Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β: Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.01: Η ακριβής έννοια του Ορίου

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Μπροδήμας
Τμήμα Φυσικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο Β.01

Η ακριβής έννοια του Ορίου

Απειροστικός Λογισμός

- Περιλαμβάνει
  - Διαφορικό Λογισμό
  - Ολοκληρωτικό Λογισμό

- Βασικές Εννοιες
  - Συνάρτηση
  - Οριο

Το Οριο

- Βασικές Εννοιες
  - Μεταβολή
  - Ρυθμός Μεταβολής
    - Μέσος
    - Στιγμιαίος

Η Μεταβολή

- Η έννοια της μεταβολής
  - Κίνηση Βλημάτων
  - Κίνηση Πλανητών
  - Κίνηση Εκκρεμούς
- Ρυθμός μεταβολής
  - Μέσος Ρυθμός
    - Ταξείδι Πάτρα-Αθήνα
    - Ροή αίματος
    - Ανοδος-Κάθοδος
    - Αύξηση Πληθυσμού
  - Στιγμιαίος Ρυθμός
    - Σύγκρουση Αυτοκινήτων
    - Πυροβολισμός

Στιγμιαίος Ρυθμός Μεταβολής

- Συμπέρασμα
  - Ο στιγμιαίος Ρυθμός Μεταβολής ΥΠΑΡΧΕΙ!
- Ερώτημα: Πως Ορίζεται;
- Φυσικά
  - Σύγκρουση αντικειμένων
  - Φωτεινή αναλαμπή
  - Συμβάν-Στιγμή
- Μαθηματικά
  - Πρόβλημα!!!!!!
- Αποτέλεσμα: Εισαγωγή της εννοίας του ΟΡΙΟΥ και η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ διατύπωση

Αποτέλεσμα

Το Όριο

$\Downarrow$

Σύγκλιση, Συνέχεια, Παράγωγος,

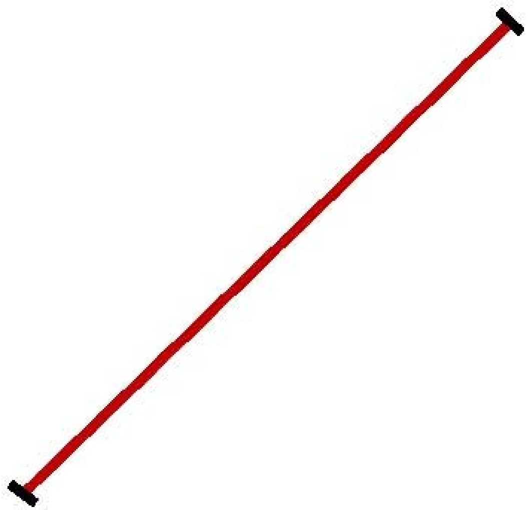
Ολοκλήρωμα, …..

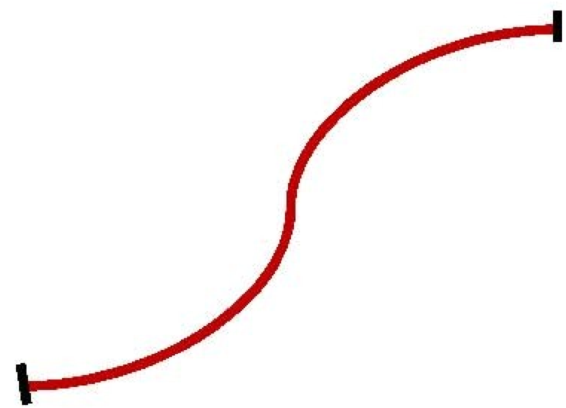
$\Downarrow$

Απειροστικός Λογισμός

(Ανάλυση)

Δυνατότητες

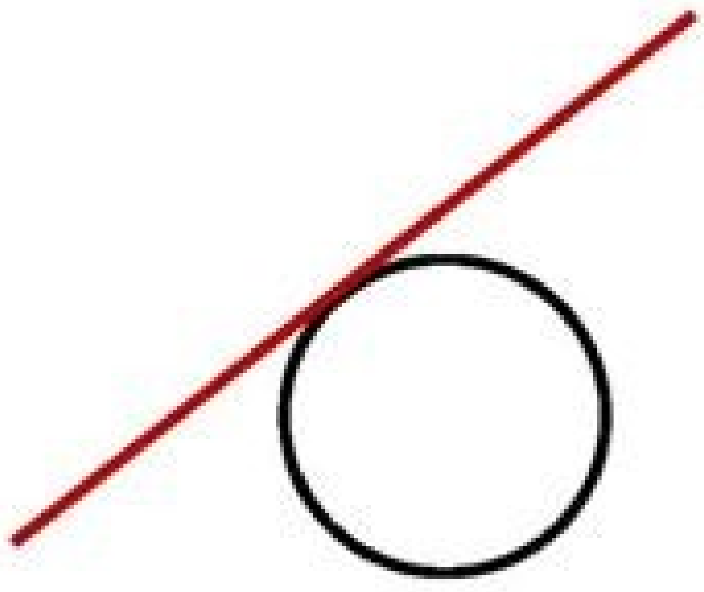




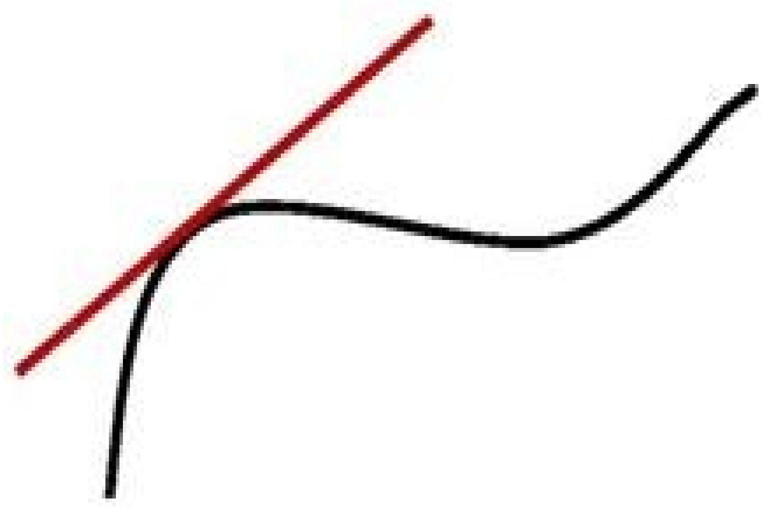
Κλίση Ευθείας
y=mx+b

Κλίση Καμπύλης
y=f(x)

Δυνατότητες



Εφαπτόμενη Κύκλου

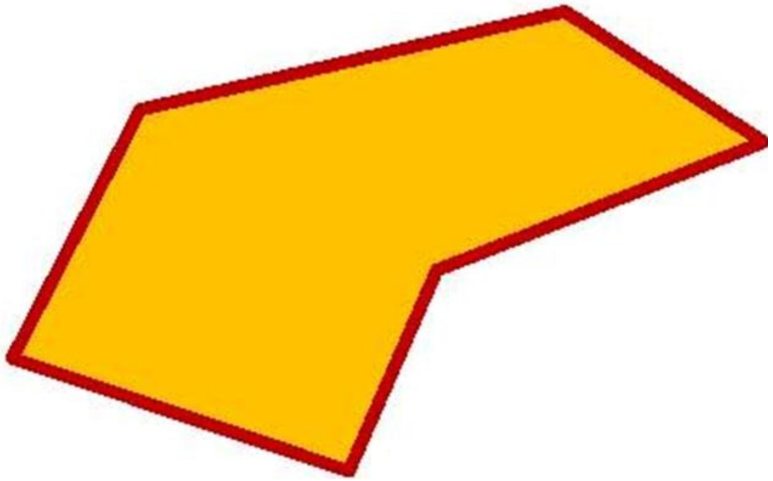


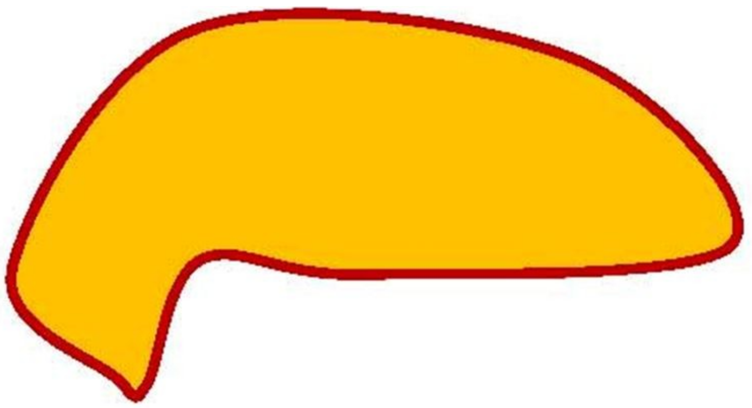
Εφαπτόμενη Καμπύλης

Δυνατότητες

- Μέση Ταχύτητα — Στιγμιαία Ταχύτητα
- Μέση Επιτάχυνση — Στιγμιαία Επιτάχυνση
- Διαστημα — Διάστημα
- με σταθερή ταχύτητα — με μεταβλητή ταχύτητα

Δυνατότητες





Εμβαδό
Οριζόμενο από ευθύγραμμα Τμήματα

Εμβαδό
Οριζόμενο από Καμπύλες

Δυνατότητες

- **Αθροισμα**
  Πεπερασμένου αριθμού Αριθμών

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$$

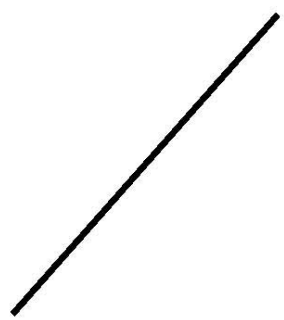
- **Μέση Τιμή**
  Πεπερασμένου αριθμού Αριθμών

- **Αθροισμα**
  απείρων σειρών

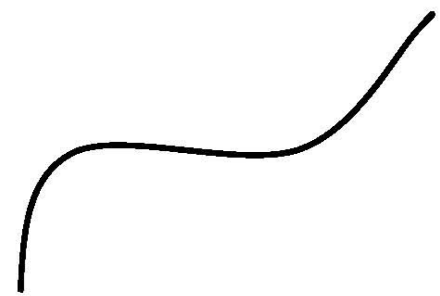
  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

- **Μέση Τιμή**
  Συνάρτησης σε Διάστημα

Δυνατότητες

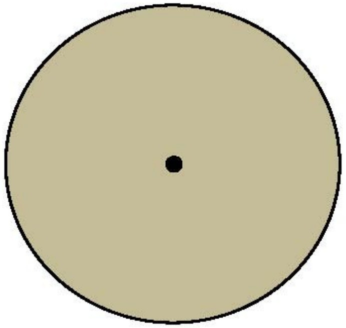


Μήκος Ευθυγράμμου Τμήματος

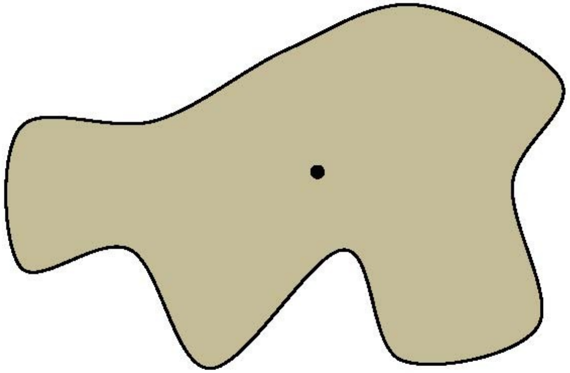


Μήκος Καμπύλης

Δυνατότητες

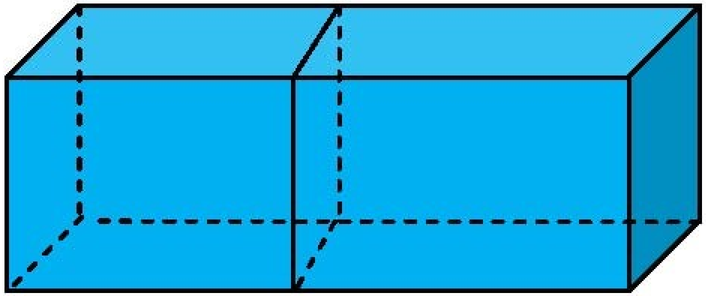


Κέντρο Κύκλου

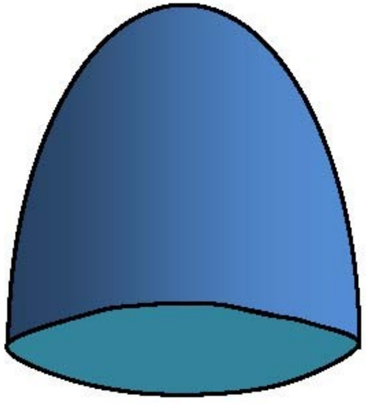


Κέντρο Περιοχής

Δυνατότητες



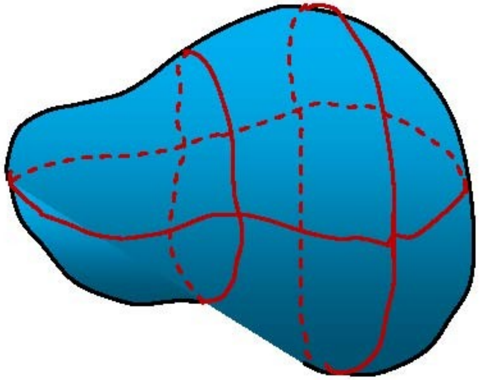
Ογκος Παραλληλεπιπέδου



Ογκος Στερεού

Δυνατότητες

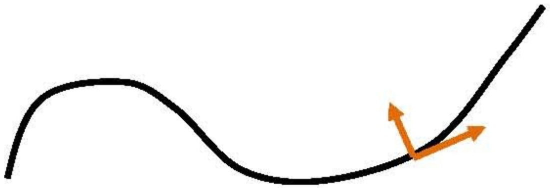
Επιφάνεια Κυλίνδρου



Επιφάνεια Στερεού

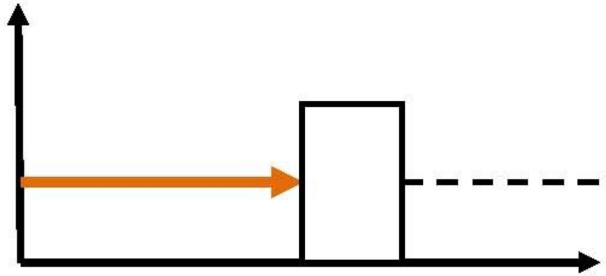
Δυνατότητες

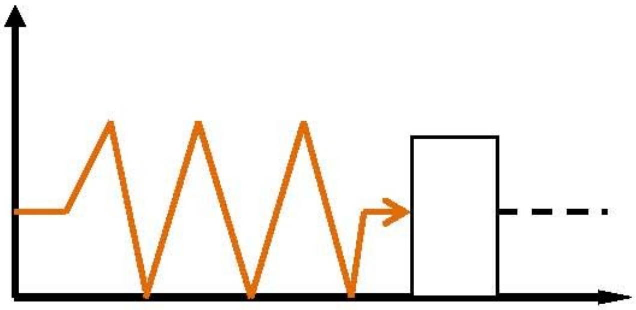
Ευθύγραμμη Κίνηση
Με σταθερή ταχύτητα



Καμπυλόγραμμη Κίνηση
με Μεταβλητή ταχύτητα

Δυνατότητες





Εργο σταθερής δύναμης **Εργο μεταβλητής δύναμης**

Το Οριο

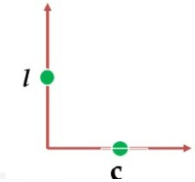
Από διαίσθηση και καθημερινή εμπειρία λέμε:

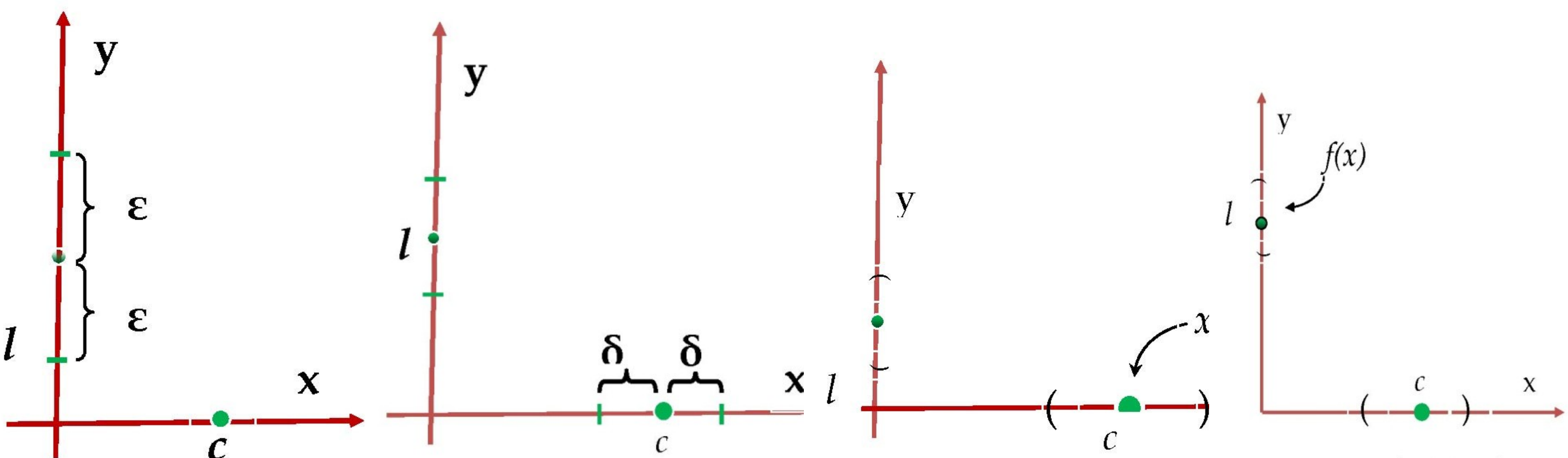
"Όριο μίας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 είναι η τιμή που προ-σεγγίζει η $f(x)$ για τιμές του x πολύ κοντά στο x_0".

Παρατήρηση

Οι εκφράσεις ¨*προσεγγίζει*¨ και ¨*πολύ κοντά*¨ δεν έχουν την αυ-στηρότητα που απαιτούν τα Μαθηματικά και, επομένως, πρέπει να τις προσδιορίσουμε αυστηρά.

ε-δ ορισμός του ορίου





για κάθε ε>0 — Υπάρχει δ>0 έτσι ώστε — εάν $0<|x-c|<$ — τότε $|f(x)-l|<\varepsilon$

Παρατήρηση

Η εκλογή του *δ* εξαρτάται από προηγούμενη εκλογή του *ε*.

Δεν απαιτούμε να υπάρχει ένας αριθμός *δ* που να "εργάζεται" για όλα τα *ε*, αλλά,

για <u>κάθε</u> *ε* να υπάρχει <u>ένα</u> *δ* που να "εργάζεται" για αυτό.

<u>Δηλαδή το *δ* εξαρτάται από το εκάστοτε επιλεγόμενο *ε*.</u>

Παρατήρηση

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να γράψουμε το όριο.

Ο κάθε ένας έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Η επιλογή εξαρτάται κατά περίπτωση.

1. $\lim_{x\to c} f(x) = L$
2. $\lim_{h\to 0} f(c+h) = L$
3. $\lim_{x\to c} \left(f(x) - L\right) = 0$
4. $\lim_{x\to c} \left|f(x) - L\right| = 0$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$

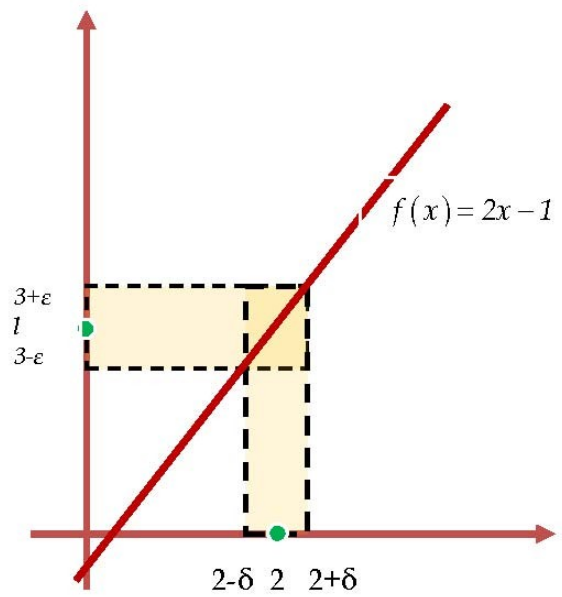
Έστω ε>0. Αναζητούμε δ>0: εάν $0\langle |x-2| \langle \delta$ **τότε**

$|(2x-1)-3|\langle \varepsilon$**. Η σχέση μεταξύ** $|(2x-1)-3|$ **και**

$|x-2|$ **είναι** $|(2x-1)-3|=|2x-4|$ **από όπου**

$|(2x-1)-3|=2|x-2|$**. Από αυτήν προκύπτει ότι**

πρέπει να εκλέξουμε $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$**.**



<u>Επιβεβαίωση</u>: Εάν $0\langle |x-2| \langle \frac{1}{2}\varepsilon$ **τότε και** $2|x-2|\langle \varepsilon$

επομένως $|(2x-1)-3|\langle \varepsilon$**.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \rangle 0)(\exists \delta \rangle 0)\left[0\langle |x-x_0|\langle \delta \to |f(x)-l|\langle \varepsilon\right]$$

Ορισμοί του Ορίου

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon\right]$
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in A \wedge 0 < x - x_0 < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon\right]$
3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in A \wedge 0 < x_0 - x < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon\right]$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty : (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) > M\right]$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty : (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) < M\right]$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l : (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)\left[x > M \to |f(x) - l| < \varepsilon\right]$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l : (\forall \varepsilon > 0)(\exists M < 0)\left[x < M \to |f(x) - l| < \varepsilon\right]$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty : (\forall M > 0)(\exists N > 0)\left[x > N \to f(x) > M\right]$
9. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty : (\forall M > 0)(\exists N < 0)\left[x < N \to f(x) > M\right]$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty : (\forall M < 0)(\exists N > 0)\left[x > N \to f(x) < M\right]$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty : (\forall M < 0)(\exists N < 0)\left[x < N \to f(x) < M\right]$

Το Οριο - Ιδιότητες

Εάν $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ τότε θα ισχύει

1. **Αθροισμα** $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. **Διαφορά**

   $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$

3. **Γινόμενο** $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$

Το Μονοσήμαντο του Ορίου

Εάν $\lim_{x \to c} f(x) = l$

και $\lim_{x \to c} f(x) = m$

τότε θα **είναι** $l=m$

Το Οριο - Ιδιότητες

Το Οριο

$\Downarrow$

Σύγκλιση, Συνέχεια, Παράγωγος, Ολοκλήρωμα, …..

$\Downarrow$

Απειροστικός Λογισμός (Ανάλυση)

Σημείωμα χρήσης έργων τρίτων

Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις προσωπικές σημειώσεις και το υλικό παρουσιάσεων του μαθήματος όπως δημιουργήθηκαν από τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Γεώργιο Μπροδήμα.

Οι εικόνες, τα σχήματα και οι φωτογραφίες είναι δημιουργήματα του συγγραφέως, εκτός αν αναγράφεται διαφορετικά στις αντίστοιχες παραπομπές. Οι ιστότοποι προέλευσης όσων αναφέρονται ήταν ενεργοί κατά την 23η Αυγούστου 2015 οπότε και καταχωρήθηκαν οι παραπομπές.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Β». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1912/

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).

Τέλος Ενότητας