $\delta E \to 0$,

$$\frac{db_E(x)}{dE} = -\frac{1}{\psi_E(x)^2} \int_{-\infty}^{x} dx' \psi_E(x')^2 < 0.$$

7.8 (α) Δείξτε ότι η ποσότητα $\frac{T_k^2}{1+R_k} - \bar{R}_k$ που εμφανίζεται στην Εξ. (**??**) για τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του τελεστή Σρέντινγκερ έχει μέτρο 1 και άρα μπορεί να γραφεί ως $e^{i\Theta_k}$. (β) Υπολογίστε το Θ_k για δυναμικό $V(x) = \eta\delta(x-a)$.

Απάντηση

(α) Έστω $S = \dfrac{T^2}{1+R} - \bar{R}$.

Τότε,

$$|S|^2 = \frac{|T|^4}{|1+R|^2} + |\bar{R}|^2 - \frac{T^2\bar{R}^*}{1+R} - \frac{(T^*)^2\bar{R}}{1+R^*}.$$

Καθώς $|R| = |\bar{R}|$ and $T\bar{R}^* = -T^*R$,

$$\begin{aligned}
|S|^2 &= \frac{|T|^4}{|1+R|^2} + |R|^2 + |T|^2\Big(\frac{R}{1+R} + \frac{R^*}{1+R^*}\Big) \\
&= \frac{|T|^4}{|1+R|^2} + |R|^2 + \frac{|T|^2}{|1+R|^2}(2|R|^2 + R + R^*) \\
&= |R|^2 + \frac{|T|^2\Big(|T|^2 + 2\,|R|^2 + R + R^*\Big)}{|1+R|^2} \\
&= |R|^2 + |T|^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

(β) Για $V(x) = \eta\delta(x)$,

$$\begin{aligned} T &= \left(1 - i\,\frac{m\eta}{k}\right)^{-1}, \\ R &= -\left(1 + i\,\frac{k}{m\eta}\right)^{-1} = \bar{R}\,, \\ T &= 1 + R\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$e^{i\theta} = \frac{T^2}{T} - R = T - R \; = 1.$$

Καταλήγουμε ότι $\Theta = 0$. $\square$