

# Μηχανική - Ρευστομηχανική

**Διδάσκουσα**

Παναγιώτα Καραχάλιου

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια,

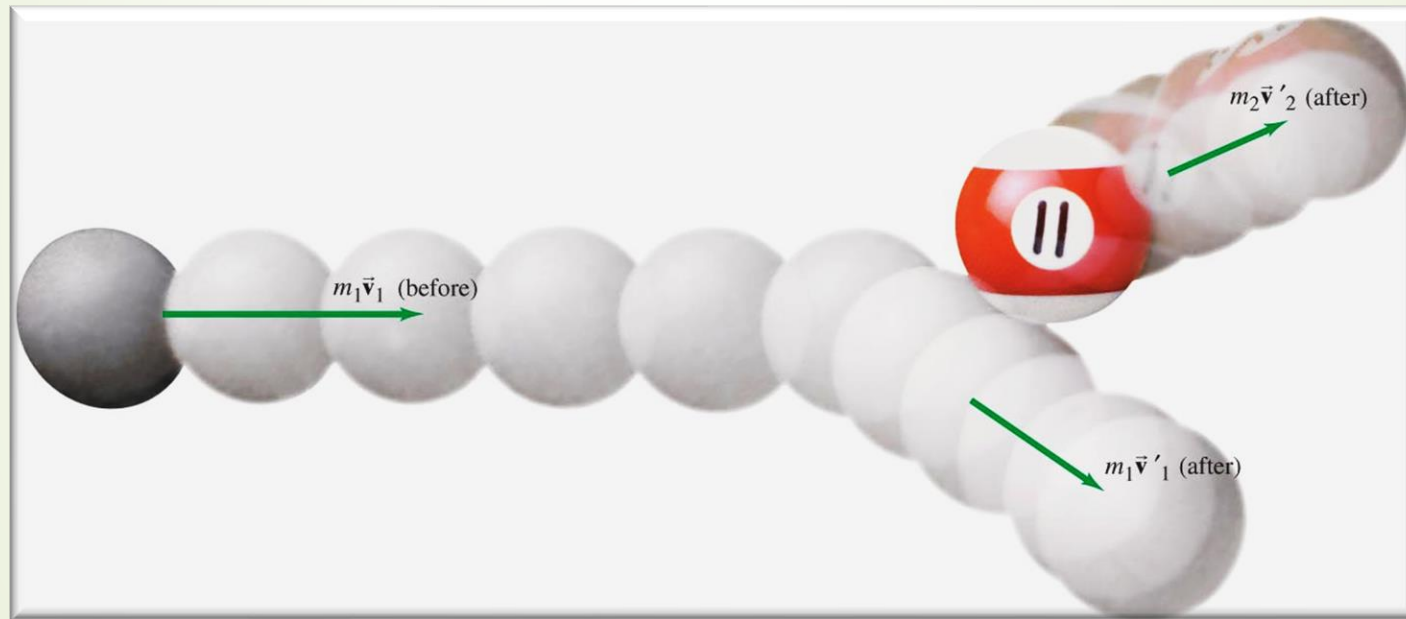
[pkara@upatras.gr](mailto:pkara@upatras.gr)

**Ώρες Γραφείου** (Κτήριο Γ, Ισόγειο)

Συμβουλευτείτε την ιστοσελίδα του  
Τμήματος:

[www.physics.upatras.gr](http://www.physics.upatras.gr)

# Ορμή - Κρούσεις



# Η έννοια της Ορμής

Η ορμή ορίζεται ως διάνυσμα που εκφράζεται από τη σχέση

$$\vec{P} = m\vec{u}$$

Μονάδα Μέτρησης Ορμής : **Kg m/s**

Η φορά του διανύσματος της ορμής είναι αυτή του διανύσματος της ταχύτητας και έχει τρεις συνιστώσες:

$$P_x = m u_x \quad P_y = m u_y \quad P_z = m u_z$$

$$\vec{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}$$

# Η έννοια της Ορμής

$$\vec{P} = m\vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

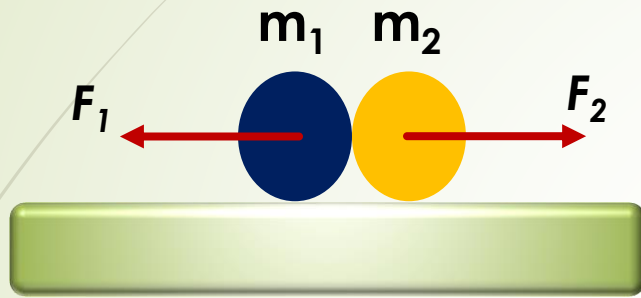
## Γενικευμένος Νόμος του Νεύτωνα

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

### Παράδειγμα

Δίδεται η ορμή ενός σώματος το οποίο κινείται επάνω στον άξονα x από τη σχέση:  $\mathbf{P} = k\mathbf{t}^2$ . Να υπολογιστούν: i) Οι διαστάσεις του μεγέθους k. ii) Η δύναμη F που εξασκείται στο σώμα.

# Η έννοια της Ορμής



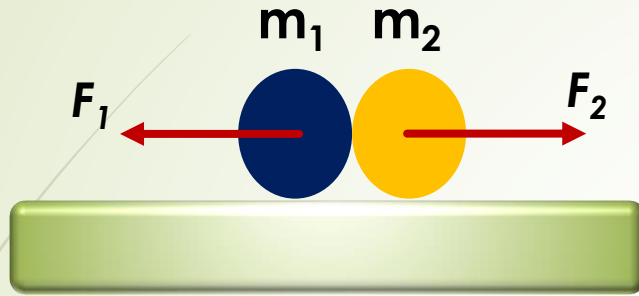
✓ Η έννοια της ορμής είναι πολύ χρήσιμη όταν δύο ή περισσότερα σώματα αλληλεπιδρούν (Σύστημα σωμάτων).

✓ **Εσωτερικές δυνάμεις** εξασκούνται μεταξύ των σωμάτων.

✓ **Εξωτερικές δυνάμεις** εξασκούνται στα σώματα του συστήματος από το περιβάλλον.

Εάν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν τότε το σύστημα σωμάτων ονομάζεται **απομονωμένο**.

# Διατήρηση της Ορμής



Δύο σώματα μαζών  $m_1$  και  $m_2$  κινούνται αντίθετα και συγκρούονται μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι στα δύο σώματα δε δρουν εξωτερικές δυνάμεις. Κατά το χρονικό διάστημα της σύγκρουσής τους εμφανίζονται στα δύο σώματα δυνάμεις Δράσης – Αντίδρασης  $F_1$  και  $F_2$ .

$$\vec{F}_1 = m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt}$$
$$\vec{F}_2 = m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt} \Rightarrow m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d(m_1 \vec{u}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \vec{u}_2)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\vec{P}_1)}{dt} + \frac{d(\vec{P}_2)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{const.}$$

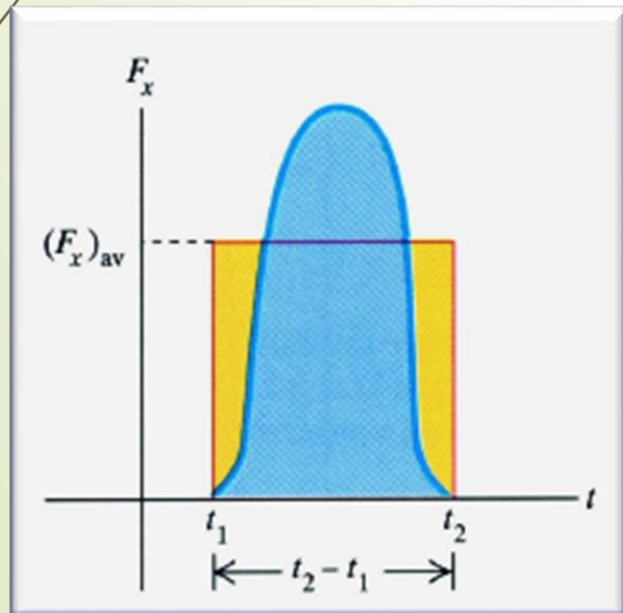
**Θεώρημα διατήρησης της ορμής**

# Ώθηση δύναμης

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\vec{P}$$

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

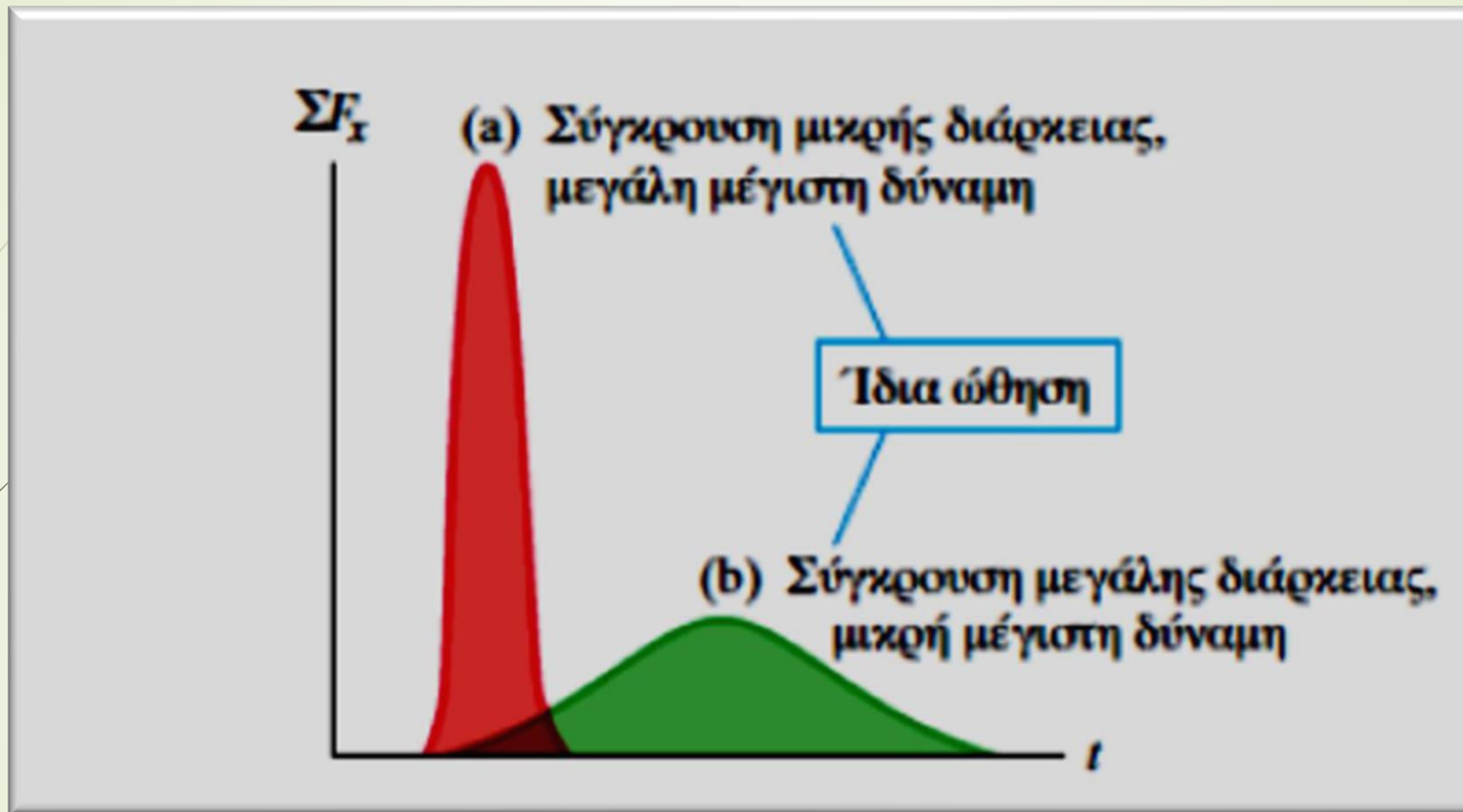
Η Ώθηση  $\Omega$  δύναμης είναι μια διανυσματική ποσότητα στενά συνδεδεμένη με την έννοια της ορμής.



$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{P}$$

Θεώρημα Ώθησης - Ορμής

# Ώθηση δύναμης



$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

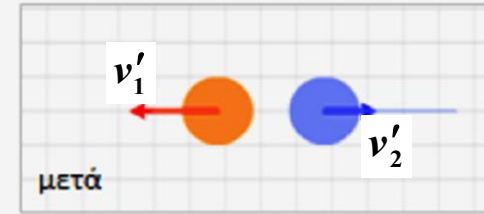
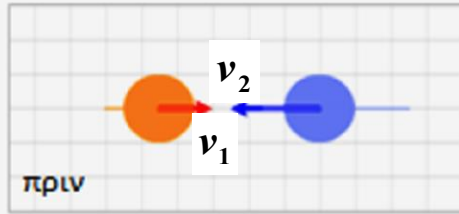
$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{P}$$

# Κρούση σωμάτων

Κρούση ονομάζουμε το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο δύο ή περισσότερα σώματα έρχονται σε επαφή για **πολύ μικρό χρονικό διάστημα**, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται μεταξύ τους **πολύ ισχυρές δυνάμεις**.

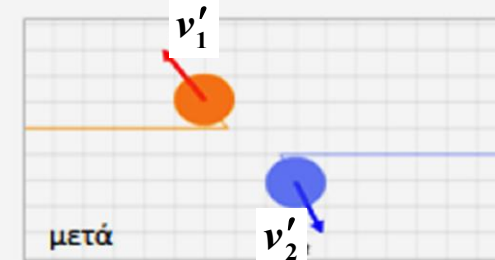
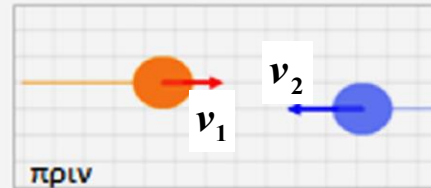
## Κεντρική κρούση

Τα κέντρα μάζας κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση



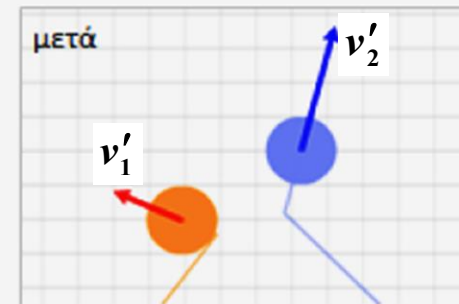
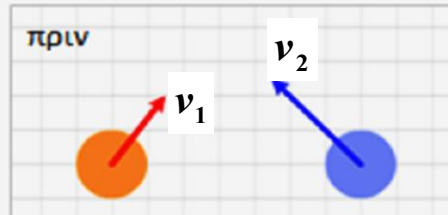
## Έκκεντρη κρούση

Τα κέντρα μάζας κινούνται σε παράλληλες ευθείες πριν την κρούση



## Πλάγια κρούση

Τα κέντρα μάζας κινούνται σε τεμνόμενες ευθείες πριν την κρούση

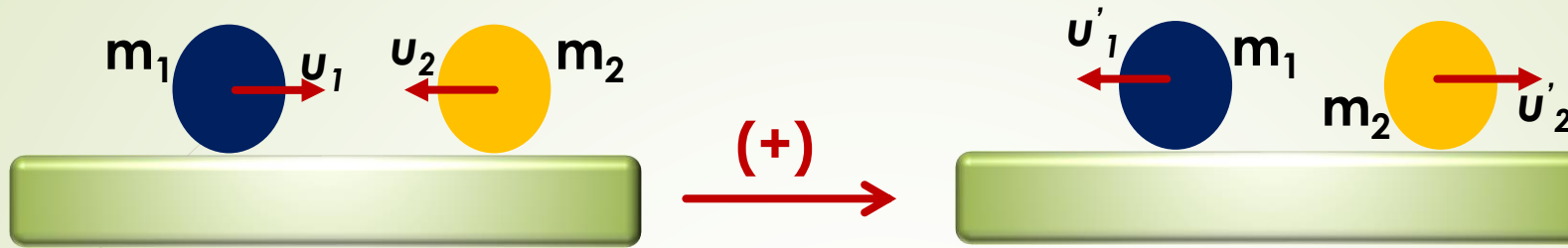


# Κρούση σωμάτων

- **Ελαστική κρούση:** Η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται.
  - **Μη ελαστική κρούση:** Η ολική κινητική ενέργεια δε διατηρείται. Κάποιο ποσοστό της ολικής κινητικής ενέργειας πριν την κρούση χάνεται (μετατρέπεται σε θερμότητα).
  - **Πλαστική Κρούση:** Τα σώματα ενώνονται κατά την κρούση και στη συνέχεια κινούνται μαζί ως ένα σώμα. Η ολική κινητική ενέργεια δε διατηρείται.
- 
- ✓ Η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται πάντα σε κάθε είδος κρούσης (πρέπει πάντα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν).
  - ✓ Η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται μόνο στις ελαστικές κρούσεις.
  - ✓ Η Αρχή διατήρησης της ορμής μας δίνει τρεις εξισώσεις (μία για κάθε διάσταση) καθώς η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος.

***Πάντα ορίζουμε μία θετική φορά για τα διανύσματα των ορμών.***

# Κεντρική κρούση σωμάτων - Ελαστική



$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = m_2 u'_2 - m_1 u'_1$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$$

Λύνουμε το σύστημα δύο εξισώσεων δύο αγνώστων.

$$u'_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2$$

$$u'_2 = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) u_2$$

# Κεντρική κρούση σωμάτων - Ελαστική

$$u'_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2$$
$$u'_2 = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) u_2$$

I) Εάν  $m_1 = m_2 = m$  και  $v_1 = v$  ενώ  $v_2 = 0$  τότε ποιες είναι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση;

$$v'_1 = 0 \quad v'_2 = v$$

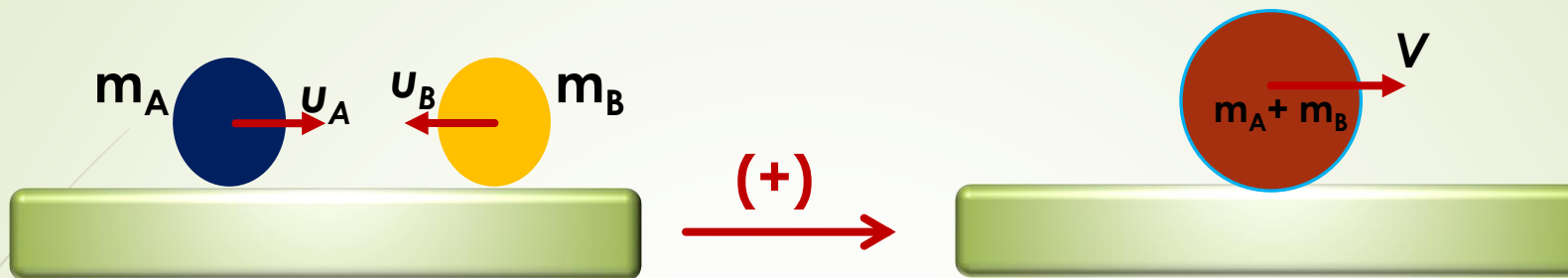
Τα δύο σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

II) Εάν  $m_1 \ll m_2$  και  $v_1 = v$  ενώ  $v_2 = 0$  τότε ποιες είναι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση;

$$v'_1 = -v_1 = -v \quad v'_2 = 0$$

Το πρώτο σώμα αντιστρέφει την κίνησή του και κινείται προς τα πίσω με το ίδιο μέτρο ταχύτητας ενώ το δεύτερο συνεχίζει να παραμένει ακίνητο.

# Κεντρική κρούση σωμάτων - Πλαστική



$$m_A u_A - m_B u_B = (m_A + m_B) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_A u_A - m_B u_B}{m_A + m_B}$$

Πόση κινητική ενέργεια έγινε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης;

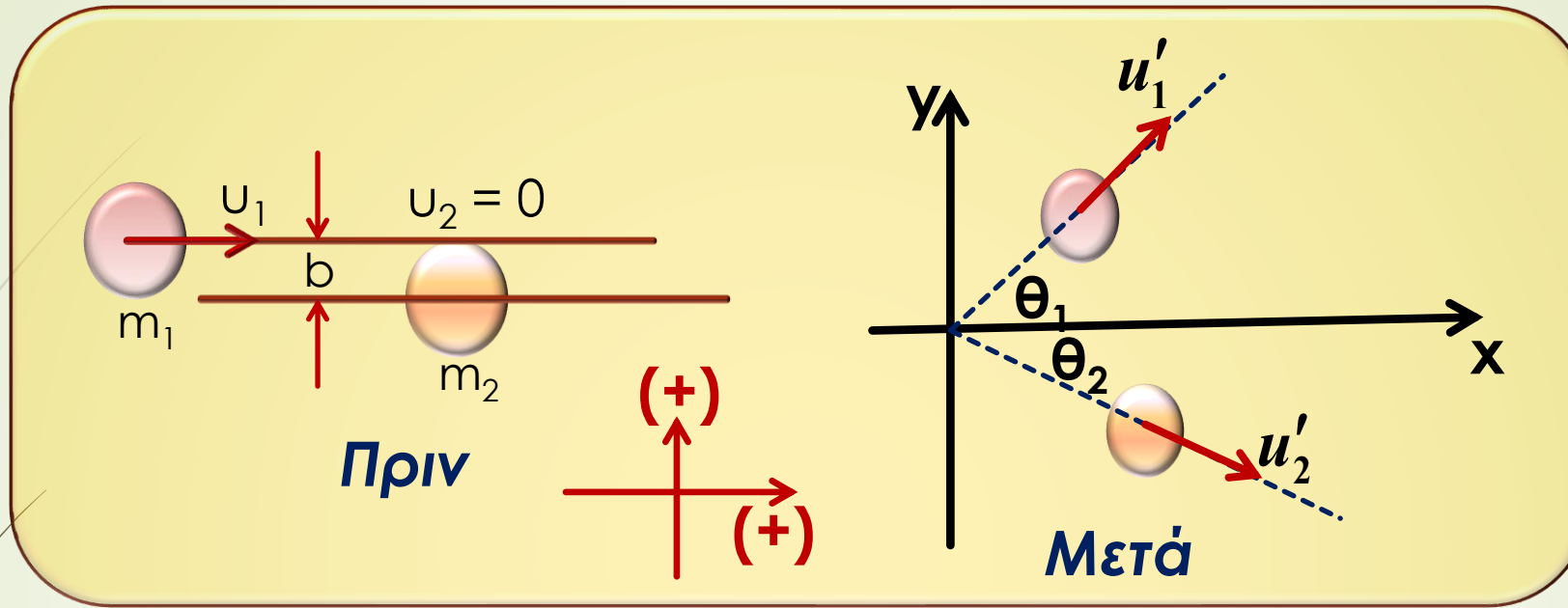
$$K_{\text{πριν}} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2$$

$$K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V^2 \Rightarrow K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) \left( \frac{m_A u_A - m_B u_B}{m_A + m_B} \right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} \frac{(m_A u_A - m_B u_B)^2}{m_A + m_B}$$

$$\Delta K = K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}} > 0$$

# Κρούση σωμάτων - Έκκεντρη



**Άξονας  $x$**

$$m_1 u_1 = m_1 u'_1 \cos \theta_1 + m_2 u'_2 \cos \theta_2$$

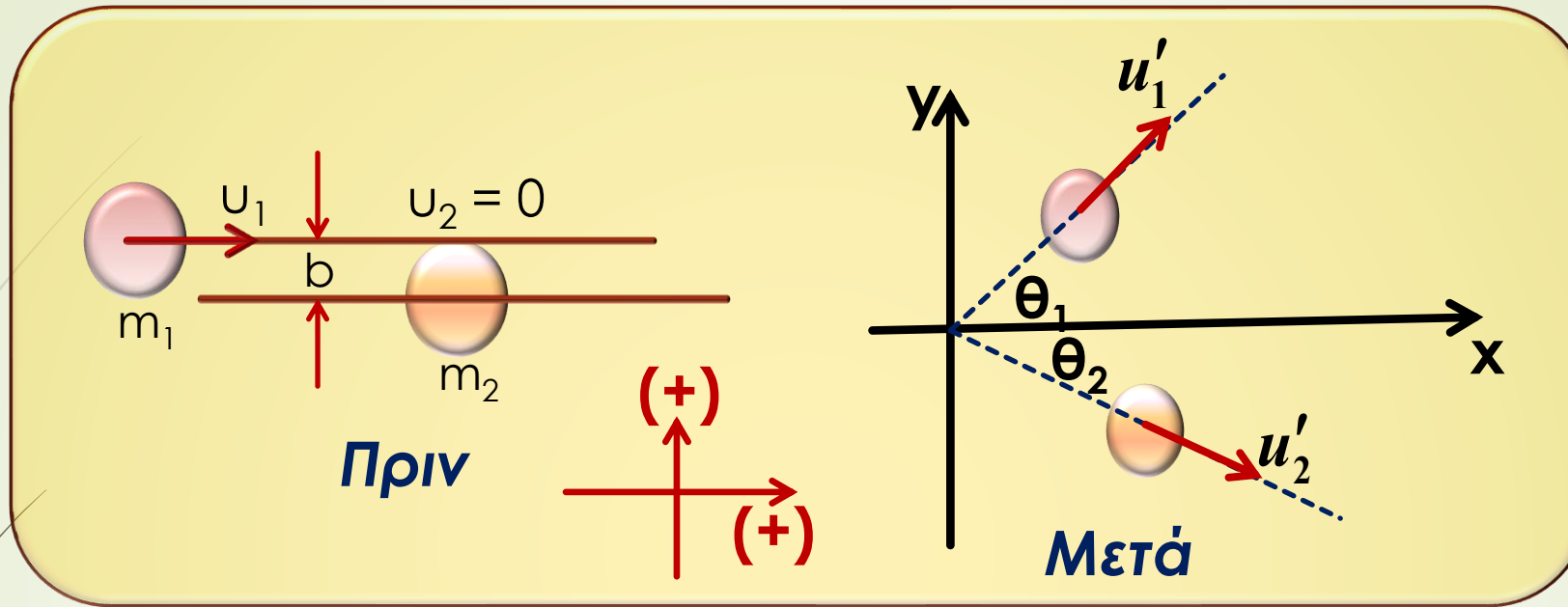
**Άξονας  $y$**

$$0 = m_1 u'_1 \sin \theta_1 - m_2 u'_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 \sin^2 \theta_2$$

**$b$ : Παράμετρος κρούσης**

# Κρούση σωμάτων - Έκκεντρη



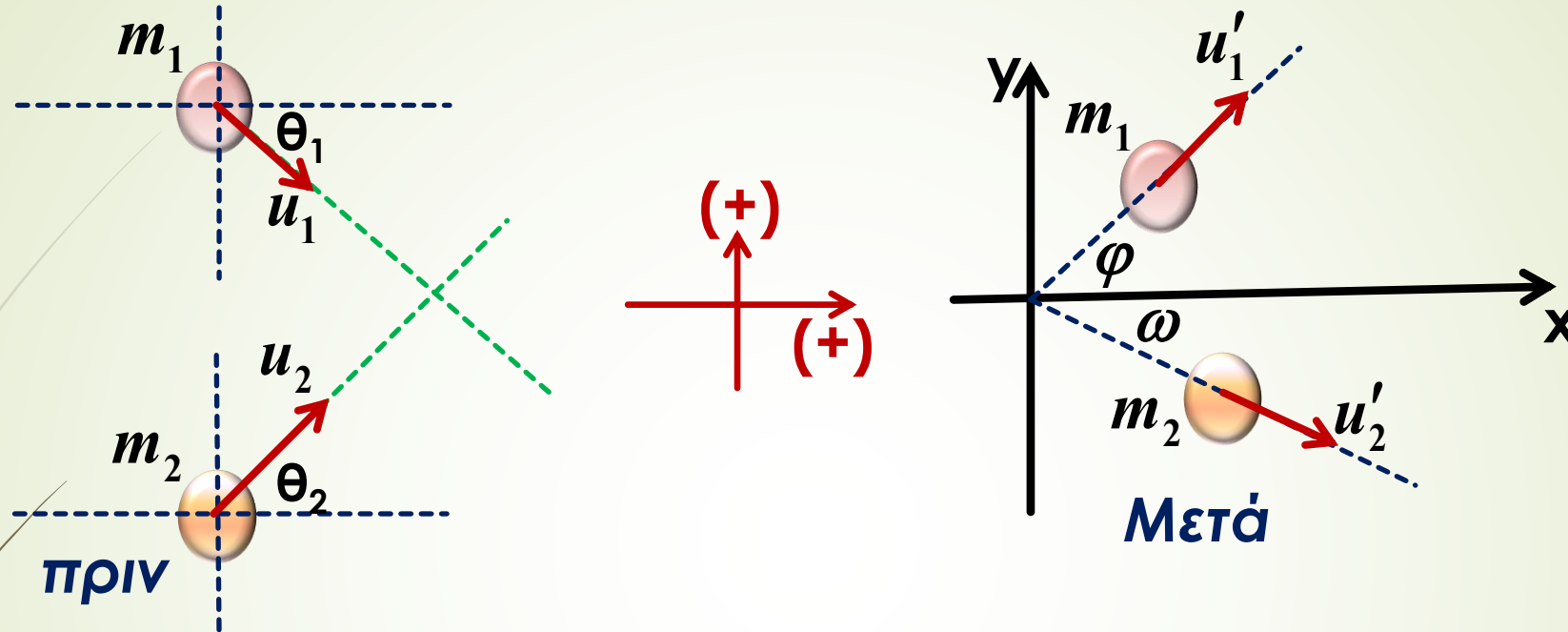
Επομένως:

- ❖ Από την εφαρμογή της Αρχής διατήρησης της ορμής προκύπτουν δύο εξισώσεις, μία για κάθε διεύθυνση (άξονας  $x$  και άξονας  $y$ ).
- ❖ Η τρίτη εξίσωση προκύπτει από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας.

**Αλλά...** Οι άγνωστες ποσότητες είναι τέσσερις...

**Χρειάζεται αναγκαστικά να μας δοθεί ένα δεδομένο ώστε να μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα το σύστημα των εξισώσεων.**

# Κρούση σωμάτων - Πλάγια



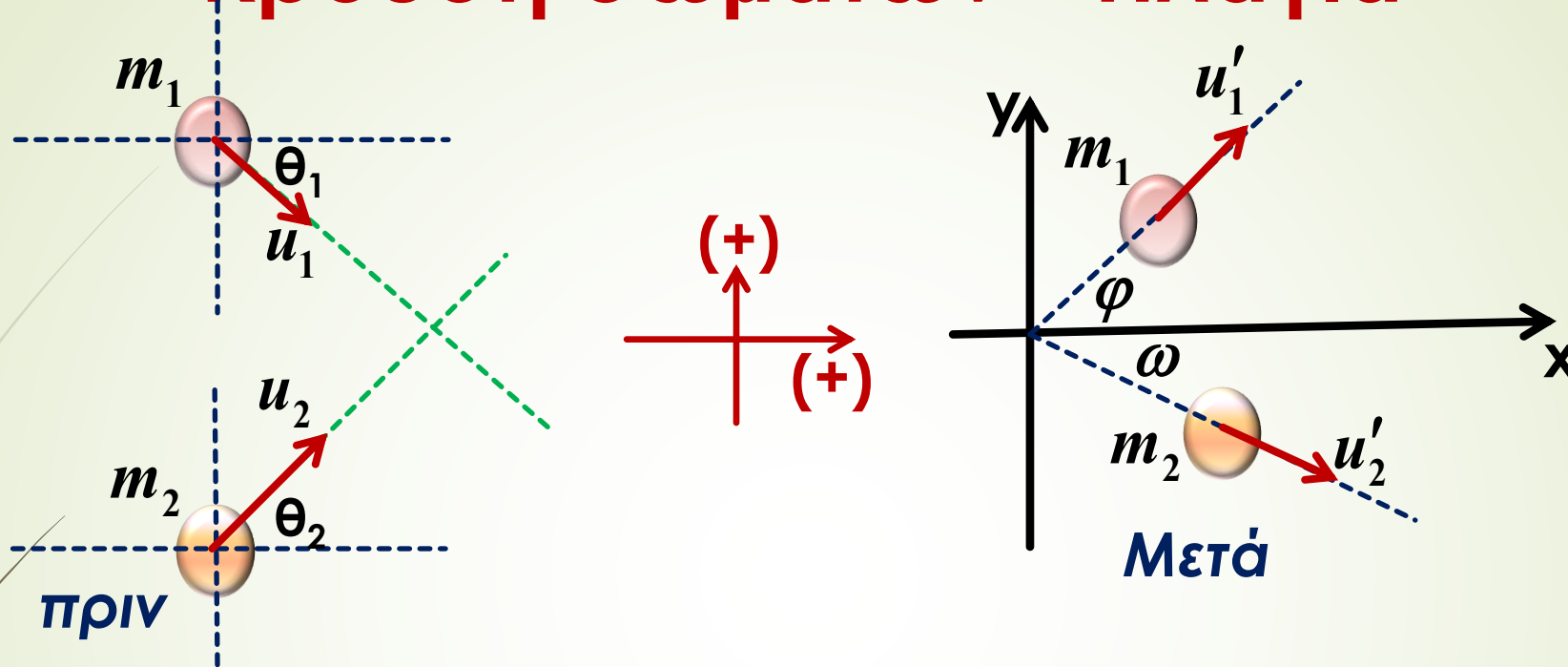
**Άξονας x:**  $m_1 u_1 \cos \theta_1 + m_2 u_2 \cos \theta_2 = m_1 u'_1 \cos \varphi + m_2 u'_2 \cos \omega$

**Άξονας y:**  $m_2 u_2 \sin \theta_2 - m_1 u_1 \sin \theta_1 = m_1 u'_1 \sin \varphi - m_2 u'_2 \sin \omega$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \sin^2 \theta_2 =$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \cos^2 \omega + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \sin^2 \omega$$

# Κρούση σωμάτων - Πλάγια



**Πάλι.....**

❖ Από την εφαρμογή της Αρχής διατήρησης της ορμής προκύπτουν δύο εξισώσεις, μία για κάθε διεύθυνση (άξονας x και άξονας y).

❖ Η τρίτη εξίσωση προκύπτει από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας.

**Πάλι...** Οι άγνωστες ποσότητες είναι τέσσερις...

**Χρειάζεται αναγκαστικά να μας δοθεί ένα δεδομένο ώστε να μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα το σύστημα των εξισώσεων.**

# Κέντρο μάζας, συντεταγμένες

- ▶ Σε τρεις διαστάσεις, εντοπίζουμε το κέντρο μάζας με το διάνυσμα θέσης του,

$$\vec{r}_{KM}$$

- ▶ Για ένα σύστημα σωματιδίων,

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

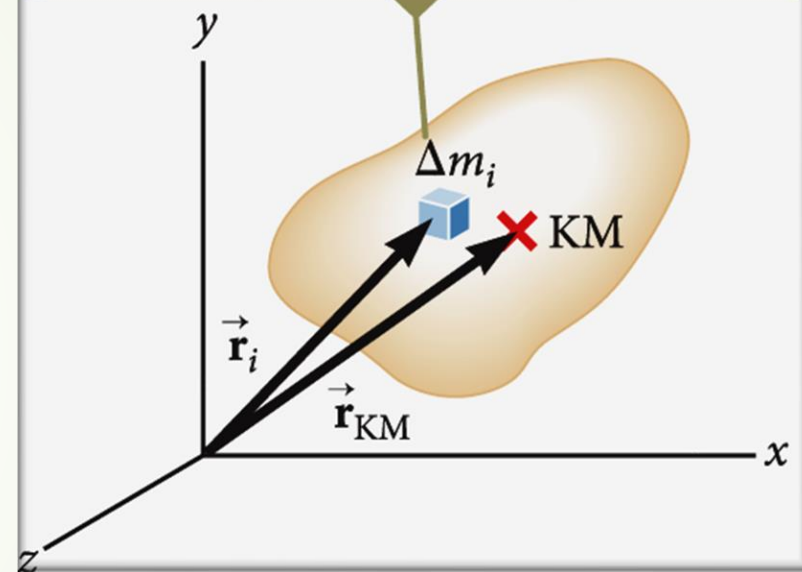
Όπου  $\vec{r}_i$  η θέση του  $i$ -οστού σωματιδίου

- ▶ Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι

$$x_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \quad y_{KM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \quad z_{KM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

- ▶ Το  $M$  είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα μη σημειακό σώμα είναι μια κατανομή μικρών στοιχειωδών μαζών  $\Delta m_i$ .



Για ένα μη σημειακό σώμα,

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

$$x_{KM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_{KM} = \frac{1}{M} \int z dm$$

# Κέντρο μάζας

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

$$x_{KM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

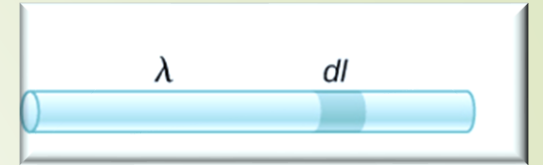
$$y_{KM} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_{KM} = \frac{1}{M} \int z dm$$

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM} \hat{i} + y_{KM} \hat{j} + z_{KM} \hat{k}$$

Γραμμική  
ομοιόμορφη  
κατανομή

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L_{(\mu\eta\kappa\omicron\varsigma)}}$$



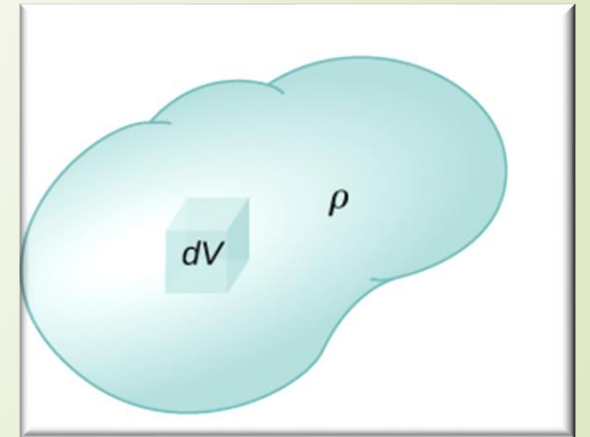
Επιφανειακή  
ομοιόμορφη  
κατανομή

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{S_{(\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron)}}$$



Χωρική  
ομοιόμορφη  
κατανομή

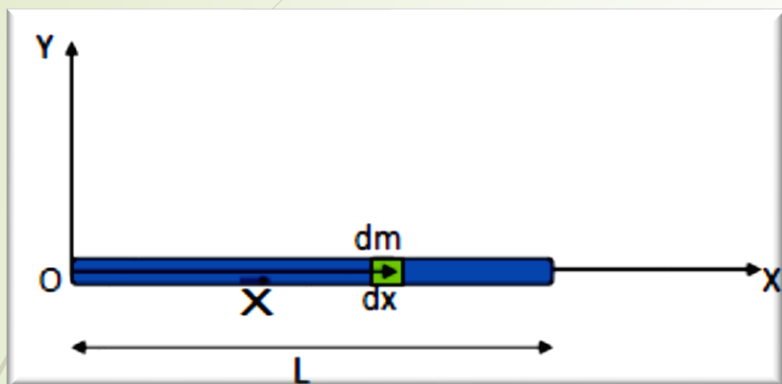
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V_{(\omicron\gamma\kappa\omicron\varsigma)}}$$





# Παραδείγματα υπολογισμού Κέντρου Μάζας

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς λεπτής ράβδου μάζας  $M$  και μήκους  $L$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το ένα άκρο της.



$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$$

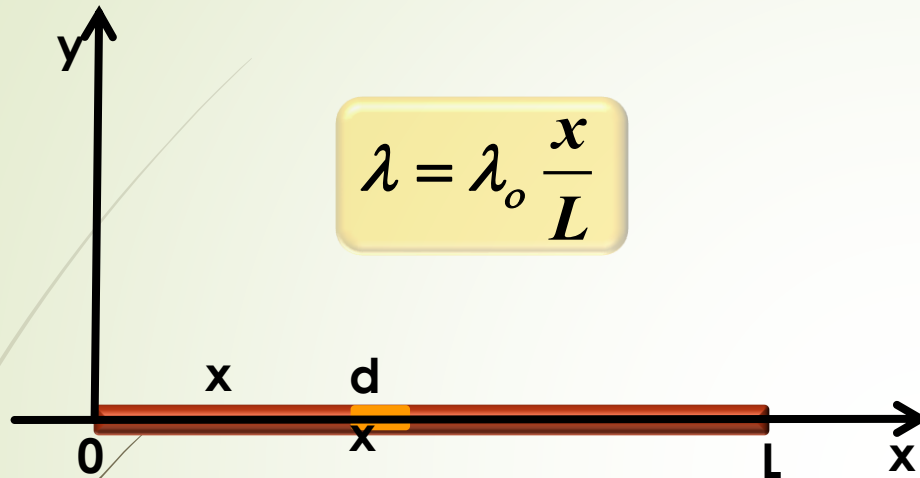
$$X_{KM} = \frac{1}{M} \int x dm \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda x dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\lambda}{M} \int_0^L x dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L \Rightarrow X_{KM} = \frac{\lambda}{M} \frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

$$X_{KM} = \frac{\frac{M}{L}}{M} \frac{L^2}{2} \Rightarrow X_{KM} = \frac{M}{ML} \frac{L^2}{2} \Rightarrow X_{KM} = \frac{L}{2}$$

$$\vec{X}_{KM} = \frac{L}{2} \hat{i}$$

Τι θα αλλάξει εάν πρέπει να υπολογίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το μέσο της ράβδου;

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας μη ομογενούς λεπτής ράβδου γραμμικής πυκνότητας  $\lambda$  και μήκους  $L$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το ένα άκρο της.



$$M = \int dm \Rightarrow M = \int \lambda dx \Rightarrow M = \int_0^L \lambda_o \frac{x}{L} dx \Rightarrow$$

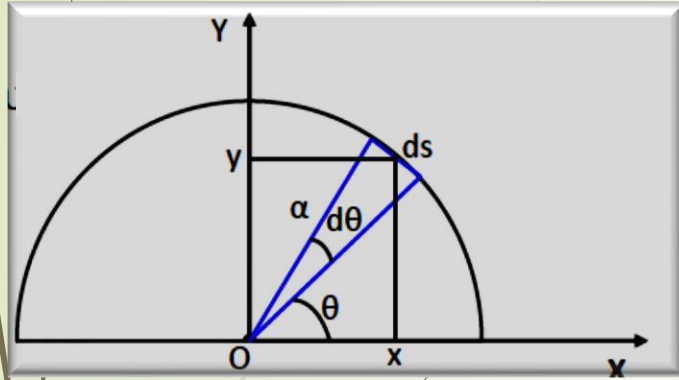
$$M = \frac{\lambda_o}{L} \int_0^L x dx \Rightarrow M = \frac{\lambda_o}{L} \frac{L^2}{2} \Rightarrow M = \frac{\lambda_o L}{2}$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm \Rightarrow X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \lambda dx \Rightarrow X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda_o \frac{x}{L} dx \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{LM} \int_0^L x^2 dx \Rightarrow$$

$$X_{CM} = \frac{\lambda_o}{LM} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{LM} \frac{L^3}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{M} \frac{L^2}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o L}{\lambda_o L} \frac{L^2}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{2\lambda_o}{\lambda_o L} \frac{L^2}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{2}{3} L$$

$$\vec{X}_{KM} = \frac{2L}{3} \hat{i}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς ημικυκλικού σύρματος ακτίνας  $a$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο  $O$  του ημικυκλίου.



$$\lambda = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi a}$$

$$X_{KM} = \frac{1}{M} \int x dm \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M} \int x \lambda ds \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M} \int a \cos \theta \lambda ds \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha \lambda}{M} \int_0^\pi \cos \theta \alpha d\theta \Rightarrow$$

$$X_{KM} = \frac{\alpha^2 \lambda}{M} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha^2 \lambda}{M} \sin \theta \Big|_0^\pi \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha^2 \lambda}{M} (\sin \pi - \sin 0) \Rightarrow X_{KM} = 0$$

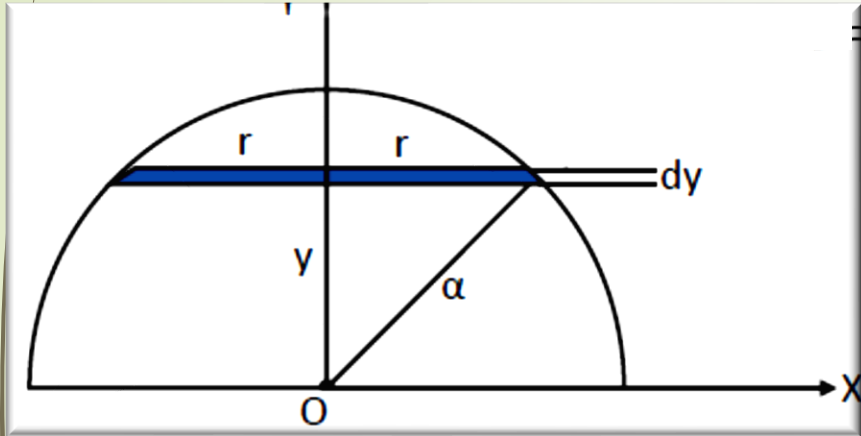
$$Y_{KM} = \frac{1}{M} \int y dm \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M} \int y \lambda ds \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M} \int a \sin \theta \lambda ds \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\alpha \lambda}{M} \int_0^\pi \sin \theta \alpha d\theta \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = \frac{\alpha^2 \lambda}{M} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\alpha^2 \lambda}{M} \cos \theta \Big|_0^\pi \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\alpha^2 \lambda}{M} (\cos \pi - \cos 0) \Rightarrow Y_{KM} = 2 \frac{\alpha^2 \lambda}{M} \Rightarrow Y_{KM} = 2 \frac{\alpha^2 \frac{M}{\pi a}}{M} \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$\vec{r}_{KM} = \vec{X}_{KM} + \vec{Y}_{KM} \Rightarrow \vec{r}_{KM} = \frac{2\alpha}{\pi} \hat{j}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς ημικυκλικής πλάκας ακτίνας  $a$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο  $O$  της πλάκας.

Η ημικυκλική πλάκα μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών οριζόντιων ράβδων όπως στο σχήμα.



$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{2M}{\pi a^2}$$

Είναι προφανές ότι η θέση του Κέντρου Μάζας βρίσκεται στον άξονα  $y$ .

$$Y_{KM} = \frac{1}{M} \int y dm \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M} \int y \sigma dA \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M} \int y \sigma 2r dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\sigma}{M} \int y r dy \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = \frac{2\sigma}{M} \int_0^a y (\alpha^2 - y^2)^{1/2} dy \quad \text{Θέτουμε } \alpha^2 - y^2 = u \Rightarrow du = -2y dy$$

$$Y_{KM} = \frac{2\sigma}{M} \int_0^a y u^{1/2} dy \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M} \int_0^a u^{1/2} (-2y) dy \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M} \int_{\alpha^2}^0 u^{1/2} du \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M} \left. \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_{\alpha^2}^0 \Rightarrow$$

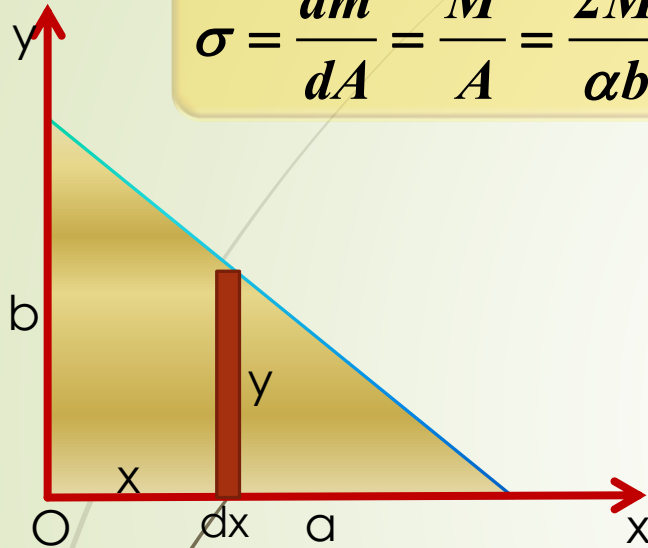
$$Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M} \left( -\frac{\alpha^3}{3/2} \right) \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\sigma}{3M} \alpha^3 \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2 \frac{2M}{\pi \alpha^2}}{3M} \alpha^3 \Rightarrow Y_{KM} = \frac{4\alpha}{3\pi}$$

$$\vec{r}_{KM} = \vec{Y}_{KM} = \frac{4\alpha}{3\pi} \hat{j}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς τριγωνικής πλάκας πλευρών  $a$  και  $b$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο  $O$  (σχήμα).

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} = \frac{2M}{ab}$$

Το Κέντρο Μάζας της τριγωνικής πλάκας είναι ένα σημείο του επιπέδου της. Άρα το διάνυσμα θέσης του έχει δύο συνιστώσες. Μία στον άξονα  $x$  και μία στον άξονα  $y$ . Τις υπολογίζουμε ξεχωριστά.



$$X_{KM} = \frac{1}{M} \int x dm \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M} \int_0^a x \sigma y dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^a xy dx$$

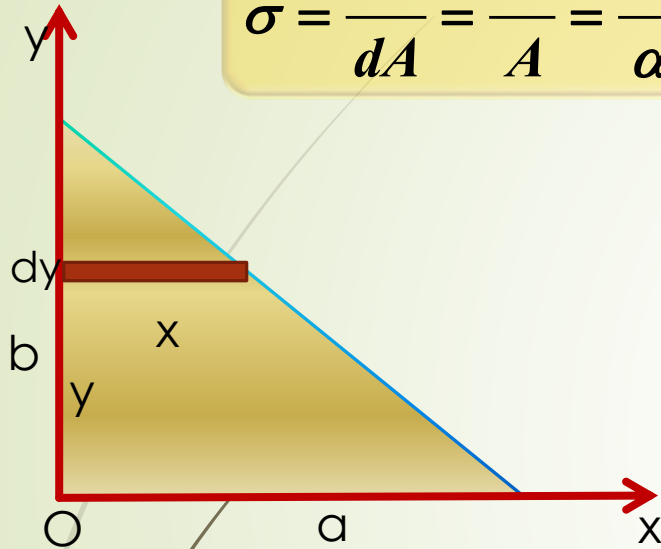
$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow y = \frac{a-x}{a} b \Rightarrow y = \frac{b}{a} (a-x)$$

$$X_{KM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^a xy dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^a x \frac{b}{a} (a-x) dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma b}{M a} \int_0^a x (a-x) dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma b}{M a} \left[ \int_0^a ax dx - \int_0^a x^2 dx \right] \Rightarrow$$

$$X_{KM} = \frac{2b}{ab\sigma} \left[ a \frac{x^2}{2} \Big|_0^a - \frac{x^3}{3} \Big|_0^a \right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{2}{a^2} \left[ a \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{2}{a^2} \left[ \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{2}{a^2} \left[ \frac{a^3}{6} \right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{a}{3}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς τριγωνικής πλάκας πλευρών  $a$  και  $b$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο  $O$  (σχήμα).

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} = \frac{2M}{ab}$$



$$Y_{KM} = \frac{1}{M} \int y dm \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M} \int_0^b y \sigma x dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b xy dy$$

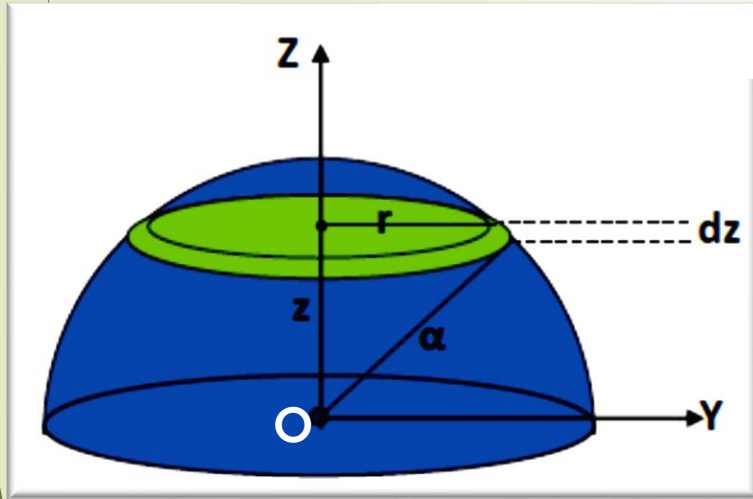
$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b} \Rightarrow x = \frac{b-y}{b} a \Rightarrow x = \frac{a}{b} (b-y)$$

$$Y_{KM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b xy dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b y \frac{a}{b} (b-y) dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma a}{Mb} \int_0^b y (b-y) dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma a}{Mb} \left[ \int_0^b by dy - \int_0^b y^2 dy \right] \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = \frac{2\alpha}{abb} \left[ b \frac{y^2}{2} \Big|_0^b - \frac{y^3}{3} \Big|_0^b \right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2}{b^2} \left[ b \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} \right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2}{b^2} \left[ \frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2}{b^2} \left[ \frac{b^3}{6} \right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{b}{3}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{\alpha}{3} \hat{i} + \frac{\beta}{3} \hat{j}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς συμπαγούς ημισφαιρίου ακτίνας  $a$  ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο  $O$  (σχήμα).



$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} = \frac{2M}{\frac{4\pi a^3}{3}} \Rightarrow \rho = \frac{3M}{2\pi a^3}$$

Το ημισφαίριο μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία πολύ λεπτών ομόκεντρων δίσκων ακτίνας  $r$  και πάχους  $dz$ .

Το Κέντρο Μάζας βρίσκεται επάνω στον άξονα  $z$ .

$$\begin{aligned} Z_{\text{KM}} &= \frac{1}{M} \int z dm \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \int_0^a z \rho \pi r^2 dz \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^a z r^2 dz \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^a z (\alpha^2 - z^2) dz \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^a z \alpha^2 dz - \frac{\pi \rho}{M} \int_0^a z^3 dz \\ \Rightarrow Z_{\text{KM}} &= \frac{\pi \rho \alpha^2}{M} \int_0^a z dz - \frac{\pi \rho}{M} \int_0^a z^3 dz \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{\pi \rho \alpha^2}{M} \frac{z^2}{2} \Big|_0^a - \frac{\pi \rho}{M} \frac{z^4}{4} \Big|_0^a \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{\pi \rho \alpha^4}{2M} - \frac{\pi \rho \alpha^4}{4M} \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{2\pi \rho \alpha^4}{8M} \Rightarrow Z_{\text{KM}} = \frac{2\pi 3M \alpha^4}{8M 2\pi \alpha^3} \Rightarrow \\ Z_{\text{KM}} &= \frac{3\alpha}{8} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{\text{KM}} = Z_{\text{KM}} \hat{k} = \frac{3\alpha}{8} \hat{k}$$

Τι θα άλλαζε εάν ήταν ομογενής συμπαγής σφαίρα ακτίνας  $a$ ;