Η έννοια του Συντηρητικού Πεδίου

Η έννοια του συντηρητικού πεδίου

- **Συντηρητικό πεδίο** ονομάζεται το πεδίο εκείνο στο οποίο το έργο που παράγεται από τη δύναμη του πεδίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση και όχι από τη διαδρομή που ακολουθείται.

- **Συντηρητικό πεδίο** ονομάζεται το πεδίο εκείνο στο οποίο το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.

- Υπάρχουν άπειρες διαδρομές που ενώνουν δύο σημεία του πεδίου. Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος όλων αυτών των διαδρομών είναι το ίδιο.

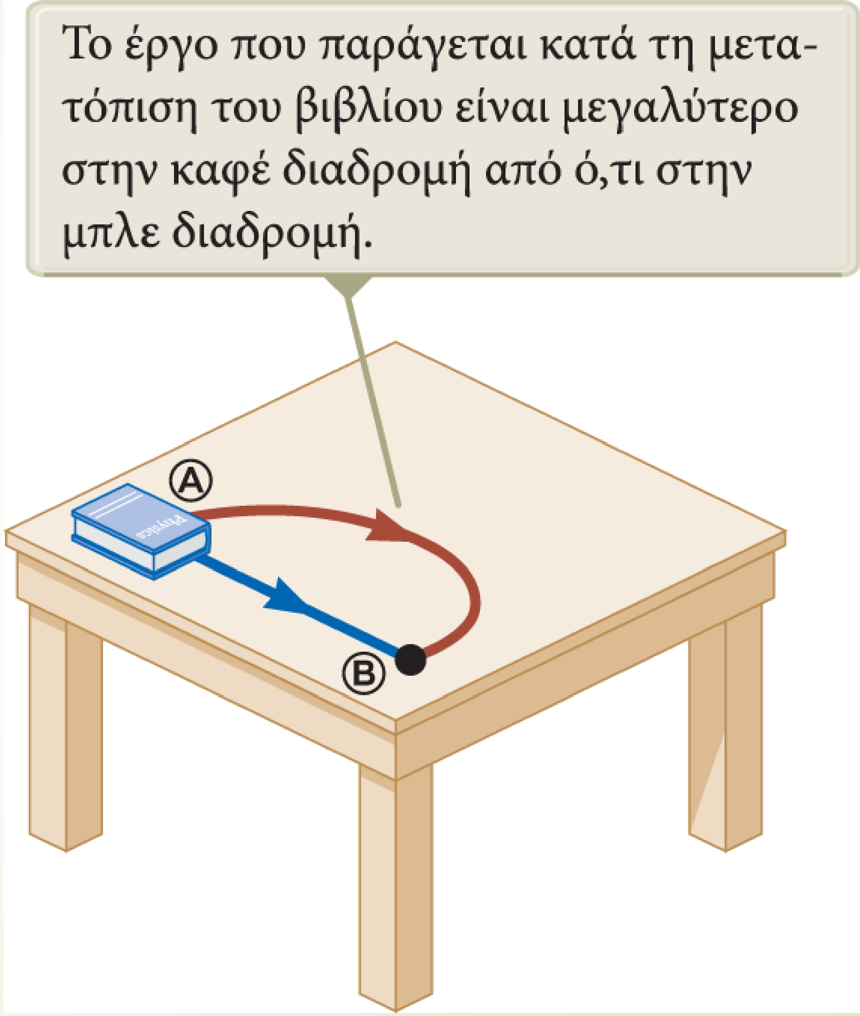
- **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ.**

Συντηρητικές και μη Συντηρητικές δυνάμεις

- Το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, (i) είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο και (ii) μηδενικό όταν η τροχιά είναι κλειστή. (Βαρύτητα, δύναμη ελατηρίου, ηλεκτροστατική δύναμη).

- Οι μη συντηρητικές δυνάμεις **(τριβή)** δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες αυτές.

- Επειδή το έργο που παράγεται στο βιβλίο εξαρτάται από τη διαδρομή, **η τριβή** είναι μια **μη συντηρητική δύναμη**.



Η έννοια του συντηρητικού πεδίου - Δυναμική Ενέργεια

- **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ.**

Το έργο της δύναμης του πεδίου ισούται με τη ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ $U_A - U_B$ στα σημεία Α και Β του πεδίου.

$$W_{A\to B} = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Εάν r_B στο άπειρο τότε:

$$U_A = -\frac{GMm}{r_A}$$

Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι:

$$W_{A\to B} = K_B - K_A$$

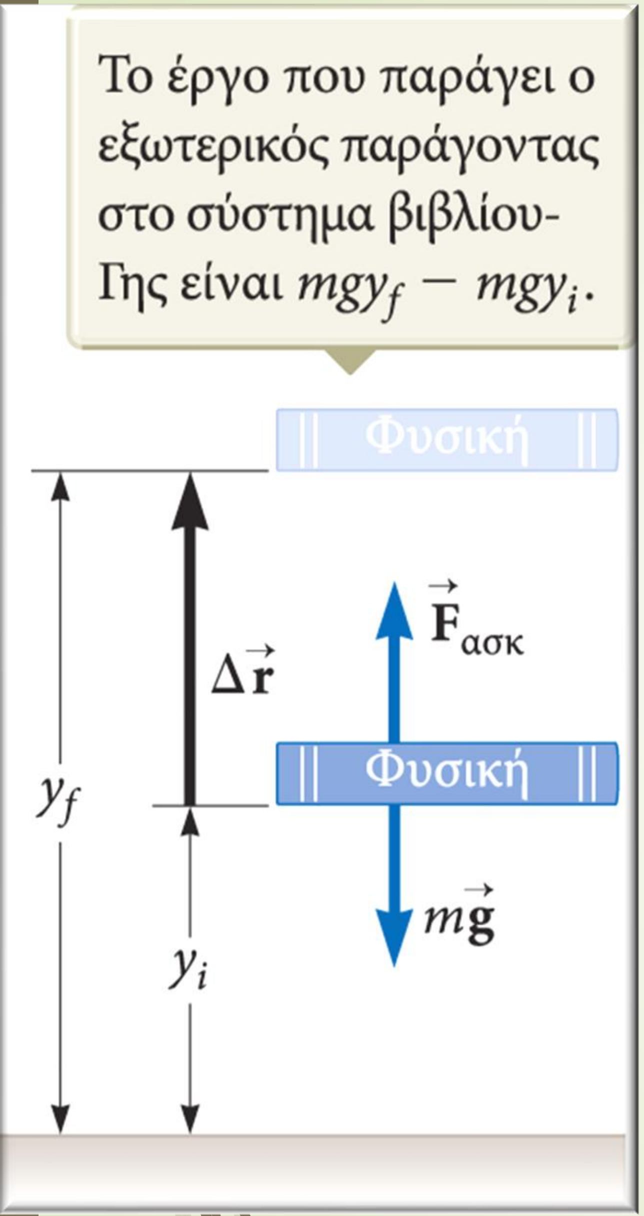
$$W_{A\to B} = U_A - U_B$$

$$W_{A\to B} = U_{αρχ.} - U_{τελ.} = K_{τελ.} - K_{αρχ.} \Rightarrow$$

$$\boxed{U_{αρχ.} + K_{αρχ.} = U_{τελ.} + K_{τελ.}}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Βαρυτική δυναμική ενέργεια



Παράγουμε έργο στο σύστημα ανυψώνοντας κατακόρυφα το βιβλίο.

Η μετατόπιση του βιβλίου είναι: $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (y_f - y_i)\,\hat{\mathbf{j}}$

Το έργο που παράγεται στο σύστημα εκδηλώνεται ως αύξηση της ενέργειας του συστήματος.

$$W_{εξωτ.} = \left(\vec{\mathbf{F}}_{ασκ.}\right) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

$$W_{εξωτ.} = (mg\,\hat{\mathbf{j}}) \cdot \left[(y_f - y_i)\,\hat{\mathbf{j}}\right]$$

$$W_{εξωτ.} = mgy_f - mgy_i$$

Η ***βαρυτική δυναμική ενέργεια*** είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα σε μια δεδομένη θέση πάνω από την επιφάνεια της Γης.

$$U_g = mgy \text{ (J)}$$ **,βαθμωτό μέγεθος**

Η έννοια του Πεδίου

In science, a field is a physical quantity, represented by a scalar, vector, or tensor, that has a value for each point in space and time.

Στη φυσική, πεδίο είναι μια φυσική οντότητα, που περιγράφεται από ένα βαθμωτό μέγεθος, διάνυσμα ή τανυστή, που έχει μια τιμή για κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου.

John Gribbin (1998). Q is for Quantum: Particle Physics from A to Z. London: Weidenfeld & Nicolson. p. 138

Richard Feynman (1970). The Feynman Lectures on Physics Vol II. Addison Wesley Longman. ISBN 978-0-201-02115-8. "A 'field' is any physical quantity which takes on different values at different points in space.“

Ernan McMullin (2002). "The Origins of the Field Concept in Physics". Phys. Perspect. 4 (1): 13–39.

Η Έννοια του Πεδίου στη Φυσική

ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ**

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Πηγές παραγωγής των πεδίων :

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ⟶ ΜΑΖΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ⟶ ΑΚΙΝΗΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ⟶ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

ΜΑΖΑ : m (Kg)
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ : Q (Cb)

Η Έννοια της Έντασης πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Ένταση $\vec{g}$ **σε ένα σημείο Α ενός βαρυτικού πεδίου καλείται το πηλίκο της δύναμης** $\vec{F}$ **που ασκεί το πεδίο σε μια μάζα m , που φέρουμε στο σημείο αυτό, προς τη μάζα αυτή.**

$$G = 6{,}673\times10^{-11} \quad m^3kg^{-1}s^{-2}$$

$$\vec{g}=\lim_{m\to o}\frac{\vec{F}}{m}$$

Διανυσματικό μέγεθος

$$F = G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Προϋπόθεση: Η μάζα m που φέρουμε στο σημείο Α να είναι πολύ μικρή.

G = 6.673χ10^{-11} m^{3}Kg^{-1}s^{-2}

Το Βαρυτικό πεδίο της Γης

Βάρος Σώματος

$$F = G\frac{M_\Gamma \cdot m}{r^2} = B$$

Ένταση **g** βαρυτικού πεδίου Γης

$$g = G\frac{M_\Gamma}{r^2}$$

ή

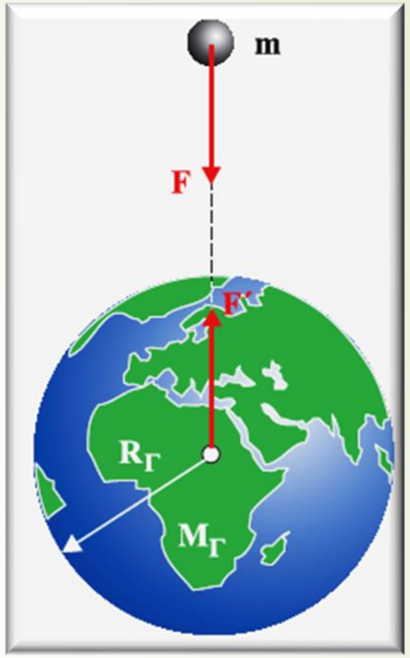
$$g = G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h\right)^2}$$

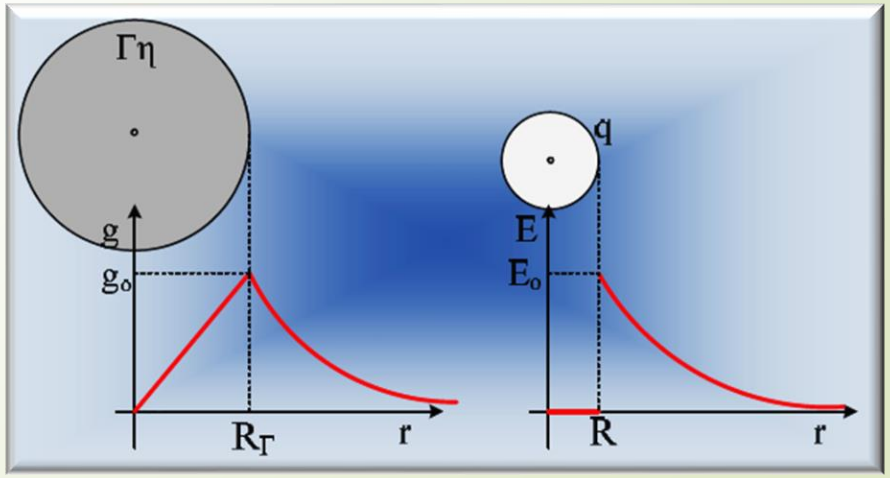
Μέτρο της έντασης **g** στην επιφάνεια της Γης

$$g = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} = 9.81\frac{m}{s^2}$$

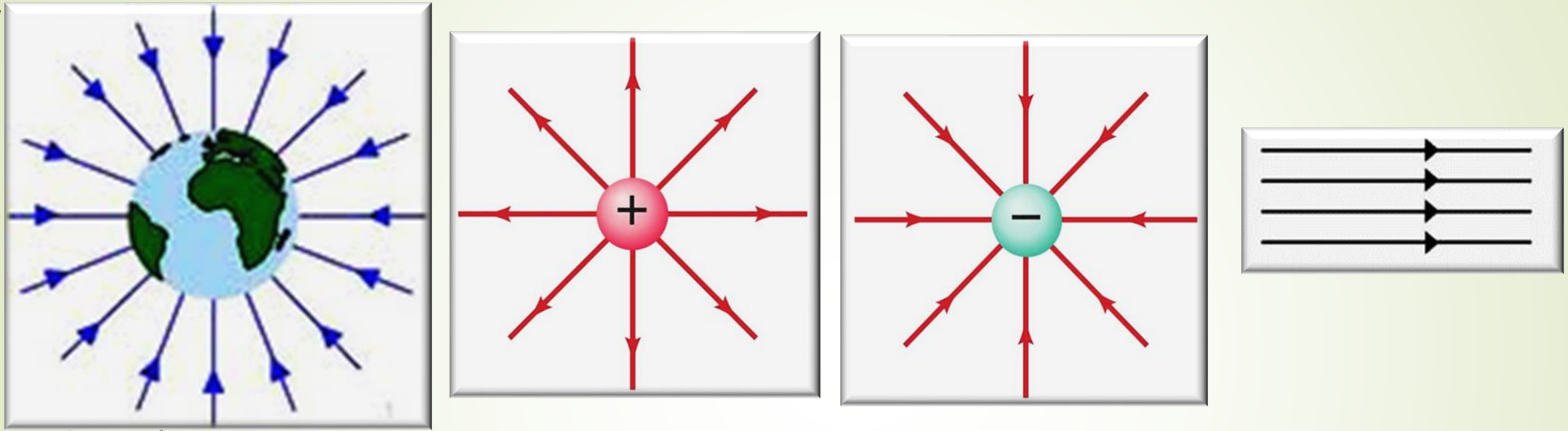
……και στο εσωτερικό της Γης

$$g = g_o\frac{r}{R_\Gamma}$$





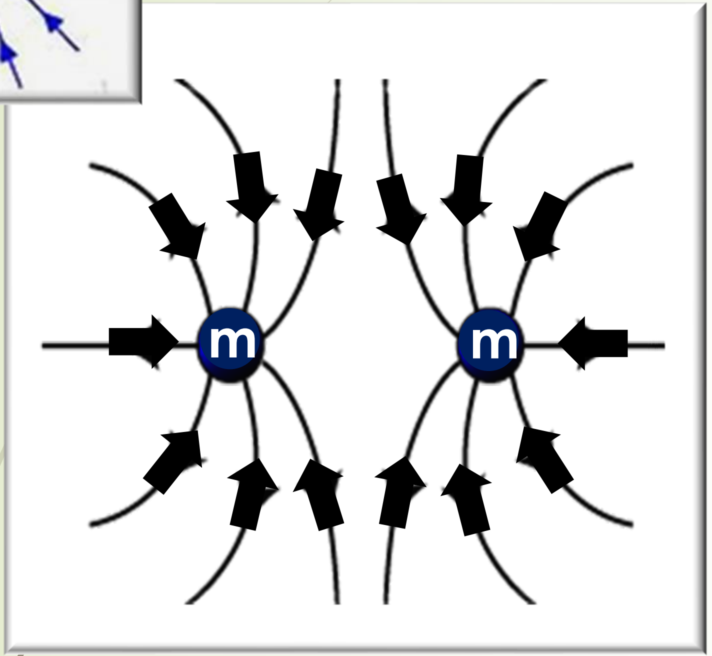
Η Έννοια των Γραμμών του Πεδίου

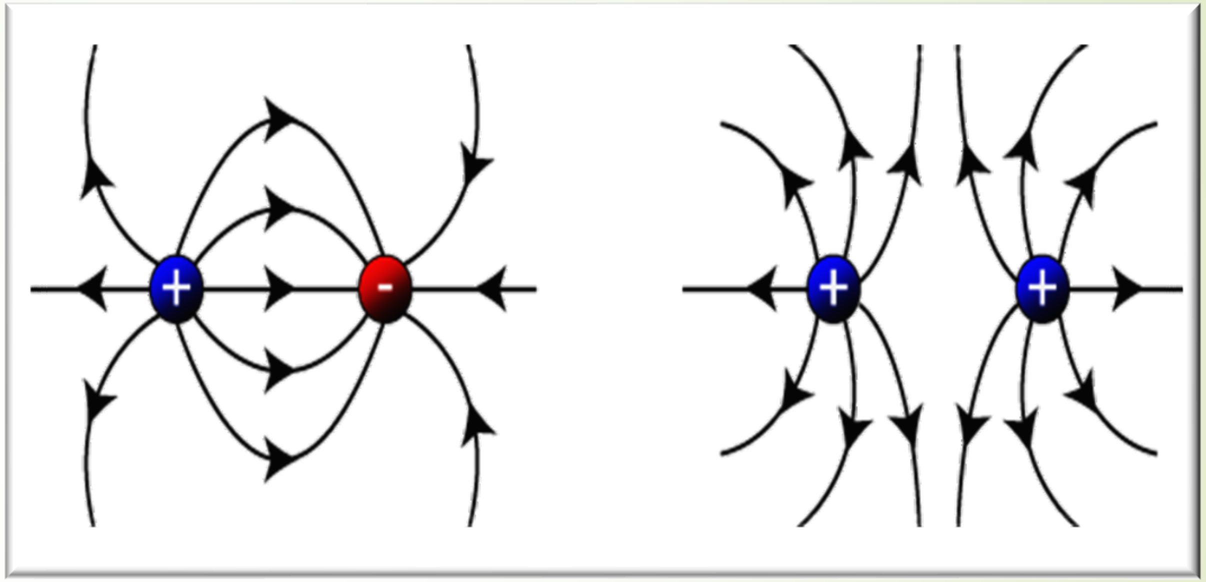


Ομογενέ
ς Πεδίο

- ✓ **Οι γραμμές ενός πεδίου έχουν αρχή (ή τέλος) την πηγή παραγωγής του πεδίου.**
- ✓ **Το διάνυσμα της έντασης του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της γραμμής.**
- ✓ **Οι γραμμές δεν τέμνονται.**
- ✓ **Είναι ανοικτές (υπάρχουν και κλειστές;).**
- ✓ **Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου στο χώρο αυτό.**

Η Έννοια των Γραμμών του Πεδίου





- ✓ Οι γραμμές ενός πεδίου έχουν αρχή (ή τέλος) την πηγή παραγωγής του πεδίου.
- ✓ Το διάνυσμα της έντασης του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της γραμμής.
- ✓ Οι γραμμές δεν τέμνονται.
- ✓ Είναι ανοικτές (υπάρχουν και κλειστές;).
- ✓ Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου στο χώρο αυτό.

Προβλήματα υπολογισμού έντασης Πεδίου από διακριτές πηγές

Διακριτές πηγές του πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Μία Πηγή

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Δύο ή περισσότερες Πηγές

$$g_1 = G\frac{M_1}{r_1^2}$$

$$g_2 = G\frac{M_2}{r_2^2}$$

Διανυσματικό άθροισμα

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots$$

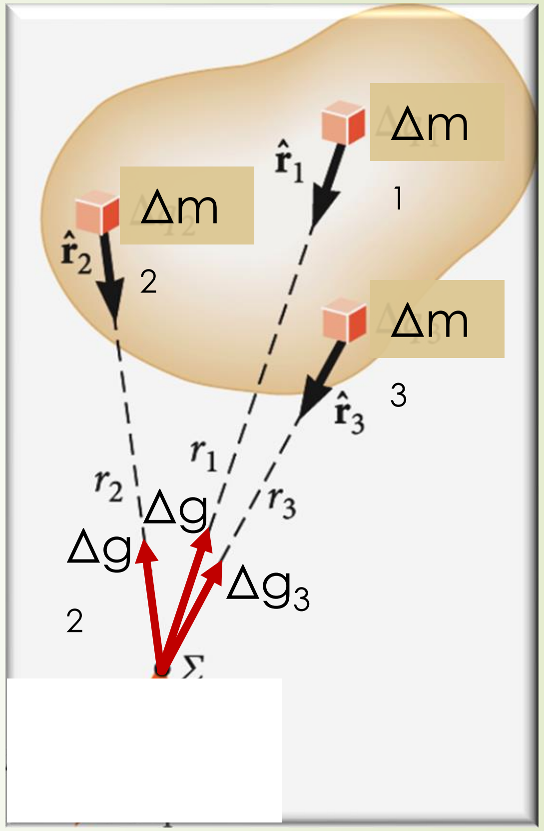
G = 6.673χ10^{-11} m^{3}Kg^{-1}s^{-2}

Συνεχείς κατανομές πηγών του πεδίου

Συνεχείς Κατανομές πηγών του πεδίου

▶**Μεθοδολογία:**

- **Διαιρούμε την κατανομή μάζας σε στοιχειώδεις μάζες, κάθε μια από τις οποίες έχει μάζα dm.**
- **Υπολογίζουμε το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί κάθε μια από αυτές τις στοιχειώδεις μάζες στο σημείο Σ.**
- **Υπολογίζουμε το συνολικό πεδίο αθροίζοντας τις συνεισφορές όλων των στοιχειωδών μαζών.**



Βαρυτικό Πεδίο

Πάρα πολλές....
(Συνεχής Κατανομή)

$$\vec{g} = G\int \frac{dm}{r^2}\hat{r}$$

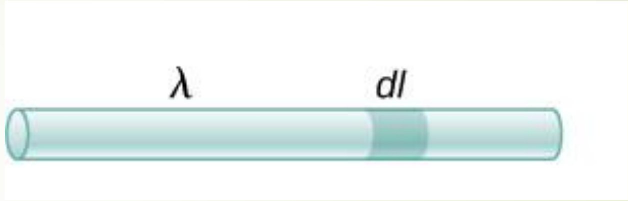
G = 6.673x10^{-11} m^{3}Kg^{-1}s^{-2}

Συνεχείς Κατανομές πηγών του πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Γραμμική ομοιόμορφη κατανομή

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}}$$

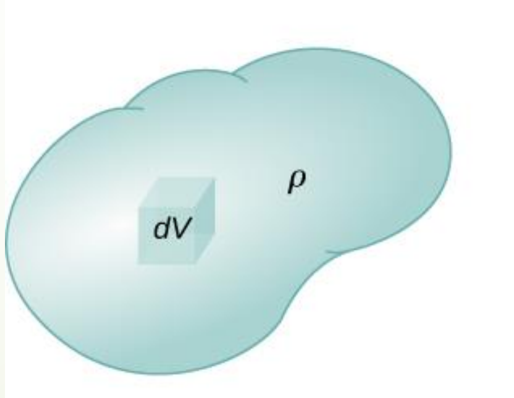


Επιφανειακή ομοιόμορφη κατανομή

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{S_{(\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o})}}$$

Χωρική ομοιόμορφη κατανομή

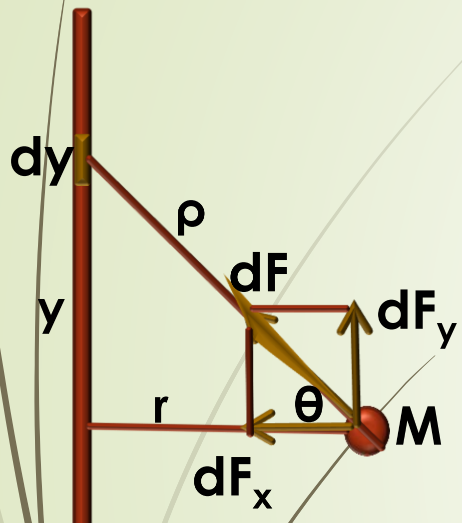
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V_{(\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma)}}$$

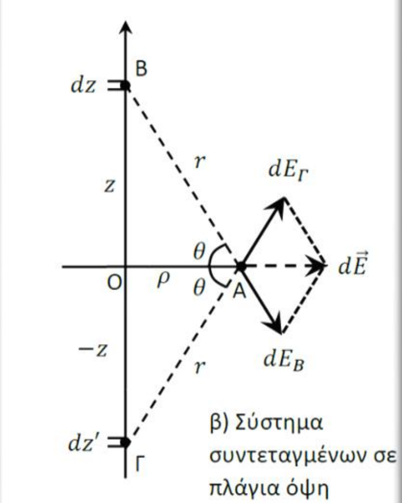


Μη ομοιόμορφη κατανομή:

ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΜΑΖΑΣ

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου - Συνεχείς Κατανομές Πηγών





β) Σύστημα συντεταγμένων σε πλάγια όψη

Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί λεπτή ομογενής ευθύγραμμη ράβδος με σταθερή γραμμική πυκνότητα μάζας, λ, σε σωμάτιο μάζας M που βρίσκεται σε απόσταση r από τη ράβδο. Η ράβδος εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δυο της κατευθύνσεις.

Λύση

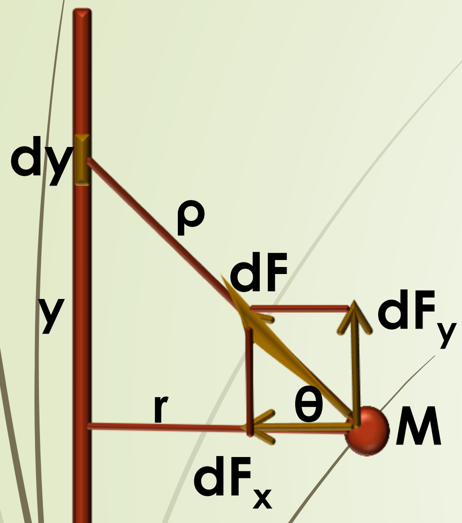
Η δύναμη είναι ελκτική και για λόγους συμμετρίας κατευθύνεται κάθετα προς τη ράβδο. Η στοιχειώδης μάζα $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}y$ ασκεί στη μάζα M τη στοιχειώδη δύναμη $\mathrm{d}\vec{F}$. Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{d}F = GM\frac{\mathrm{d}m}{\rho^2} = GM\frac{\lambda\, dy}{\rho^2}.$$

Επειδή δεν υπάρχει συνιστώσα δύναμης παράλληλη στη ράβδο, για τις απόλυτες τιμές ισχύει $F = F_x$. Επομένως θα υπολογίσομε το μέτρο (απόλυτη τιμή) της προβολής της δύναμης.

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου - Συνεχείς Κατανομές Πηγών

Συνέχεια…..



Για τη στοιχειώδη προβολή ισχύει

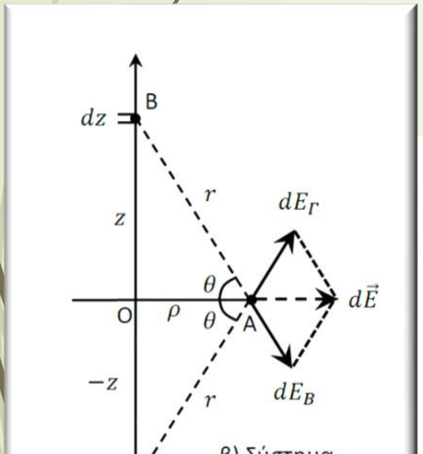
$$dF_x = dF\cos\theta = GM\lambda\frac{dy}{\rho^2}\cos\theta \text{, όμως } \tan\theta = \frac{y}{r}\text{, } dy = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta\text{, } \rho = r/\cos\theta\text{.}$$

$dF_x = \dfrac{GM\lambda}{r}\cos\theta d\theta$. Επειδή υπάρχει συμμετρία, η δύναμη που ασκεί το κάτω μισό της ράβδου είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το πάνω μισό, έτσι ολοκληρώνομε από $\theta = 0$ μέχρι $\theta = \pi/2$ και έχομε

$$F = F_x = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^1 d(\sin\theta)$$

άρα $F = 2\dfrac{GM\lambda}{r}$.

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

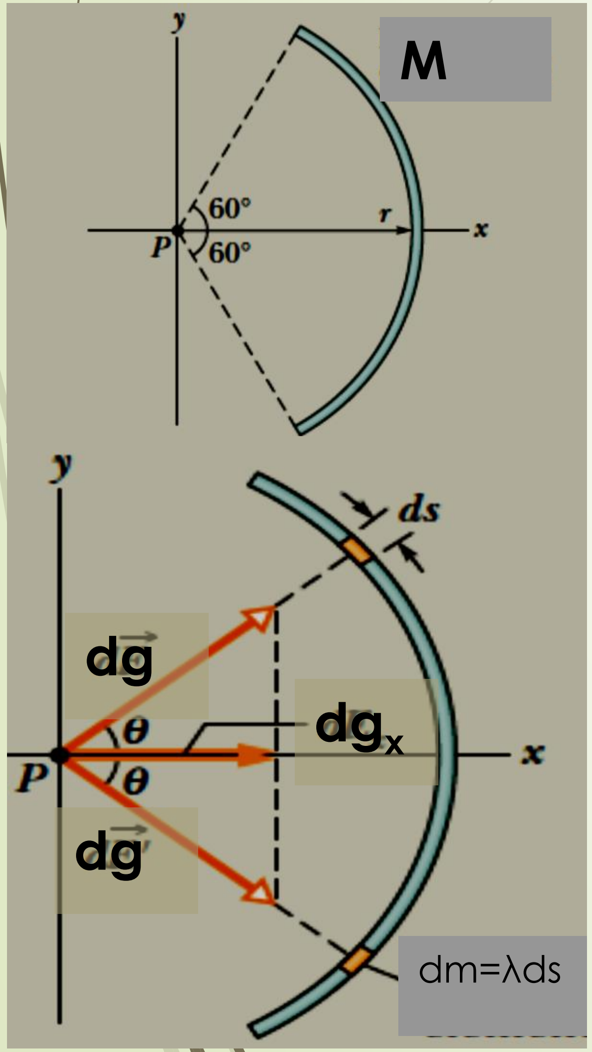


β) Σύστημα συντεταγμένων σε πλάγια όψη

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης-Πεδίου Συνεχείς Κατανομές

Δίνεται η ομοιόμορφη γραμμική κατανομή μάζας M και ακτίνας R όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου στο σημείο P.

Λύση



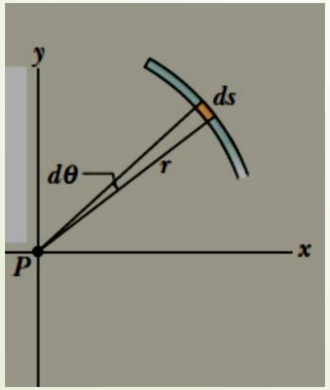
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{2\pi R/3} = \frac{3M}{2\pi R}$$

$$dg = G\frac{dm}{r^2}$$

$$dg_x = G\frac{dm}{R^2}\cos\vartheta \Rightarrow dg_x = G\frac{\lambda ds}{R^2}\cos\theta \Rightarrow dg_x = G\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\cos\theta \Rightarrow dg_x = G\frac{\lambda}{R}\cos\theta d\theta$$

$$\int dg_x = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} G\frac{\lambda}{R}\cos\theta d\theta \Rightarrow g_x = G\frac{\lambda}{R}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\theta d\theta \Rightarrow g_x = G\frac{\lambda}{R}\sin\theta\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} \Rightarrow g_x = G\frac{\lambda}{R}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow$$

$$g_x = G\frac{\lambda}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow g_x = \sqrt{3}G\frac{\lambda}{R} \Rightarrow g_x = \sqrt{3}G\frac{1}{R}\frac{3M}{2\pi R} \Rightarrow g_x = \frac{3\sqrt{3}GM}{2\pi R^2}$$



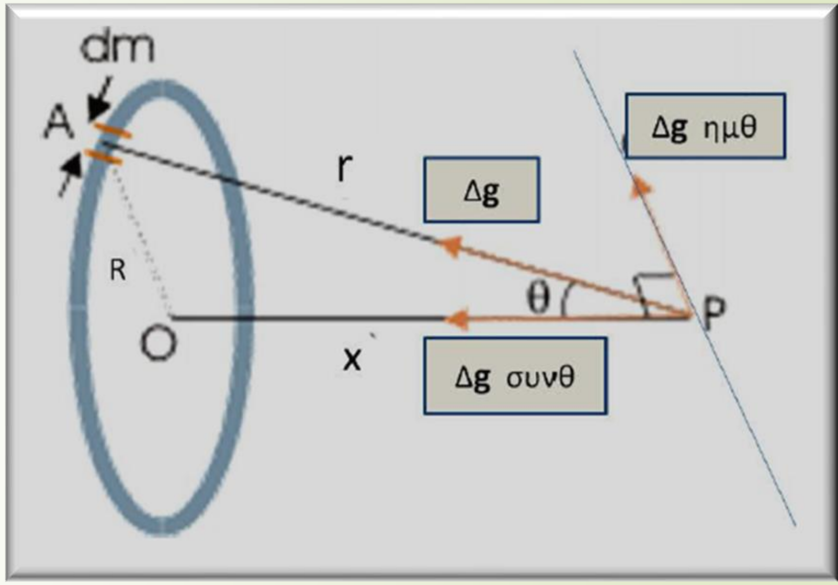
$$\boxed{\vec{g} = g_x\hat{i} = \frac{3\sqrt{3}GM}{2\pi R^2}\hat{i}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομοιόμορφη κατανομή μάζας M σε σχήμα δακτυλίου ακτίνας α. Να υπολογίσετε την ένταση του Βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δακτυλίου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση

$$g = G\int \frac{dm}{r^2}$$



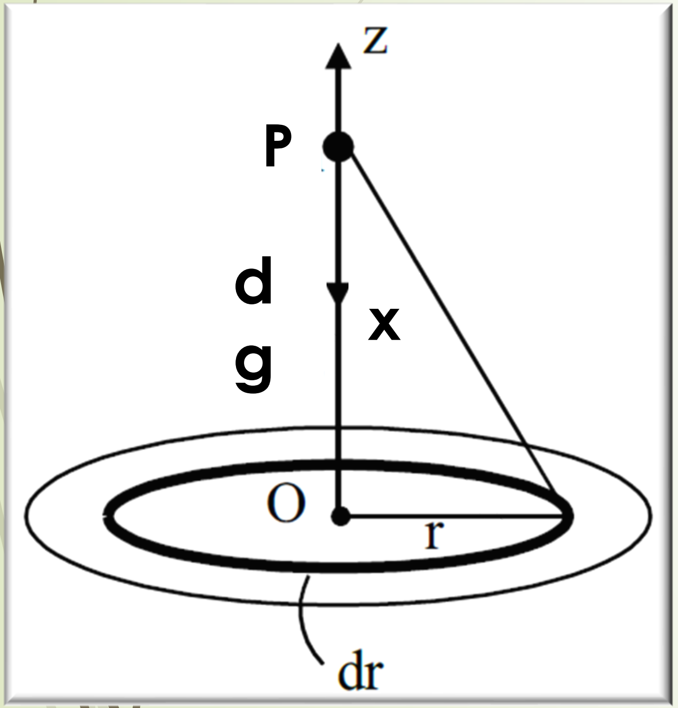
$$g = G\int \frac{dm}{r^2} \Rightarrow g_x = G\int \frac{dm}{r^2}\cos\theta \Rightarrow g_x = G\int \frac{dm}{R^2 + x^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$g_x = \frac{G}{R^2 + x^2}\frac{x}{r}\int dm \Rightarrow g_x = \frac{G}{R^2 + x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\int dm \Rightarrow g_x = \frac{MGx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση



$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$

Ο δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως μία **επαλληλία** από δακτυλίους ακτίνας r. Αλλά για το δακτύλιο έχουμε ήδη υπολογίσει την ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί στο σημείο P.

$$g = \frac{GMx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Άρα κάθε δακτύλιος συνεισφέρει στην ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί ο δίσκος κατά:

$$dg = \frac{Gdmx}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow dg = \frac{G\sigma 2\pi rxdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

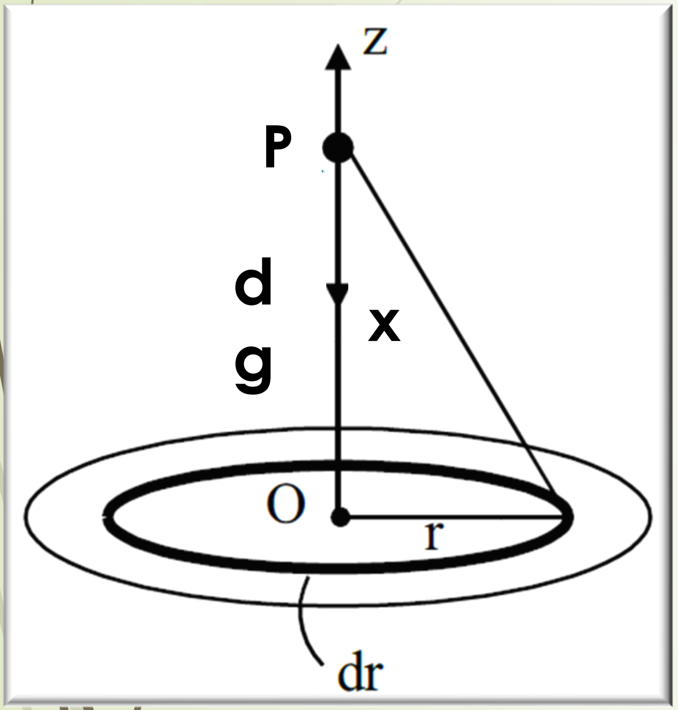
Επομένως:

$$g = \int dg = \int_0^R \frac{G\sigma 2\pi rxdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow g = \pi G\sigma x \int_0^R \frac{2rdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση-Συνέχεια…



$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$g = \int dg = \int_0^R \frac{G\sigma 2\pi r x dr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow g = \pi G \sigma x \int_0^R \frac{2rdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Θέτουμε: $z = r^2 + x^2 \Rightarrow dz = 2rdr$

$$g = \pi G \sigma x \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{dz}{(z)^{3/2}} \Rightarrow g = \pi G \sigma x \int_{x^2}^{x^2+R^2} z^{-3/2} dz \Rightarrow g = \pi G \sigma x \left. \frac{z^{-1/2}}{-1/2} \right|_{x^2}^{x^2+R^2} \Rightarrow$$

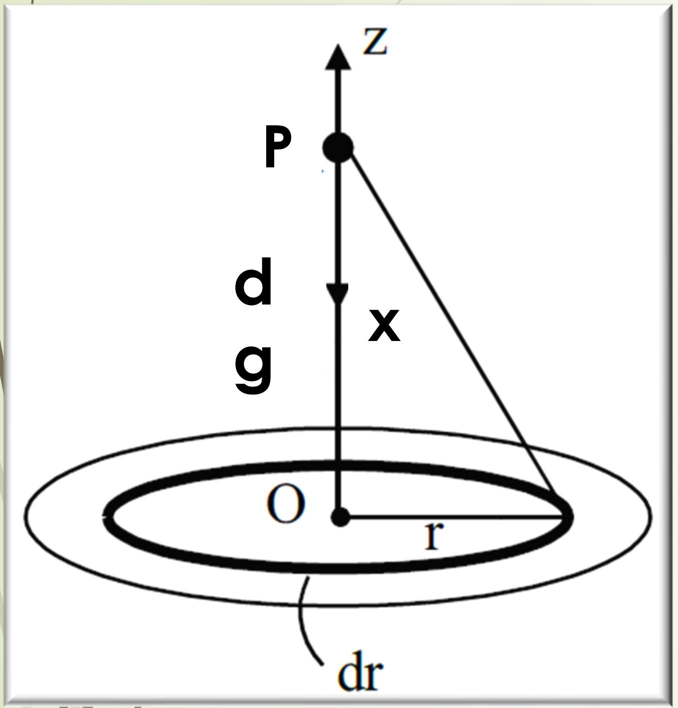
$$g = -2\pi G \sigma x \, z^{-1/2} \Big|_{x^2}^{x^2+R^2} \Rightarrow g = -2\pi G \sigma x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) \Rightarrow$$

$$g = 2\pi G \frac{M}{\pi R^2} x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) \Rightarrow \boxed{g = \frac{2GM}{R^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση-Συνέχεια…



$$g = \frac{2GM}{R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα R του δίσκου είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση x . Αυτό σημαίνει ότι η επιφάνεια του δίσκου εκτείνεται στο άπειρο. Τότε:

$$g = \frac{2GM}{R^2}\left(1 - \cancelto{0}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}}\right) \quad g = \frac{2G\sigma\pi R^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{g = 2G\pi\sigma}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$

Επομένως το πεδίο είναι ομογενές.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ομογενής επιφανειακή κατανομή μάζας απείρων διαστάσεων δημιουργεί ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΕΔΙΟ.

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \int_B^A dU = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \int_B^A dU = -\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow dU = -\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

$$dU = -F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

ΒΑΘΜΙΔΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad F_y = -\frac{dU}{dy} \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας ενός σωματίου:

$$U(x,y) = 3x^3y - 7x$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F σε ένα τυχαίο σημείο (x,y) που δέχεται το σωμάτιο.

Λύση

Υπολογίσουμε κάθε παράγωγο ξεχωριστά

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(3x^3y - 7x) = -(9x^2y - 7)$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(3x^3y - 7x) = -(3x^3 - 0) = -3x^3$$

$$\vec{F} = -(9x^2y - 7)\hat{\imath} - 3x^3\hat{\jmath}$$

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad F_y = -\frac{dU}{dy} \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας μιας μάζας M μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο.

$$U(x,y,z) = 3x^2y + 2xz - xyz^2$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκείται στη μάζα M από το βαρυτικό πεδίο.

Λύση

Υπολογίσουμε κάθε παράγωγο ξεχωριστά

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(6xy + 2z - yz^2)$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(3x^2 - xz^2)$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(2x - 2xyz)$$

$$\vec{F} = -(6xy + 2z - yz^2)\hat{\imath} - (3x^2 - xz^2)\hat{\jmath} - (2x - 2xyz)\hat{k}$$

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad F_y = -\frac{dU}{dy} \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας μιας μάζας Μ που βρίσκεται σε μια τυχαία θέση στο γήινο βαρυτικό πεδίο.

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκείται στη μάζα m από το γήινο βαρυτικό πεδίο.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow F_r = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow$$

$$F_r = GMm\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow F_r = -GMm\frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \qquad \vec{F}_r = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Νόμος της Παγκόσμιας έλξης

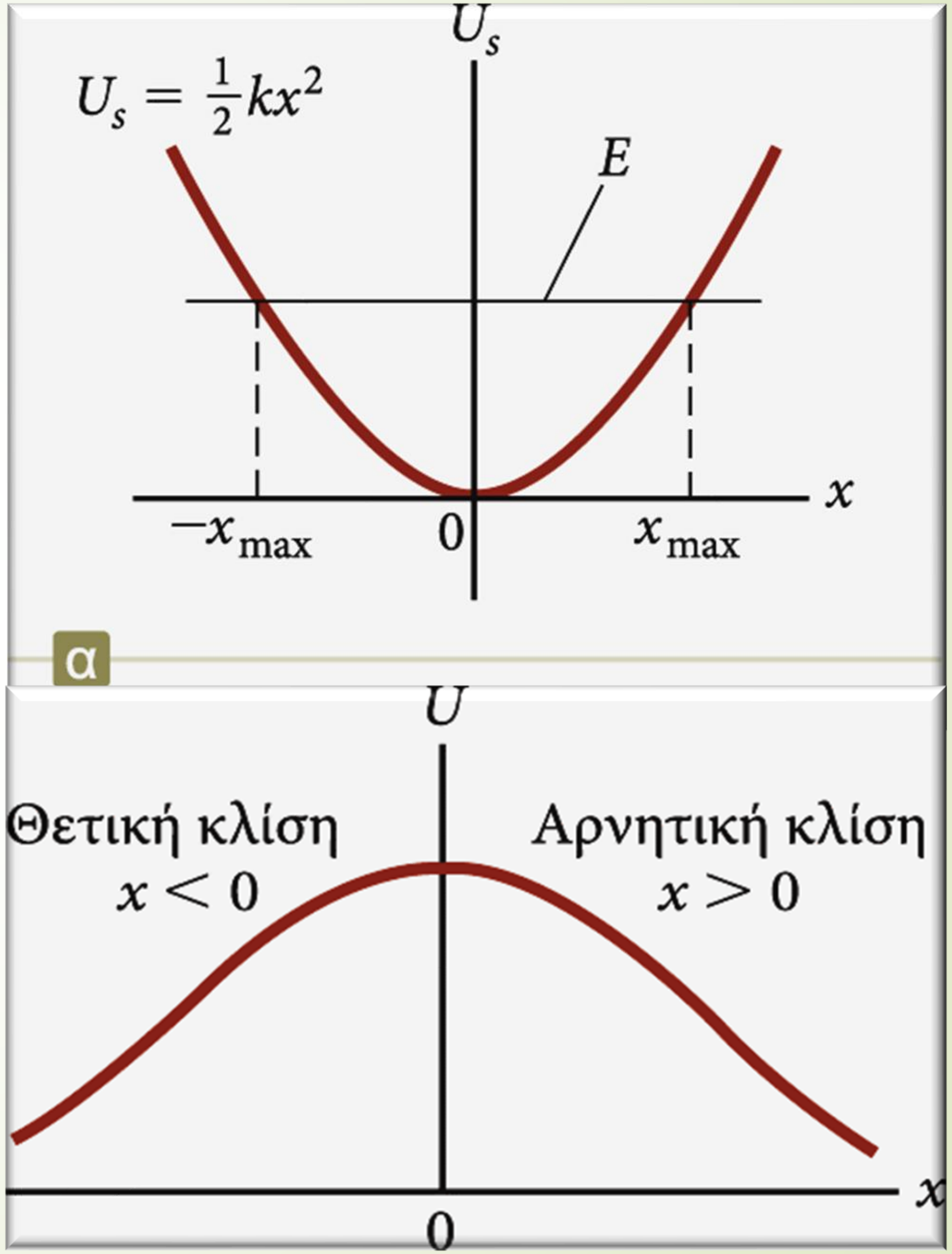
Διαγράμματα Δυναμικής Ενέργειας

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-1

- Η θέση x = 0 είναι θέση ***ευσταθούς ισορροπίας***.
  - Οποιαδήποτε μετατόπιση μακριά από τη συγκεκριμένη θέση προκαλεί μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη θέση x = 0.
- Οι διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στις θέσεις εκείνες για τις οποίες η *U*(x) έχει ελάχιστη τιμή.

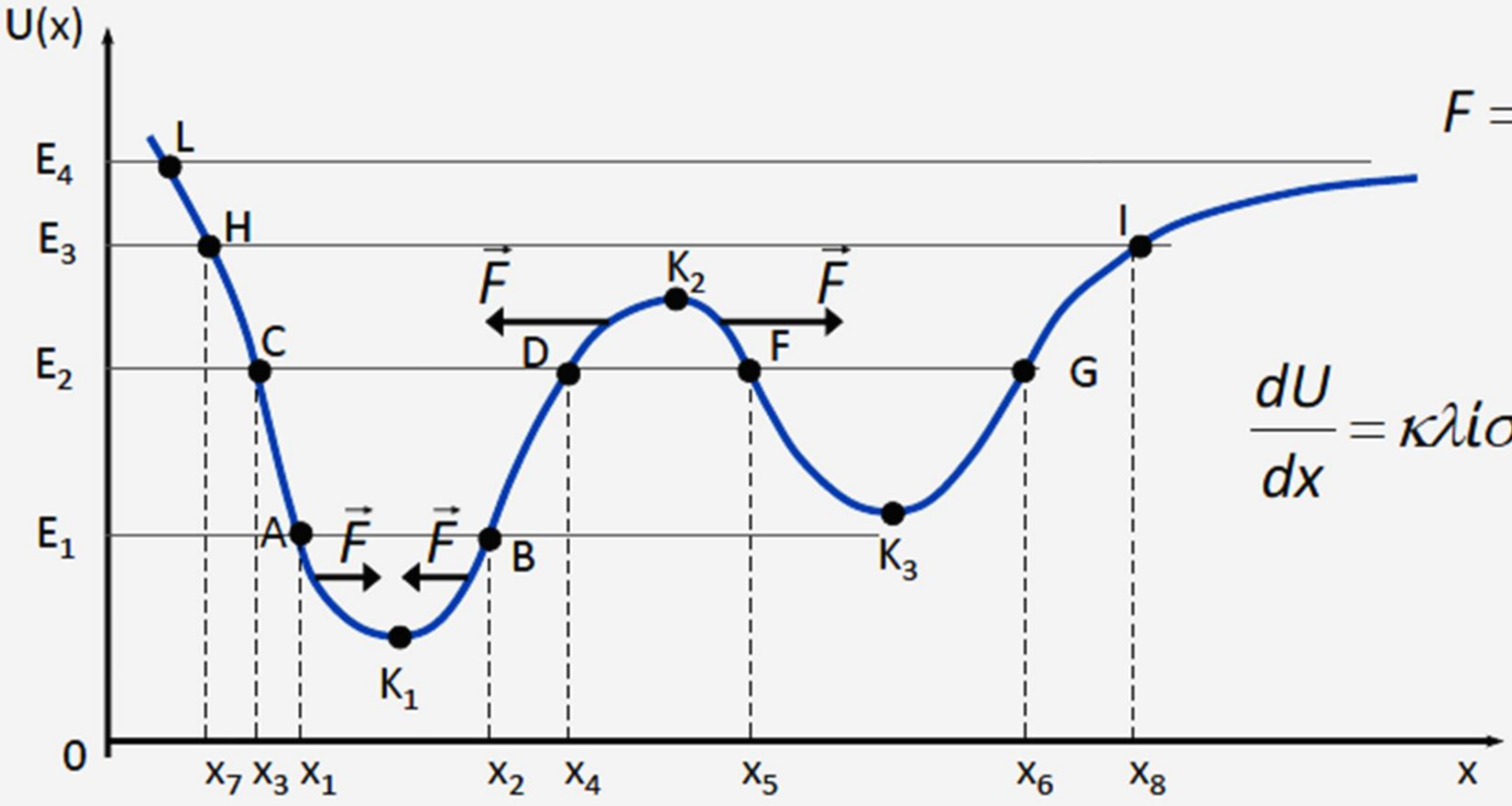
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

- Στη θέση x = 0, $F_x = 0$, άρα το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία.
- Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x, το σωματίδιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.
- Αυτό είναι ένα παράδειγμα ***ασταθούς ισορροπίας***.
- Οι διατάξεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε εκείνες τις θέσεις για τις οποίες η *U*(x) έχει μέγιστη τιμή.



Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-2

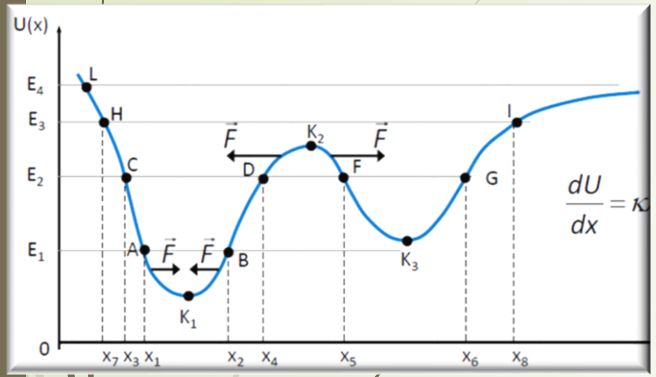
- Με τη βοήθειά τους κατανοούμε την κίνηση των σωματιδίων χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση κίνησής τους



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dU}{dx} = \textit{κλίση της καμπύλης}$$

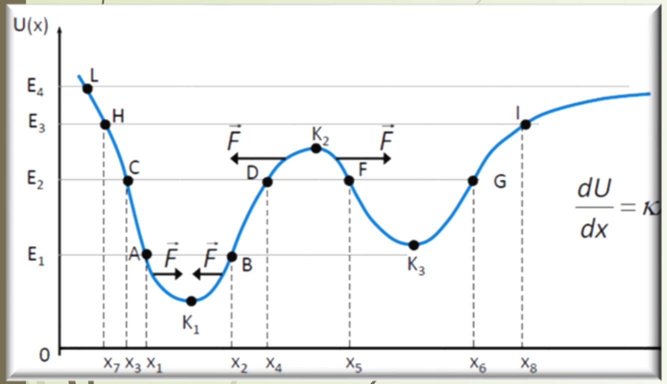
Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-3



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Αυξανομένου του x, όταν η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, η κλίση είναι θετική κι επομένως $F = -\frac{dU}{dx} < 0 \quad (\vec{F} \to -x)$
  Ενώ αν η δυναμική ενέργεια μειώνεται η κλίση είναι αρνητική και επομένως
  $$F = -\frac{dU}{dx} > 0 \quad \left(\vec{F} \to +x\right)$$
- Στα σημεία K_1, K_2, K_3 : $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0$ και αποτελούν θέσεις ισορροπίας.
- Στα K_1, K_3: η καμπύλη έχει ελάχιστο και τα K_1, K_3 είναι θέσεις **ευσταθούς ισορροπίας**
- Δηλαδή αν το σωματίδιο που βρίσκεται στις αντίστοιχες θέσεις στον άξονα x, απομακρυνθεί κατά λίγο απ’ αυτές, οι δυνάμεις F δρουν σαν δυνάμεις επαναφοράς και το επαναφέρουν στη θέση ισορροπίας

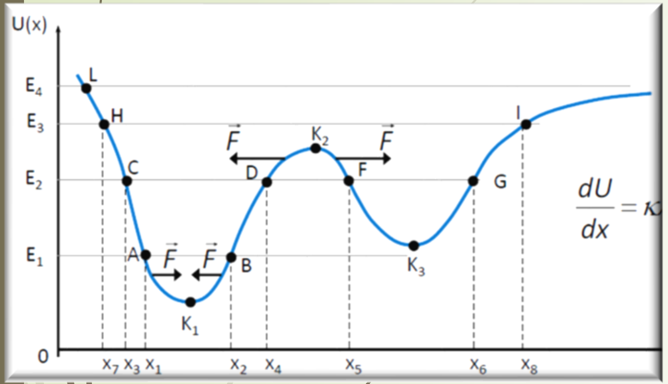
Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-4



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Στο K_2 η καμπύλη έχει μέγιστο. Το K_2 είναι θέση **ασταθούς ισορροπίας**. Δηλαδή αν κατά λίγο το σωματίδιο απομακρυνθεί απ' αυτή, οι ασκούμενες δυνάμεις το απομακρύνουν οριστικά.
- Έστω ότι δίνεται η ολική μηχανική ενέργεια E_1, όπως στο σχήμα. Αυτή τέμνει την καμπύλη στα A και B. Επειδή είναι $K_1=E_1-U_1>0$, το σωματίδιο **δε μπορεί να κινηθεί αριστερά του A**. Επομένως πρέπει $x>x_1$. Όμως **δεν μπορεί να κινηθεί και δεξιά του B** γιατί τότε θα ήταν $K<0$. Επομένως $x<x_2$ και το σώμα θα κάνει ταλάντωση μεταξύ των δύο αυτών των θέσεων
- Τα A και B λέγονται σημεία **αναστροφής**. Όταν το σωματίδιο φτάσει στις αντίστοιχες θέσεις x_1, x_2 η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται και το σωματίδιο αντιστρέφει την κίνησή του

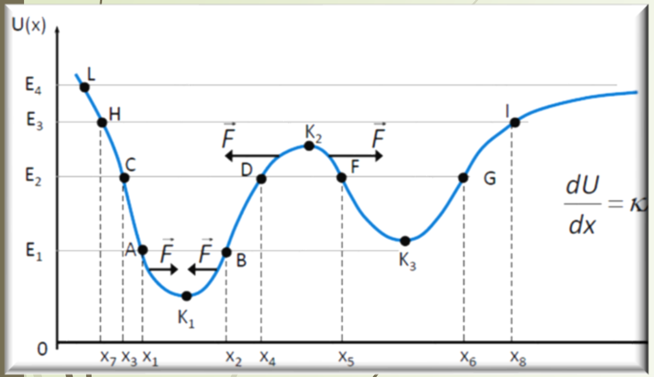
Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-5



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Αν η ολική μηχανική ενέργεια είναι E_2, το σωματίδιο **δεν μπορεί να κινηθεί αριστερά του C και δεξιά του G** γιατί η κινητική του ενέργεια θα ήταν $K_2=E_2-U_2<0$. Ομοίως **δεν μπορεί να κινηθεί μεταξύ των D και F**. Δηλαδή πρέπει $x_3<x<x_4$ και $x_5<x<x_6$. Όταν το σωματίδιο βρίσκεται σε μια απ' αυτές της περιοχές δεν μπορεί να μεταπηδήσει στην άλλη. Επομένως οι δυο επιτρεπόμενες περιοχές χωρίζονται από ένα **φράγμα δυναμικού.**
- Αν $E_{ολ}=E_3$, το σωματίδιο εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των θέσεων x_7 και x_8.
- Αν $E_{ολ}=E_4$, το σωματίδιο δεν κάνει ταλάντωση. Μπορεί να κινείται μόνο δεξιά του L απομακρυνόμενο προς το ∞ . Αν κινείτο προς τα αριστερά, μόλις φτάσει στο L αναπηδά απομακρυνόμενο προς τα δεξιά.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-6



$$F_x=-\frac{dU}{dx}$$

- **Όταν δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας U(r) μπορούν να υπολογιστούν οι θέσεις και το είδος ισορροπίας**

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι:

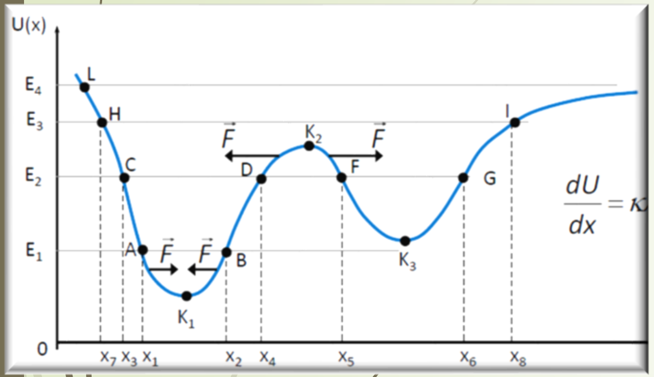
1. Υπολογίζεται η παράγωγος $\frac{dU}{dr}$

2. Η δύναμη είναι $F=-\frac{dU}{dr}$

3. Οι θέσεις ισορροπίας υπολογίζονται θέτοντας F=0

   και έστω ότι είναι η r_1, r_2 και r_3

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-7



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

4. Το είδος ισορροπίας προσδιορίζεται ως εξής:

α) Υπολογίζεται η $\frac{d^2U}{dr^2}$

β) Υπολογίζεται η τιμή της $\frac{d^2U}{dr^2}$ στις θέσεις ισορροπίας r_1, r_2 και r_3

γ) Αν π.χ. $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_1} > 0$ η καμπύλη εμφανίζει ελάχιστο και το r_1 είναι θέση **ευσταθούς** ισορροπίας.

Αν π.χ. $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_2} < 0$ η καμπύλη εμφανίζει μέγιστο και το r_2 είναι θέση **ασταθούς** ισορροπίας

Αν π.χ. $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_3} = 0$ στο r_3 η ισορροπία είναι **αδιάφορη**.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-8

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων είναι:

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) Τις θέσεις ισορροπίας και iii) Το είδος ισορροπίας.

Λύση

i) **Υπολογίσουμε την F(x)**

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = (-x^2 + x + 2)$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = -(-x^2 + x + 2)$$

$$\vec{F} = -(-x^2 + x + 2)\hat{\boldsymbol{\imath}} = (x^2 - x - 2)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

ii) Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται από $\frac{dU}{dx} = 0.$

Οπότε:
$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ Στις θέσεις αυτές η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει **ακρότατα**.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-9

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων είναι:

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) Τις θέσεις ισορροπίας και iii) Το είδος ισορροπίας.

Λύση – Συνέχεια…

iii) **Πρέπει να ελέγξουμε εάν τα ακρότατα αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Επομένως υπολογίζουμε την τιμή της 2ης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις που μηδενίζεται η 1η παράγωγος.**

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)=(-x^2 + x + 2)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x^2 + x + 2)=(-2x + 1)$$

Επομένως για x=2 έχουμε: $\frac{d^2U}{dx^2}$ ==(-2* 2+1)= $-3 < 0$ **ΜΕΓΙΣΤΟ**

για x=-1 έχουμε: $\frac{d^2U}{dx^2}$=(-2* (-1)+1)= $3 > 0$ **ΕΛΑΧΙΣΤΟ**

ΜΕΓΙΣΤΟ:ΘΕΣΗ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ   ΕΛΑΧΙΣΤΟ:ΘΕΣΗ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-10

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων δίδεται από τη σχέση:

$$U(r) = re^{-ar}$$

Όπου α>0 μία σταθερά και r η απόσταση μεταξύ τους. Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) τις θέσεις ισορροπίας και iii) το είδος ισορροπίας.

Λύση

i) $\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dx}(re^{-ar})=(1-ar)e^{-ar}$ $\quad \vec{F_r}=-\frac{dU}{dr}\hat{r} = -(1-ar)e^{-ar}\hat{r} = (ar-1)e^{-ar}\hat{r}$

ii) Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται από $\frac{dU}{dr} = 0.$

Οπότε:

$$(1-ar)e^{-ar} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \infty \\ r = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Στις θέσεις αυτές η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει **ακρότατα**.

iii) **Πρέπει να ελέγξουμε εάν τα ακρότατα αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Επομένως υπολογίζουμε την τιμή της 2ης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις που μηδενίζεται η 1η παράγωγος.**

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left((1-ar)e^{-ar}\right) = \frac{d}{dr}(e^{-ar}) - \frac{d}{dr}(are^{-ar}) = -ae^{-ar} - ae^{-ar} + a^2re^{-ar} = -2ae^{-ar} + a^2re^{-ar}$$

Επομένως για $r = \frac{1}{a}$ έχουμε: $\frac{d^2U}{dr^2} = \left(-2ae^{-\frac{1}{a}a} + a^2\frac{1}{a}e^{-a\frac{1}{a}}\right) = \frac{-2a}{e} + \frac{a}{e} = -\frac{a}{e} < 0$ **ΜΕΓΙΣΤΟ**

ΘΕΣΗ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-11

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

Δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(r) = 2r^3 - 18r$

α) Να υπολογίσετε τη δύναμη F

β) Να βρείτε τις θέσεις ισορροπίας

γ) Να βρείτε το είδος ισορροπίας

δ) Να σχεδιάσετε την $U(r)$

Λύση

α) $\frac{dU}{dr} = 6r^2 - 18 \;,\; F = -\frac{dU}{dr} = -6r^2 + 18$

β) $F = 0 \Rightarrow -6r^2 + 18 = 0 \Rightarrow r_1 = +\sqrt{3} = 1.73 \;,\; r_2 = -\sqrt{3} = -1.73$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-12

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

γ) είδος ισορροπίας $\frac{d^2U}{dr^2} = 12r$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία.}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=-\sqrt{3}} = -12\sqrt{3} < 0 \quad \text{ασταθής ισορροπία}$$

δ) Πότε $U(r) = 0$;

$$2r^3 - 18r = 0 \Rightarrow 2r\left(r^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow r = 0, \quad r = +3, \quad r = -3$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-13

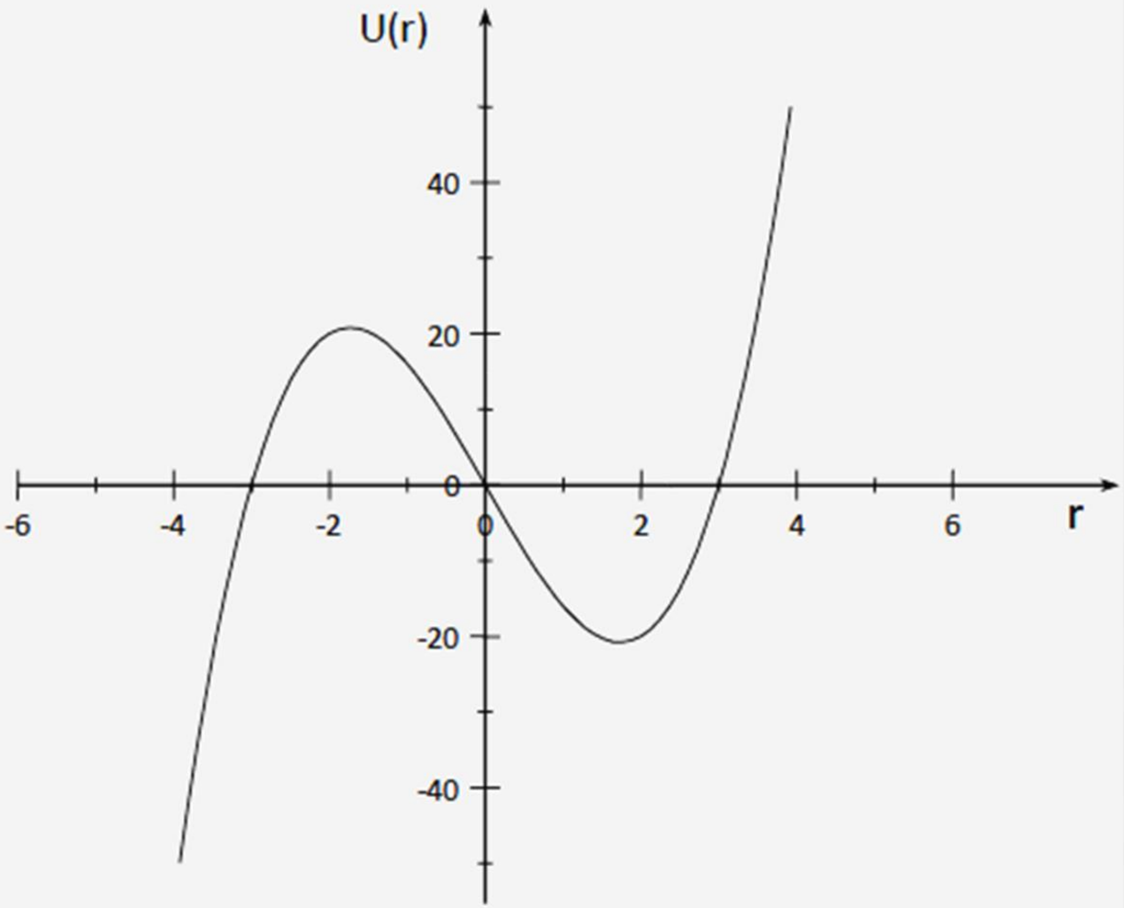
$F_r = -\frac{dU}{dr}$

- Ποιες οι τιμές της $U(r)$ στις θέσεις ισορροπίας;

$$U(r=0)=0$$
$$U\left(r=\sqrt{3}\right)=-12\sqrt{3}=-20.78$$
$$U\left(r=-\sqrt{3}\right)=12\sqrt{3}=20.78$$

$Όταν \quad r \to +\infty \quad U(r) \to +\infty$

$Όταν \quad r \to -\infty \quad U(r) \to -\infty$



Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-14

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

- **Αν** $U(r) = 2r^4 - 4r^2$ **να υπολογιστούν τα ζητούμενα του προηγούμενου παραδείγματος**

Λύση

α) $\frac{dU}{dr} = 8r^3 - 8r \quad F = -\frac{dU}{dr} = -8r^3 + 8r$

β) $F = 0 \Rightarrow -8r^3 + 8r = 0 \Rightarrow r = 0 \;, r = +1 \;, \; r = -1$

γ) είδος ισορροπίας

$$\frac{d^2U}{dr^2} = 24r^2 - 8$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-15

$F_r = -\dfrac{dU}{dr}$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=0} = -8 < 0 \quad \text{ασταθής ισορροπία, μέγιστο}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=+1} = +16 > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία, ελάχιστο}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=-1} = +16 > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία, ελάχιστο}$$

δ) Πότε $U(r) = 0$;

$$2r^4 - 4r^2 = 0 \Rightarrow r^2\left(r^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$r = 0, \quad r = +\sqrt{2} = 1.41, \quad r = -\sqrt{2} = -1.41$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-16

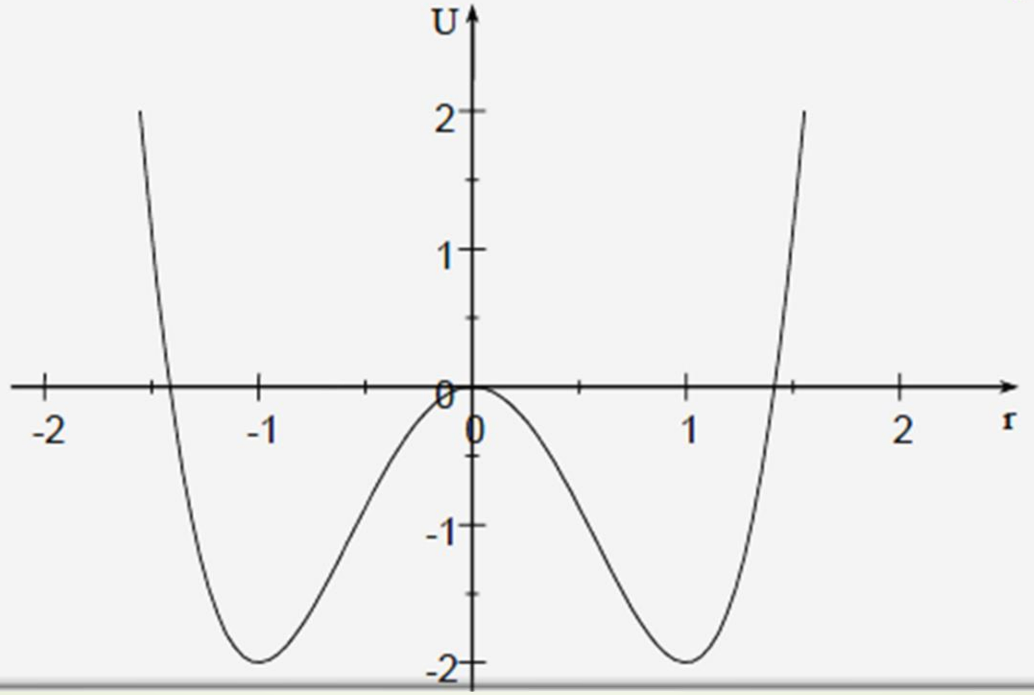
$F_r = -\frac{dU}{dr}$

- Ποιες οι τιμές της $U(r)$ στις θέσεις ισορροπίας;

- $U(r=0)=0$
- $U(r=+1)=-2$
- $U(r=-1)=-2$

Όταν $r \to +\infty$ $U(r) \to +\infty$

Όταν $r \to -\infty$ $U(r) \to +\infty$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Η Δυναμική Ενέργεια που σχετίζεται με τη δύναμη μεταξύ δύο ουδέτερων ατόμων σε ένα μόριο δίδεται από τη σχέση:

$$\mathrm{U}(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

Όπου ε και σ δύο σταθερές, μεγαλύτερες του μηδενός. Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης,
ii) τις θέσεις ισορροπίας και iii) το είδος ισορροπίας.

2) Σε ένα σωμάτιο ασκείται συντηρητική δύναμη της μορφής: $\vec{\mathbf{F}} = \left(-Ax + Bx^2\right)\hat{\imath}$. i) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σωματίου σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει από την αρχή των αξόνων (χ=0) απόσταση Χ. Δίδεται U=0 J για x=0m. ii) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU του σωματίου καθώς μετακινείται από την θέση x=2m στη θέση x=3m. iii) να υπολογίσετε επίσης τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας ΔΚ.

3) Ένα σωμάτιο μάζας m=4Kgr κινείται κατά τον άξονα x. Η θέση του περιγράφεται από την εξίσωση:
$x = t + 2t^3$, όπου το x είναι μέτρα και το t σε sec. Να υπολογίσετε: i) Την κινητική του ενέργεια μια τυχαία χρονική στιγμή t. ii) Την επιτάχυνσή του a. iii) Τη δύναμη F που εξασκείται σε αυτό και iv) Το έργο που παράγει η δύναμη F κατά το χρονικό διάστημα t=0s έως t=2s.