

Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκουσα

Παναγιώτα Καραχάλιου

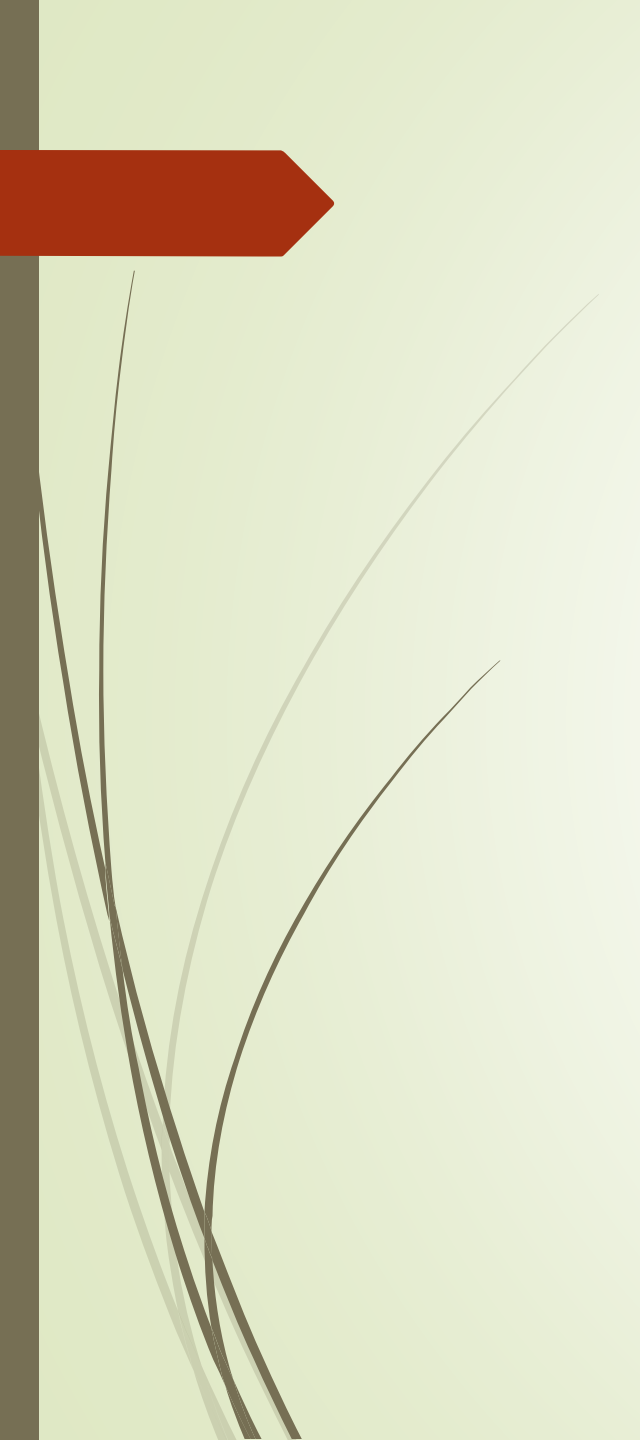
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια,

pkara@upatras.gr

Ώρες Γραφείου (Κτήριο Γ, Ισόγειο)

Συμβουλευτείτε την ιστοσελίδα του
Τμήματος:

www.physics.upatras.gr



Η έννοια του Έργου

Έργο Δύναμης

Μια δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.

Η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ του σχήματος μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά $\Delta\vec{r}$ και παράγει έργο:

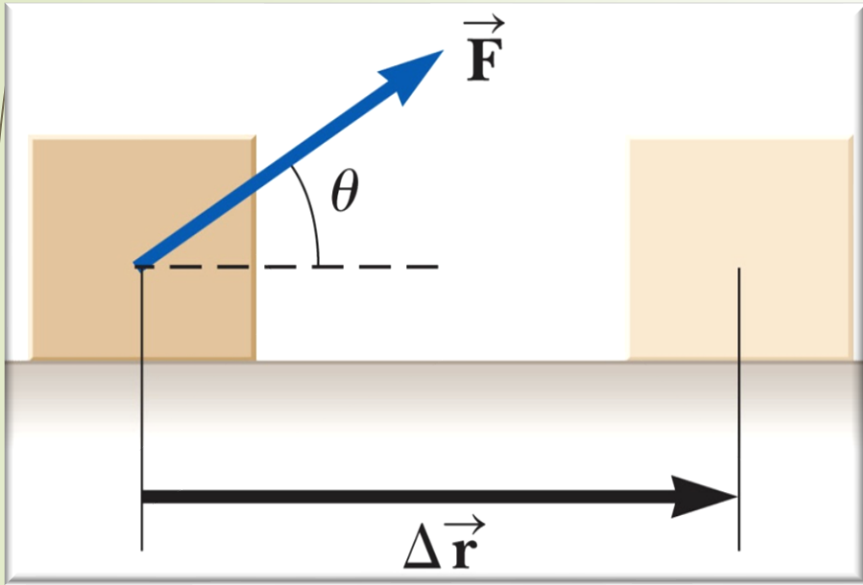
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos\theta$$

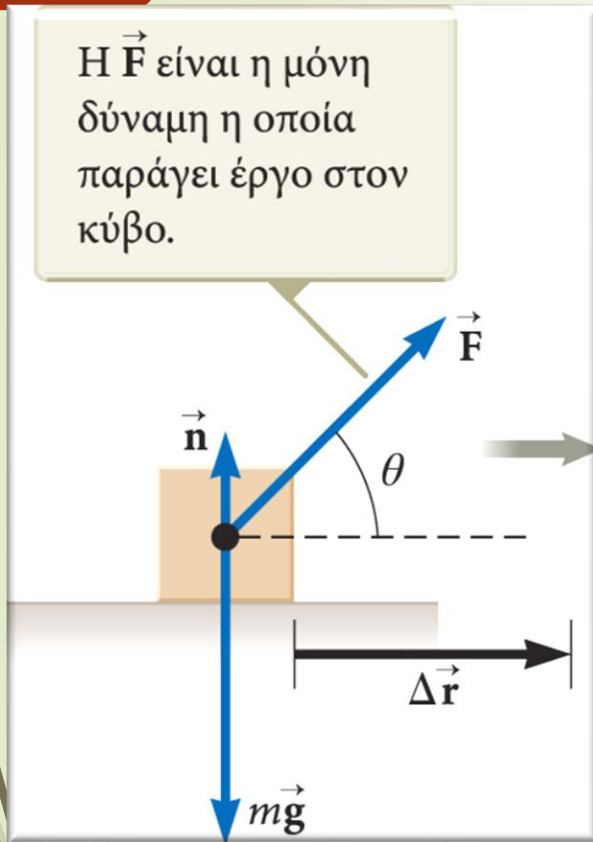
Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα δεν παράγει έργο αν το σώμα δεν μετακινείται.

Το έργο είναι **βαθμωτό μέγεθος**.

Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι το **joule (J)**. $1 \text{ joule} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$



Έργο Δύναμης



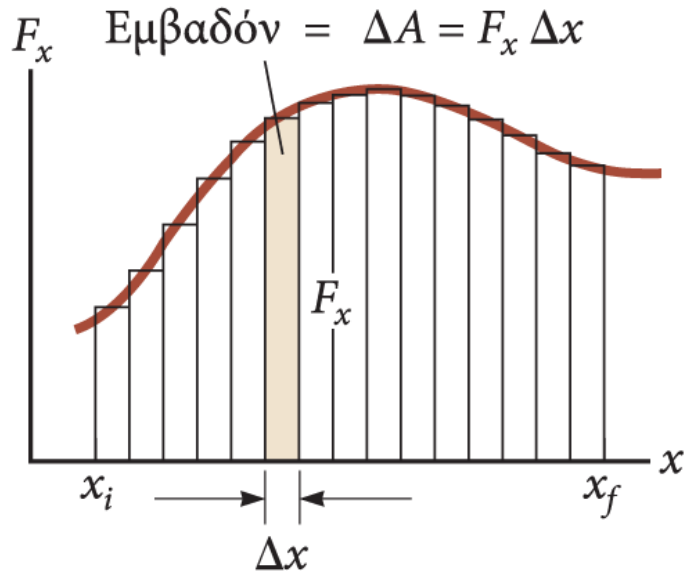
- ▶ Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από την κατεύθυνση της δύναμης σε σχέση με τη μετατόπιση.
 - ▶ Το έργο είναι θετικό όταν η προβολή της $\vec{F}$ στο $\Delta\vec{r}$ έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση.
 - ▶ Το έργο είναι αρνητικό όταν η προβολή έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης.
 - ▶ Το έργο είναι μηδέν όταν $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$
- ▶ Αν το έργο που παράγεται είναι θετικό, ενέργεια μεταφέρεται προς το σώμα.
- ▶ Αν το έργο που παράγεται είναι αρνητικό, ενέργεια μεταφέρεται από το σώμα.
- ▶ Το αποτέλεσμα είναι η μεταβολή της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο σώμα.

Η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο στο σώμα καθώς $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι η μοναδική δύναμη που παράγει έργο στο σώμα

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης

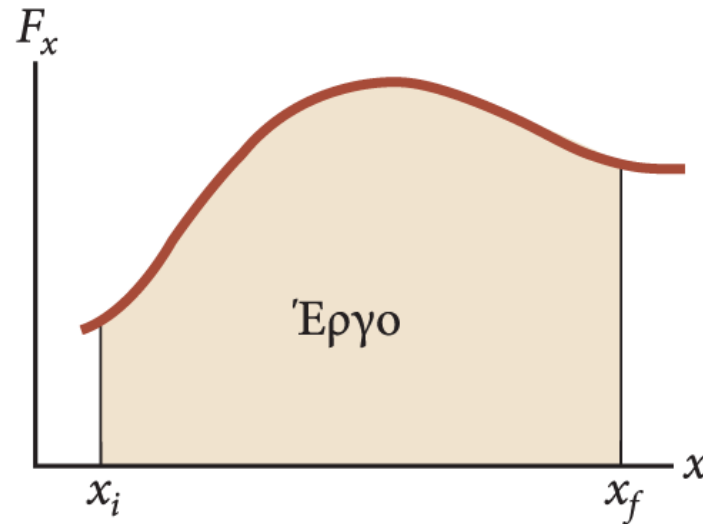
Το συνολικό έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση από το x_i στο x_f είναι κατά προσέγγιση ίσο με το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων.



α

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Το έργο που παράγει η συνιστώσα F_x της μεταβλητής δύναμης καθώς μετακινεί το σωματίδιο από το x_i στο x_f είναι ακριβώς ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.



β

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Έργο πολλών δυνάμεων

Το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα είναι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Στη γενική περίπτωση μιας συνισταμένης δύναμης με μεταβαλλόμενο μέτρο και κατεύθυνση,

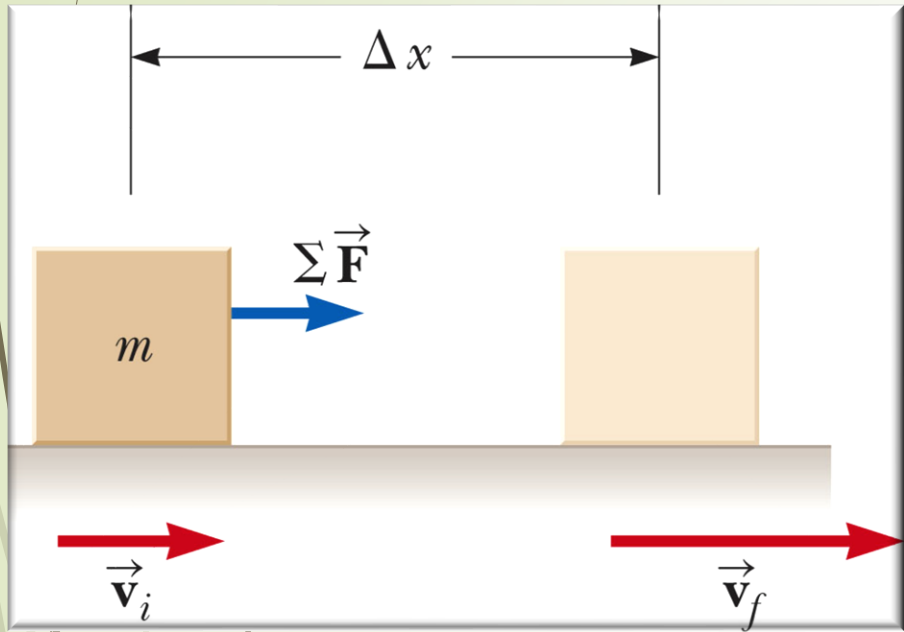
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Ή ισοδύναμα το συνολικό έργο είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα του έργου που παράγει κάθε δύναμη χωριστά.

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{\Delta \text{υνάμεις}} \left(\int_A^B \vec{F} \cdot \Delta \vec{\ell} \right)$$

Έργο και Κινητική Ενέργεια

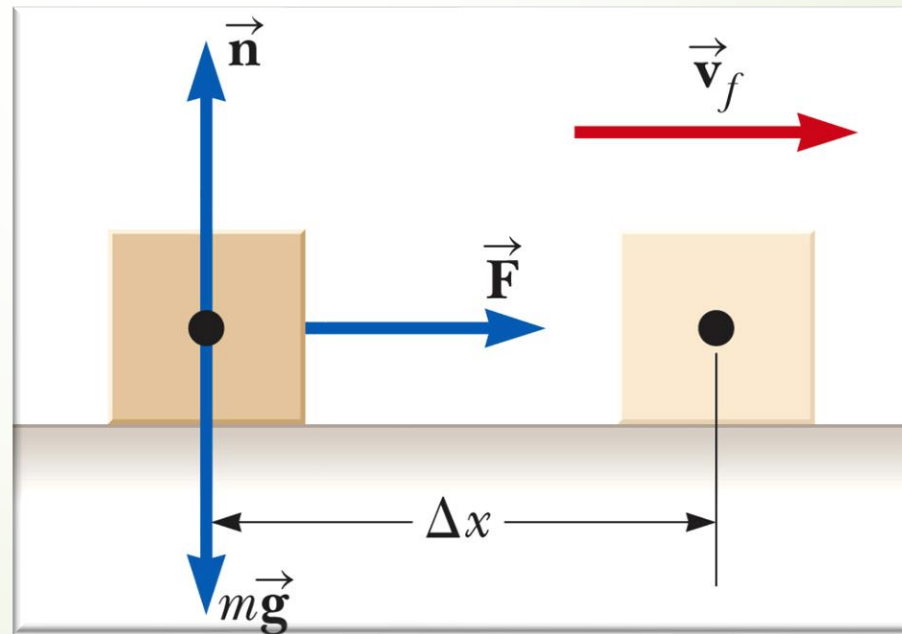
Μια πιθανή επίπτωση του έργου που παράγεται για να μεταφερθεί ενέργεια προς ένα σύστημα είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του



$$W_{\text{εξωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F dx = \int_{x_i}^{x_f} m a dx \Rightarrow W_{\text{εξωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{du}{dt} dx \Rightarrow$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = \int_{v_i}^{v_f} m u du \Rightarrow W_{\text{εξωτ.}} = m \int_{v_i}^{v_f} u du \Rightarrow W_{\text{εξωτ.}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \Rightarrow$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = K_f - K_i = \Delta K$$



$$W_{\text{εξωτ.}} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0$$

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

$$W_{\text{εξωτ.}} = K_f - K_i = \Delta K$$

- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται αν το συνολικό έργο που παράγεται σε αυτό είναι θετικό.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος μειώνεται αν το συνολικό έργο είναι αρνητικό.
- Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας αναφέρεται στο μέτρο της ταχύτητας του συστήματος και όχι στην ταχύτητά του ως διάνυσμα.

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας (πλήρης απόδειξη)

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B m \vec{a} \cdot \vec{u} dt = m \int_A^B \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} \right) dt$$

$$\frac{d}{dt}(u^2) = \frac{d}{dt}(uu) = \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 2 \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u}$$

Αλλά.....

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} m \int_A^B \frac{d}{dt}(u^2) dt = \frac{1}{2} m \int_A^B du^2 = \frac{1}{2} m u_B^2 - \frac{1}{2} m u_A^2$$

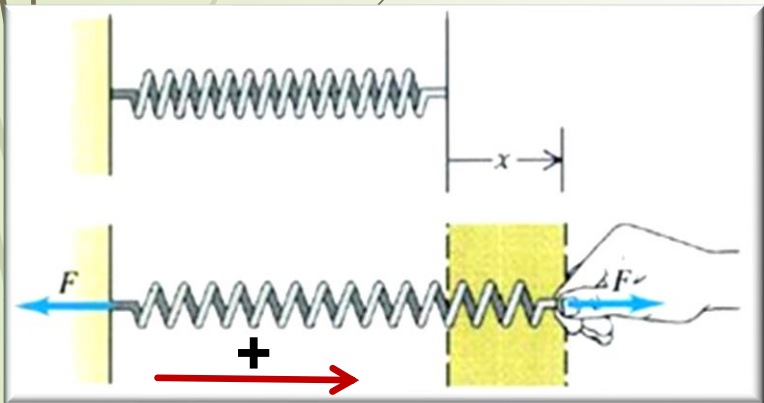
$$W_{\text{εξωτ.}} = K_f - K_i = \Delta K$$

Υπολογισμός έργου δύναμης σε μία διάσταση

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x \hat{i} \cdot dx \hat{i} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Παράδειγμα

Ελατήριο ασκεί δύναμη σε σώμα της μορφής $F(x) = -kx$, όπου k μία σταθερά, με αποτέλεσμα το σώμα να μετατοπίζεται από τη θέση x_1 στη θέση x_2 . Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $F(x)$.



$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -kx \hat{i} \cdot dx \hat{i} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$W = -k \int_A^B x dx \Rightarrow W = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} \Rightarrow W = -k \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$W = k \frac{x_1^2}{2} - k \frac{x_2^2}{2}$$

Έργο δύναμης – Μια διάσταση-1-

Σώμα μάζας m μετακινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ που εξαρτάται από την θέση x , όπου

$$\mu(x) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{x}{a}}$$

και μ_0 μια σταθερά. Πόσο έργο καταναλώνεται από την δύναμη τριβής για μετατόπιση του αντικειμένου από τη θέση $x_1 = a$ έως τη θέση $x_2 = 2a$;

Η δύναμη της τριβής T κατά την κίνηση του σώματος είναι ίση με

$$T = \mu N = \mu B = \mu mg \quad \Rightarrow \quad T(x) = \mu_0 mg \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}$$

Το έργο της τριβής δίνεται από το ολοκλήρωμα της δύναμης $T(x)$ από την θέση $x_1 = a$ έως την θέση $x_2 = 2a$

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} T dx \Rightarrow W_{x_1 \rightarrow x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 mg}{1 + \frac{x}{a}} dx \Rightarrow W_{x_1 \rightarrow x_2} = -\mu_0 mg \int_a^{2a} \frac{1}{1 + \frac{x}{a}} dx \Rightarrow W_{x_1 \rightarrow x_2} = -\mu_0 mg \int_a^{2a} \frac{a}{a+x} dx \Rightarrow$$

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = -a\mu_0 mg \int_a^{2a} \frac{1}{a+x} d(a+x) \Rightarrow W_{x_1 \rightarrow x_2} = -a\mu_0 mg \ln(a+x) \Big|_a^{2a} \Rightarrow W_{x_1 \rightarrow x_2} = -a\mu_0 mg \ln \frac{(a+2a)}{a+a} \Rightarrow$$

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = -a\mu_0 mg \ln \frac{3}{2}$$

Έργο δύναμης – Μια διάσταση-2-

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x \hat{i} \cdot dx \hat{i} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Δύναμη F στη θετική κατεύθυνση του άξονα x δρα σε σώμα που κινείται κατά μήκος του άξονα. Αν το μέτρο της δύναμης είναι $F=10e^{-x/2}$ (N) να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F καθώς το σώμα μετακινείται από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=2m$.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W = \int_0^2 10e^{-x/2} \vec{i} \cdot dx \vec{i} \Rightarrow W = 10 \int_0^2 e^{-x/2} dx \Rightarrow W = -10 \int_0^2 e^{-x/2} d(-x) \Rightarrow$$

$$W = -20 \int_0^2 e^{-x/2} d\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow W = -20 e^{-x/2} \Big|_0^2 \Rightarrow W = -20 (e^{-2/2} - e^0) \Rightarrow W = -20 (e^{-1} - 1) \Rightarrow$$

$$W = -20 (0.36 - 1) \Rightarrow W = -20 (-0.64) \Rightarrow W = 12.8 \text{ J}$$

Έργο δύναμης – Μια διάσταση-1-

Δύναμη $F=6t$ (Nt) όπου t είναι ο χρόνος ασκείται σε σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ κατά μήκος του άξονα x . Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο να υπολογιστεί το έργο της δύναμης στα πρώτα δύο δευτερόλεπτα της κίνησής του.

Λύση

Το έργο της δύναμης F δίδεται από το ολοκλήρωμα $W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$. Επειδή η δύναμη F στο ολοκλήρωμα εξαρτάται από το χρόνο εκφράζουμε και το dx ως συνάρτηση του χρόνου. Υπολογίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $x(t)$ από τον νόμο του Νεύτωνα.

$$F(t) = ma \Rightarrow F(t) = m \frac{du}{dt} \Rightarrow du = \frac{F(t)}{m} dt \Rightarrow \int_0^V du = \int_0^t \frac{6t}{m} dt \Rightarrow u \Big|_0^V = \frac{6}{m} \int_0^t t dt \Rightarrow V = \frac{6}{m} \frac{t^2}{2} \Rightarrow V = \frac{3t^2}{m} \Rightarrow V = \frac{3t^2}{2} \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$V = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2} dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{3t^2}{2} dt \Rightarrow x = \frac{3}{2} \frac{t^3}{3} \Rightarrow x = \frac{t^3}{2}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση του x και υπολογίζουμε τη ποσότητα dx : $x = \frac{t^3}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2} dt$ **Τότε:**

$$W = \int_0^2 F(t) dx \Rightarrow W = \int_0^2 6t \frac{3t^2}{2} dt \Rightarrow W = 9 \int_0^2 t^3 dt \Rightarrow W = 9 \frac{t^4}{4} \Big|_0^2 \Rightarrow W = 9 \frac{2^4}{4} \Rightarrow W = 36 J$$

Υπολογισμός έργου δύναμης σε δύο διαστάσεις

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$

Παράδειγμα

Σε σώμα εξασκείται η δύναμη $\vec{F} = (4x\hat{i} + 3y\hat{j})$ (Nt). Το σώμα μετακινείται από τη θέση $x=0\text{m}$ στη θέση $x=5\text{m}$ κατά μήκος του άξονα x . Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F .

Λύση

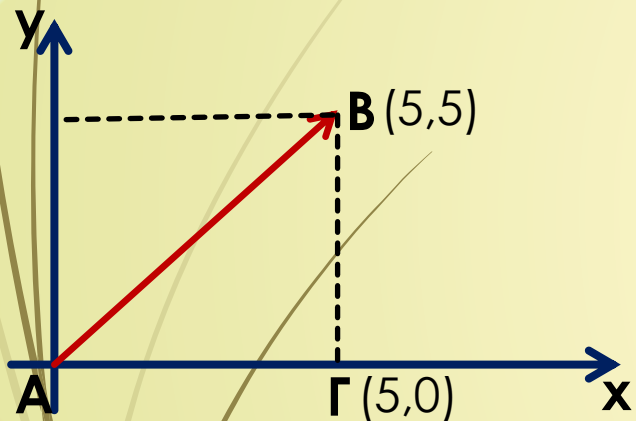
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^5 (4x\hat{i} + 3y\hat{j}) \cdot (dx\hat{i}) \Rightarrow W = \int_0^5 4x dx \Rightarrow W = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = 50J$$

Έργο δύναμης - 3 – Δύο διαστάσεις

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \alpha y \hat{i} + b x \hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο A (0,0) στο σημείο B (5,5) κατά μήκος των εξής διαδρομών:

I) Κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία A και B.

II) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ όπου το σημείο Γ είναι το Γ (5,0).



$$I) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int_A^B (\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) \Rightarrow W = \int_A^B (\alpha y dx + b x dy) \Rightarrow$$

Αλλά ισχύει ότι: $x=y$ και $dx=dy$. Οπότε:

$$W = \int_A^B (\alpha y dx + b x dy) \Rightarrow W = \int_0^5 (\alpha x dx + b y dy) \Rightarrow$$

$$W = \int_0^5 \alpha x dx + \int_0^5 b y dy \Rightarrow W = \alpha \int_0^5 x dx + b \int_0^5 y dy \Rightarrow$$

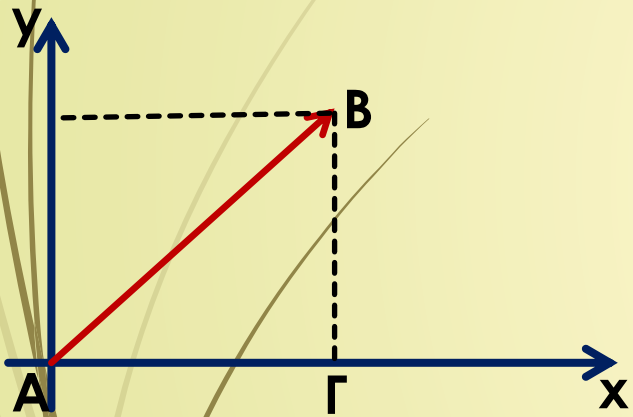
$$W = \alpha \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 + b \frac{y^2}{2} \Big|_0^5 \Rightarrow W = \frac{25}{2} \alpha + \frac{25}{2} b \Rightarrow W = \frac{25}{2} (\alpha + b)$$

Έργο δύναμης - 3 – Δύο διατάσεις

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \alpha y \hat{i} + b x \hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο A (0,0) στο σημείο B (5,5) κατά μήκος των εξής διαδρομών:

I) Κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία A και B.

II) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ όπου το σημείο Γ είναι το Γ (5,0).



$$\begin{aligned} \text{II) } W &= W_{A \rightarrow \Gamma} + W_{\Gamma \rightarrow B} = W = \int_A^{\Gamma} (\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}) \cdot d\mathbf{x} \hat{i} + \int_{\Gamma}^B (\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}) \cdot d\mathbf{y} \hat{j} \Rightarrow \\ W &= W_{A \rightarrow \Gamma} + W_{\Gamma \rightarrow B} = W = \int_0^5 \alpha y dx + \int_0^5 b x dy \Rightarrow \\ W &= 0 + \int_0^5 b x dy \Rightarrow W = b x \int_0^5 dy \Rightarrow W = b x y \Big|_0^5 \Rightarrow W = b \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow W = 25b \end{aligned}$$

Το έργο αυτής της δύναμης εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να μετακινηθούμε από το σημείο A στο σημείο B.

Έργο δύναμης -4 –Δύο διαστάσεις

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο A (0,0) στο σημείο B (2,4) κατά μήκος της καμπύλης $y=x^2$.

Λύση

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left((x^2 + y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j} \right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \Rightarrow W = \int_0^2 (x^2 + y^2) dx + \int_0^4 2xy dy \Rightarrow$$

$$W = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 y^2 dx + 2 \int_0^4 xy dy$$

Αλλά ισχύει ότι: $y=x^2$ Οπότε:

$$W = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 x^4 dx + 2 \int_0^4 y^{1/2} y dy \Rightarrow W = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 x^4 dx + 2 \int_0^4 y^{3/2} dy \Rightarrow$$

$$W = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 + 2 \left. \frac{y^{5/2}}{5/2} \right|_0^4 \Rightarrow W = \dots \text{ Κάνετε τις πράξεις και υπολογίστε το τελικό αποτέλεσμα σε Joule}$$

Έργο δύναμης-5-Τρεις διαστάσεις

Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$ (σε N και x σε m,) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο A(0, 0, 0) στο σημείο B(1, 1, 1). Η διαδρομή είναι η καμπύλη C, η οποία δίνεται στην παραμετρική μορφή: $x = t, y = t^2, z = t^3$.

Λύση

Επιβεβαιώνουμε ότι τα σημεία A και B πράγματι βρίσκονται πάνω στην καμπύλη C. Το σημείο A αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$ της παραμέτρου, και το B στην τιμή $t = 1$. Το παραγόμενο έργο είναι ίσο με:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_A^B [(3x^2 + 6y)dx - 14yz dy + 20xz^2 dz]$$

Για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, θα πρέπει να εκφράσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα συναρτήσει μίας μόνο μεταβλητής. Επιλέγουμε να εκφράσουμε όλες τις μεταβλητές συναρτήσει του t . Έτσι, είναι:

$$x = t, y = t^2, z = t^3, \quad \text{και} \quad dx = dt, \quad dy = 2t dt, \quad dz = 3t^2 dt$$

$$W = \int_A^B [(3x^2 + 6y)dx - 14yz dy + 20xz^2 dz] = \int_0^1 [(3t^2 + 6t^2)dt - 14t^2 t^3 (2t dt) + 20t(t^3)^2 (3t^2 dt)]$$

$$\int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)dt = [3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}]_0^1 = 5 J$$

Έργο βαρυτικής δύναμης

Βαρυτικό Πεδίο

Υπολογίζουμε το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής από το σημείο A στο B

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) \hat{r} \cdot d\vec{l} = -GMm \int_A^B \left(\frac{dl}{r^2} \right) \hat{r} \cdot \hat{l} = -GMm \int_A^B \frac{dl}{r^2} \cos\theta$$

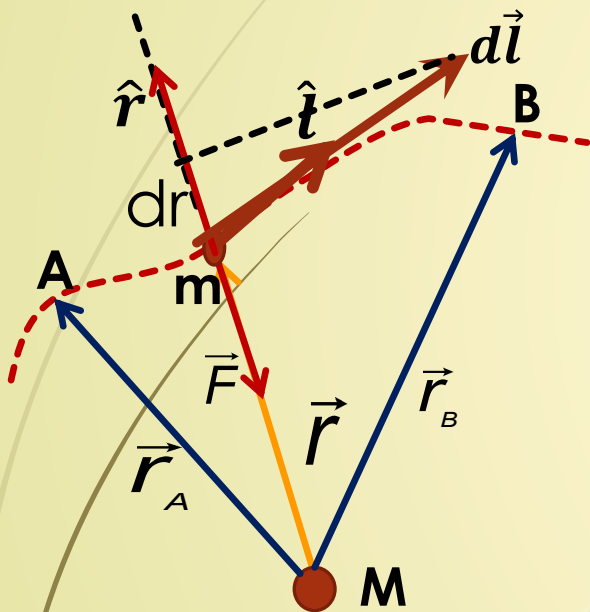
Αλλά $dl \cos\theta = dr$ Οπότε:

$$-GMm \int_A^B \frac{dl}{r^2} \cos\theta = -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \quad \text{Τελικά:}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -\frac{GMm}{r_A} - \left(-\frac{GMm}{r_B} \right) = U_A - U_B$$

Συντηρητική Δύναμη

Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση





Η έννοια του Συντηρητικού Πεδίου

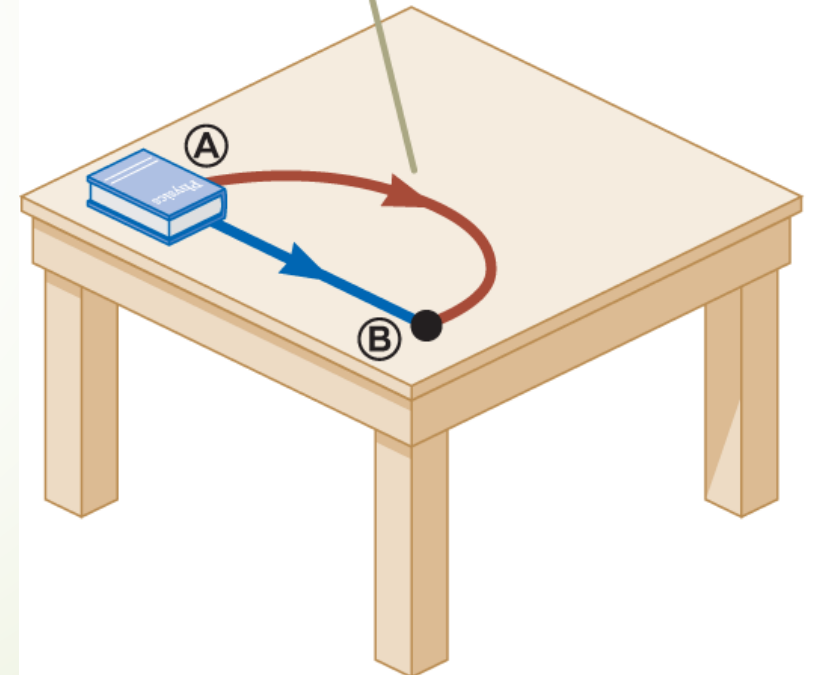
Η έννοια του συντηρητικού πεδίου

- **Συντηρητικό πεδίο** ονομάζεται το πεδίο εκείνο στο οποίο το έργο που παράγεται από τη δύναμη του πεδίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση και όχι από τη διαδρομή που ακολουθείται.
- **Συντηρητικό πεδίο** ονομάζεται το πεδίο εκείνο στο οποίο το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.
- Υπάρχουν άπειρες διαδρομές που ενώνουν δύο σημεία του πεδίου. Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος όλων αυτών των διαδρομών είναι το ίδιο.
- **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ.**

Συντηρητικές και μη Συντηρητικές δυνάμεις

- Το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, (i) είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο και (ii) μηδενικό όταν η τροχιά είναι κλειστή. (Βαρύτητα, δύναμη ελατηρίου, ηλεκτροστατική δύναμη).
- Οι μη συντηρητικές δυνάμεις **(τριβή)** δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες αυτές.
- Επειδή το έργο που παράγεται στο βιβλίο εξαρτάται από τη διαδρομή, **η τριβή είναι μια μη συντηρητική δύναμη.**

Το έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση του βιβλίου είναι μεγαλύτερο στην καφέ διαδρομή από ό,τι στην μπλε διαδρομή.



Η έννοια του συντηρητικού πεδίου - Δυναμική Ενέργεια

➤ ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ.

Το έργο της δύναμης του πεδίου ισούται με τη ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ $U_A - U_B$ στα σημεία Α και Β του πεδίου.

$$W_{A \rightarrow B} = -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$W_{A \rightarrow B} = U_A - U_B = -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Εάν r_B στο άπειρο τότε:

$$U_A = -\frac{GMm}{r_A}$$

Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι:

$$W_{A \rightarrow B} = K_B - K_A$$

$$W_{A \rightarrow B} = U_A - U_B$$

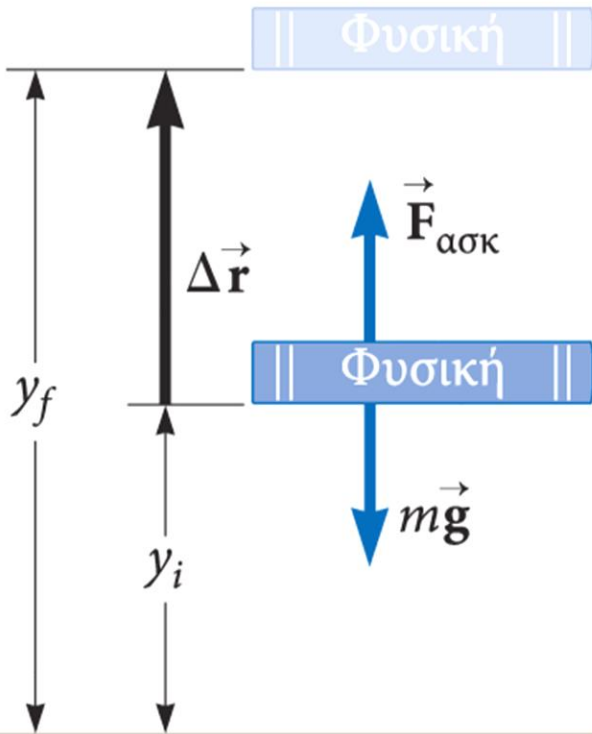
$$W_{A \rightarrow B} = U_{\text{αρχ.}} - U_{\text{τελ.}} = K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} \Rightarrow$$

$$U_{\text{αρχ.}} + K_{\text{αρχ.}} = U_{\text{τελ.}} + K_{\text{τελ.}}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Το έργο που παράγει ο εξωτερικός παράγοντας στο σύστημα βιβλίου-Γης είναι $mgy_f - mgy_i$.



Παράγουμε έργο στο σύστημα ανυψώνοντας κατακόρυφα το βιβλίο.

Η μετατόπιση του βιβλίου είναι: $\Delta \vec{r} = (y_f - y_i) \hat{j}$

Το έργο που παράγεται στο σύστημα εκδηλώνεται ως αύξηση της ενέργειας του συστήματος.

$$W_{\text{εξωτ.}} = (\vec{F}_{\text{ασκ.}}) \cdot \Delta \vec{r}$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = (mg \hat{j}) \cdot [(y_f - y_i) \hat{j}]$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = mgy_f - mgy_i$$

Η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα σε μια δεδομένη θέση πάνω από την επιφάνεια της Γης.

$$U_g = mgy \text{ (J)}, \text{βαθμωτό μέγεθος}$$

Η έννοια του Πεδίου

In science, a field is a physical quantity, represented by a scalar, vector, or tensor, that has a value for each point in space and time.

Στη φυσική, πεδίο είναι μια φυσική οντότητα, που περιγράφεται από ένα βαθμωτό μέγεθος, διάνυσμα ή τανυστή, που έχει μια τιμή για κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου.

John Gribbin (1998). Q is for Quantum: Particle Physics from A to Z. London: Weidenfeld & Nicolson. p. 138

Richard Feynman (1970). The Feynman Lectures on Physics Vol II. Addison Wesley Longman. ISBN 978-0-201-02115-8. "A 'field' is any physical quantity which takes on different values at different points in space."

Ernan McMullin (2002). "The Origins of the Field Concept in Physics". *Phys. Perspect.* 4 (1): 13–39.

Η Έννοια του Πεδίου στη Φυσική

ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Πηγές παραγωγής των πεδίων :

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ $\longrightarrow$ ΜΑΖΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ $\longrightarrow$ ΑΚΙΝΗΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ $\longrightarrow$ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

ΜΑΖΑ : m (Kg)

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ : Q (Cb)

Η Έννοια της Έντασης πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Ένταση $\vec{g}$ σε ένα σημείο Α ενός βαρυτικού πεδίου καλείται το πηλίκο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί το πεδίο σε μια μάζα m , που φέρουμε στο σημείο αυτό, προς τη μάζα αυτή.

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \quad m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$\vec{g} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{m}$$

Διανυσματικό μέγεθος

$$F = G \frac{M m}{r^2}$$

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Προϋπόθεση: Η μάζα m που φέρουμε στο σημείο Α να είναι πολύ μικρή.

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \quad m^3 Kg^{-1} s^{-2}$$

Το Βαρυτικό πεδίο της Γης μας

Βάρος Σώματος

$$F = G \frac{M_{\Gamma} m}{r^2} = B$$

Ένταση **g** βαρυτικού πεδίου Γης

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{r^2}$$

ή

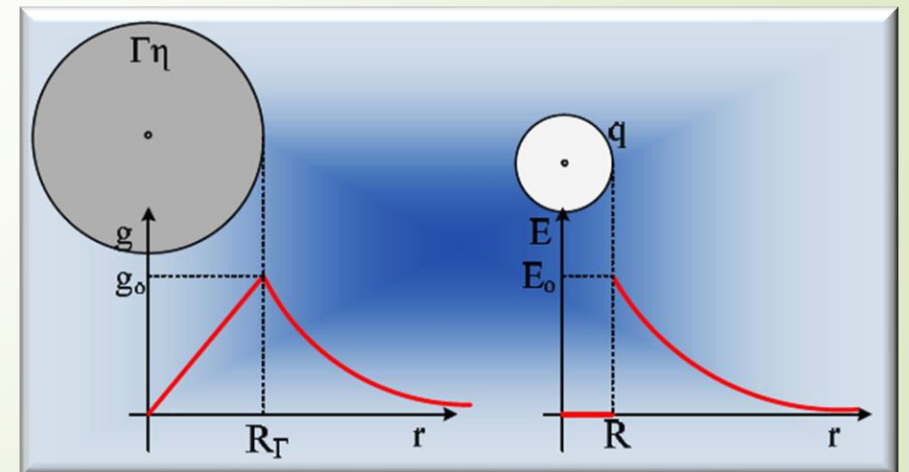
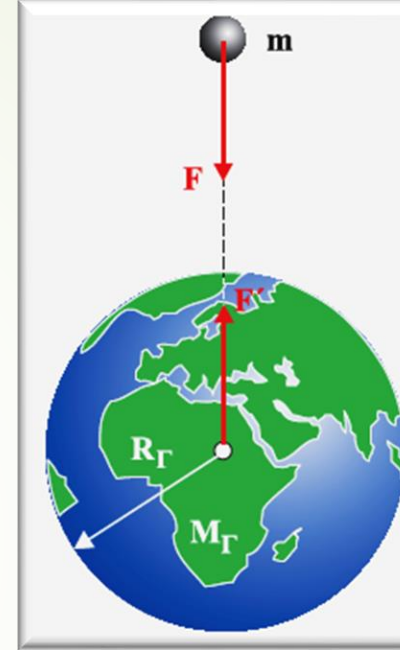
$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + h)^2}$$

Μέτρο της έντασης **g** στην επιφάνεια της Γης

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

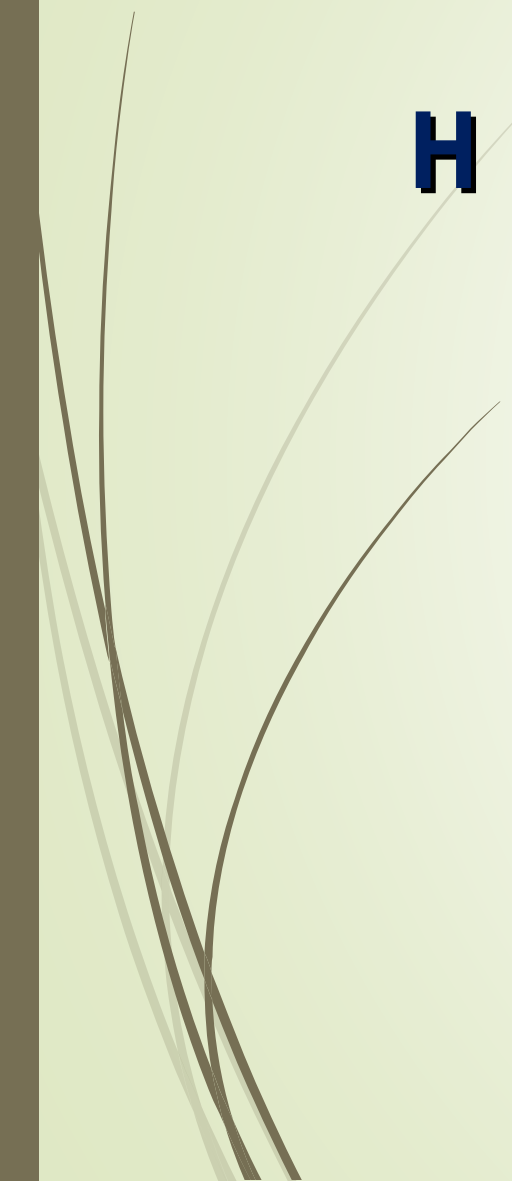
.....και στο εσωτερικό της
Γης

$$g = g_o \frac{r}{R_{\Gamma}}$$

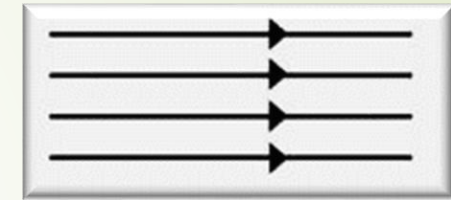
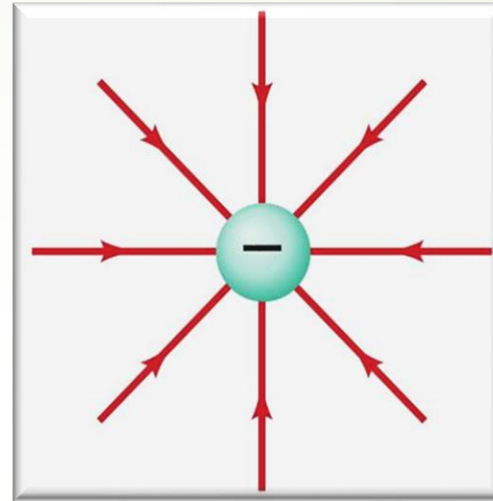
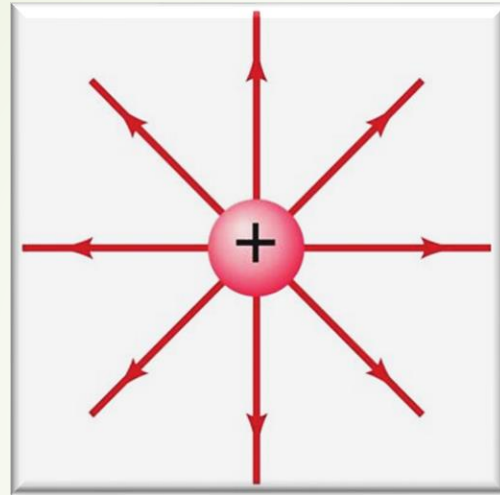
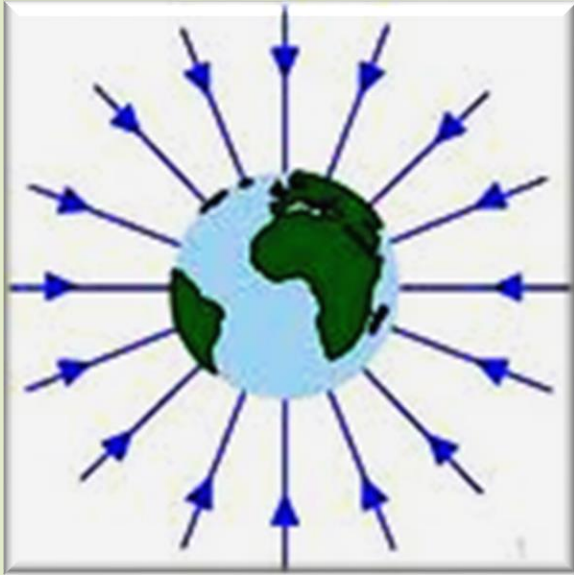




Η έννοια των γραμμών του Πεδίου



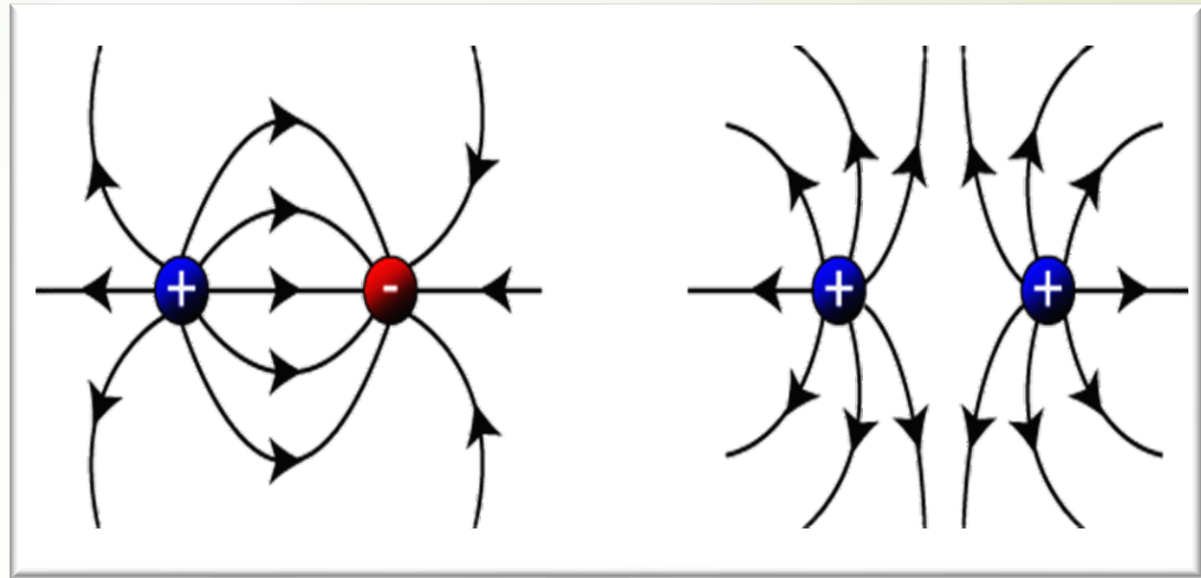
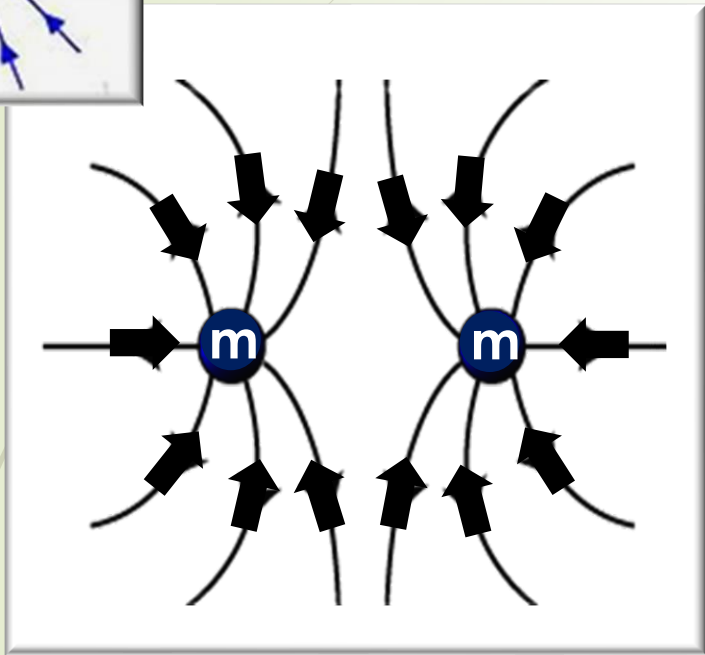
Η Έννοια των Γραμμών του Πεδίου



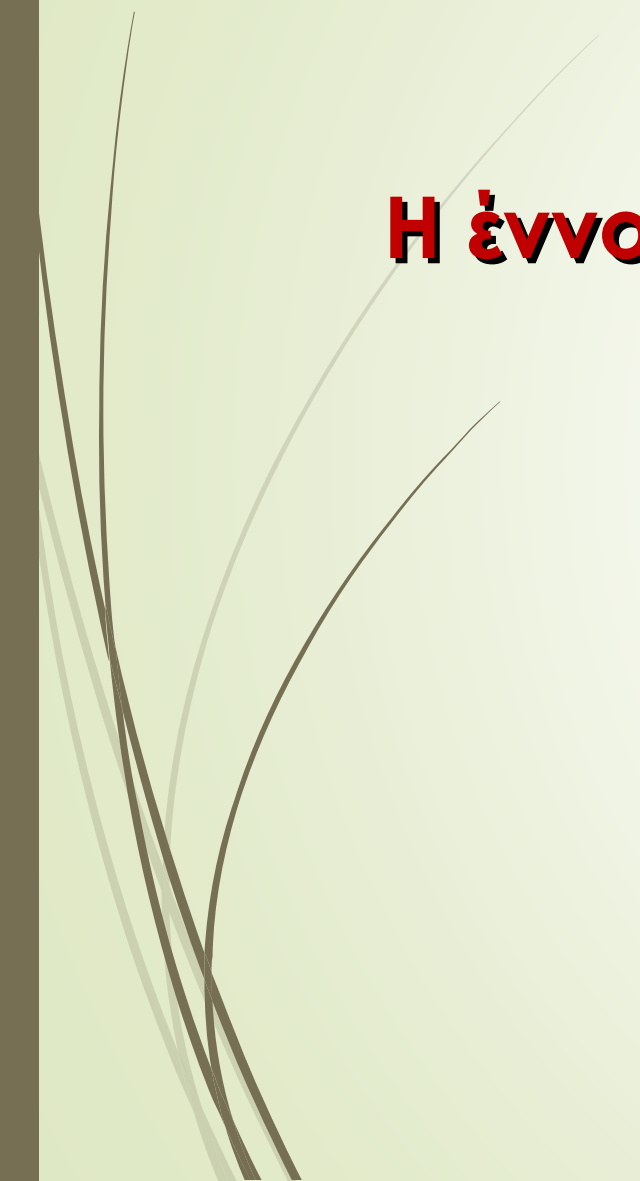
Ομογενές
Πεδίο

- ✓ Οι γραμμές ενός πεδίου έχουν αρχή (ή τέλος) την πηγή παραγωγής του πεδίου.
- ✓ Το διάνυσμα της έντασης του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της γραμμής.
- ✓ Οι γραμμές δεν τέμνονται.
- ✓ Είναι ανοικτές (**υπάρχουν και κλειστές;**).
- ✓ Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου στο χώρο αυτό.

Η Έννοια των Γραμμών του Πεδίου



- ✓ Οι γραμμές ενός πεδίου έχουν αρχή (ή τέλος) την πηγή παραγωγής του πεδίου.
- ✓ Το διάνυσμα της έντασης του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της γραμμής.
- ✓ Οι γραμμές δεν τέμνονται.
- ✓ Είναι ανοικτές (υπάρχουν και κλειστές;).
- ✓ Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου στο χώρο αυτό.



Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \int_B^A dU = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \int_B^A dU = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$dU = -F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

ΒΑΘΜΙΔΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας ενός σωματίου:

$$U(x, y) = 3x^3y - 7x$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F σε ένα τυχαίο σημείο (x, y) που δέχεται το σωματίο.

Λύση

Υπολογίσουμε κάθε παράγωγο ξεχωριστά

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(3x^3y - 7x) = -(9x^2y - 7)$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(3x^3y - 7x) = -(3x^3 - 0) = -3x^3$$

$$\vec{F} = -(9x^2y - 7)\hat{i} - 3x^3\hat{j}$$

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας μιας μάζας M μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

$$U(x, y, z) = 3x^2y + 2xz - xyz^2$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκείται στη μάζα M από το βαρυτικό πεδίο.

Λύση

Υπολογίσουμε κάθε παράγωγο ξεχωριστά

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(6xy + 2z - yz^2)$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(3x^2 - xz^2)$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(2x - 2xyz)$$

$$\vec{F} = -(6xy + 2z - yz^2)\hat{i} - (3x^2 - xz^2)\hat{j} - (2x - 2xyz)\hat{k}$$

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας μιας μάζας M που βρίσκεται σε μια τυχαία θέση στο γήινο βαρυτικό πεδίο.

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκείται στη μάζα m από το γήινο βαρυτικό πεδίο.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow F_r = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right) \Rightarrow$$

$$F_r = GMm \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow F_r = -GMm \frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$\vec{F}_r = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Νόμος της
Παγκόσμιας έλξης



Διαγράμματα Δυναμικής Ενέργειας

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-1

► Η θέση $x = 0$ είναι θέση **ευσταθούς ισορροπίας**.

► Οποιαδήποτε μετατόπιση μακριά από τη συγκεκριμένη θέση προκαλεί μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη θέση $x = 0$.

► Οι διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στις θέσεις εκείνες για τις οποίες η $U(x)$ έχει ελάχιστη τιμή.

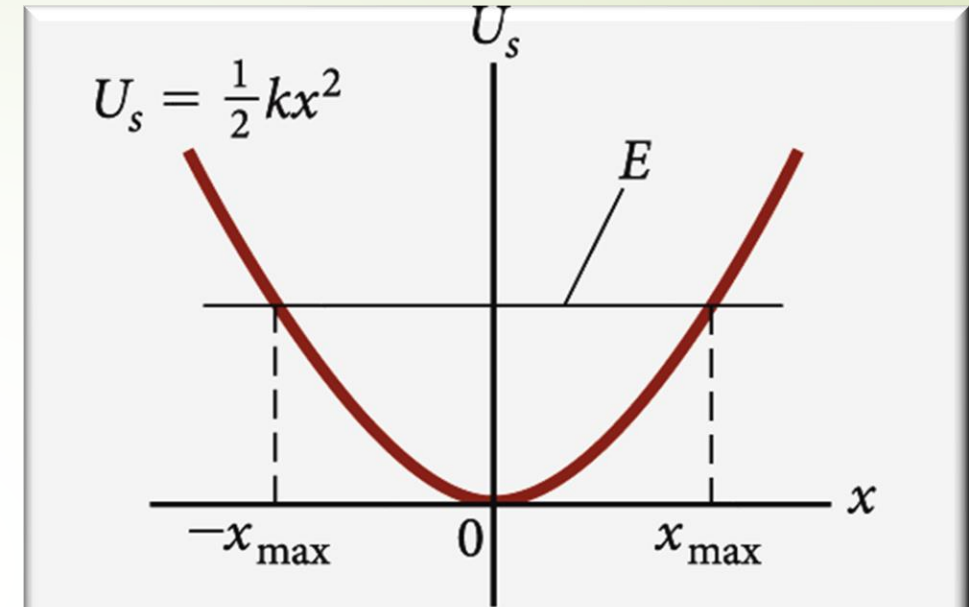
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

► Στη θέση $x = 0$, $F_x = 0$, άρα το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία.

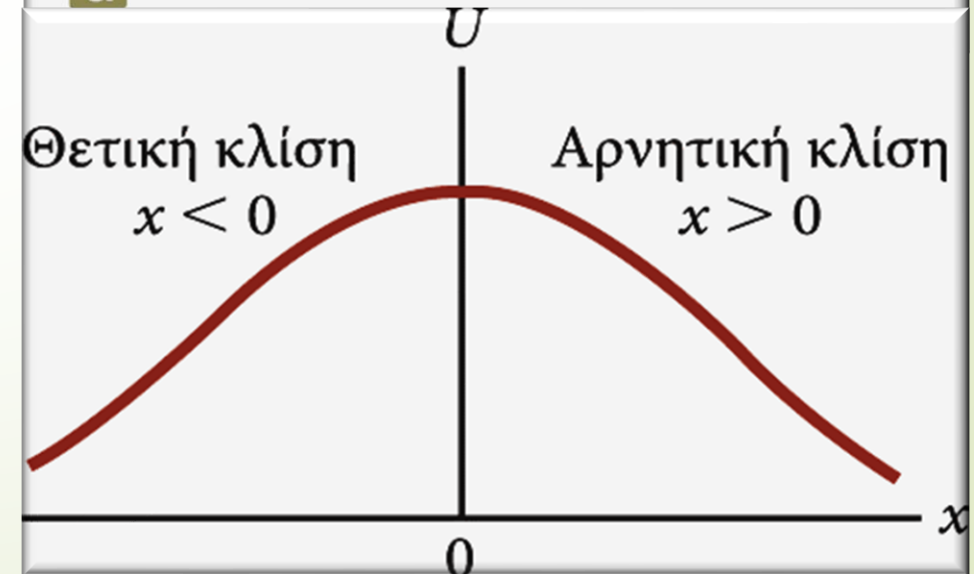
► Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x , το σωματίδιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.

► Αυτό είναι ένα παράδειγμα **ασταθούς ισορροπίας**.

► Οι διατάξεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε εκείνες τις θέσεις για τις οποίες η $U(x)$ έχει μέγιστη τιμή.

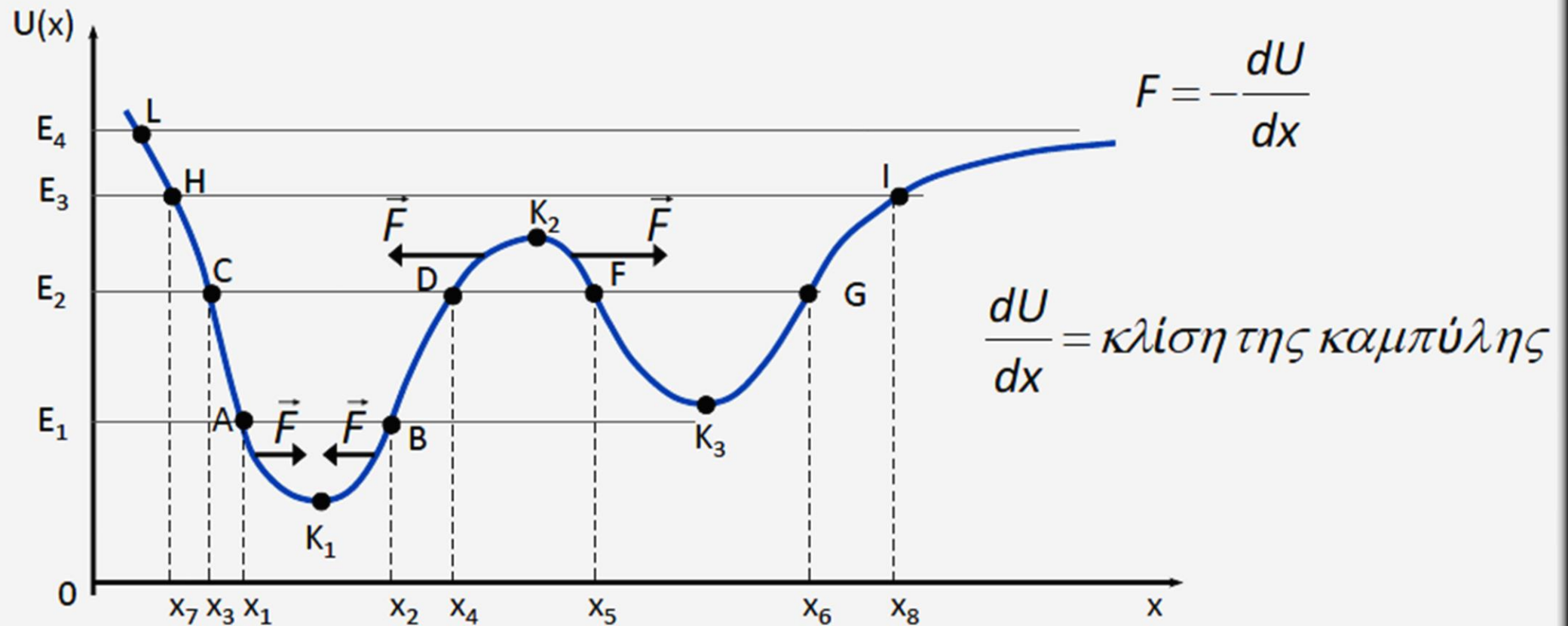


α

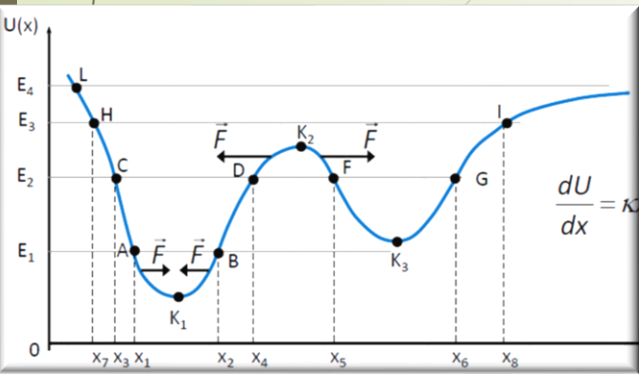


Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-2

- Με τη βοήθειά τους κατανοούμε την κίνηση των σωματιδίων χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση κίνησής τους



Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-3



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Αυξανόμενου του x , όταν η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, η κλίση είναι θετική κι επομένως $F = -\frac{dU}{dx} < 0$ ($\vec{F} \rightarrow -x$)
Ενώ αν η δυναμική ενέργεια μειώνεται η κλίση είναι αρνητική και επομένως
 $F = -\frac{dU}{dx} > 0$ ($\vec{F} \rightarrow +x$)
- Στα σημεία K_1, K_2, K_3 : $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0$ και αποτελούν θέσεις ισορροπίας.
- Στα K_1, K_3 : η καμπύλη έχει ελάχιστο και τα K_1, K_3 είναι θέσεις **ευσταθούς ισορροπίας**
- Δηλαδή αν το σωματίδιο που βρίσκεται στις αντίστοιχες θέσεις στον άξονα x , απομακρυνθεί κατά λίγο απ' αυτές, οι δυνάμεις F δρουν σαν δυνάμεις επαναφοράς και το επαναφέρουν στη θέση ισορροπίας

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-4



- Στο K_2 η καμπύλη έχει μέγιστο. Το K_2 είναι θέση **ασταθούς ισορροπίας**. Δηλαδή αν κατά λίγο το σωματίδιο απομακρυνθεί απ' αυτή, οι ασκούμενες δυνάμεις το απομακρύνουν οριστικά.
- Έστω ότι δίνεται η ολική μηχανική ενέργεια E_1 , όπως στο σχήμα. Αυτή τέμνει την καμπύλη στα A και B. Επειδή είναι $K_1 = E_1 - U_1 > 0$, το σωματίδιο **δε μπορεί να κινηθεί αριστερά του A**. Επομένως πρέπει $x > x_1$. Όμως **δεν μπορεί να κινηθεί και δεξιά του B** γιατί τότε θα ήταν $K < 0$. Επομένως $x < x_2$ και το σώμα θα κάνει ταλάντωση μεταξύ των δύο αυτών των θέσεων
- Τα A και B λέγονται σημεία **αναστροφής**. Όταν το σωματίδιο φτάσει στις αντίστοιχες θέσεις x_1, x_2 η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται και το σωματίδιο αντιστρέφει την κίνησή του





























































































































































































































































































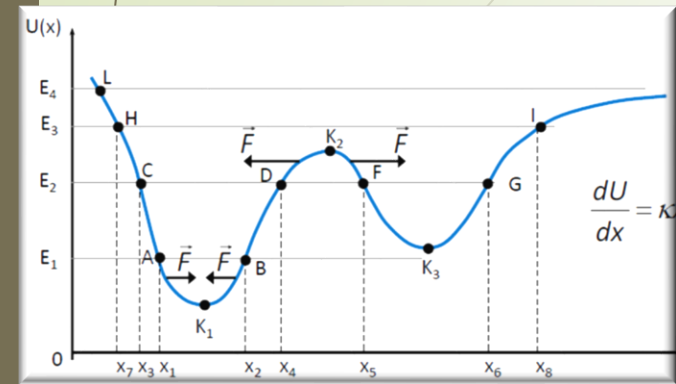








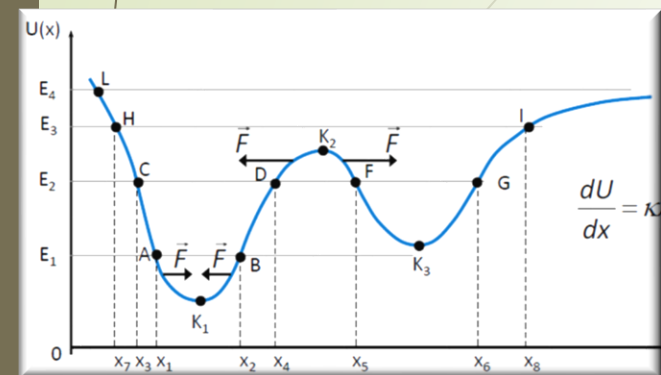

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-5



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Αν η ολική μηχανική ενέργεια είναι E_2 , το σωματίδιο **δεν μπορεί να κινηθεί αριστερά του C και δεξιά του G** γιατί η κινητική του ενέργεια θα ήταν $K_2 = E_2 - U_2 < 0$. Ομοίως **δεν μπορεί να κινηθεί μεταξύ των D και F**. Δηλαδή πρέπει $x_3 < x < x_4$ και $x_5 < x < x_6$. Όταν το σωματίδιο βρίσκεται σε μια απ' αυτές της περιοχές δεν μπορεί να μεταπηδήσει στην άλλη. Επομένως οι δυο επιτρεπόμενες περιοχές χωρίζονται από ένα **φράγμα δυναμικού**.
- Αν $E_{ολ} = E_3$, το σωματίδιο εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των θέσεων x_7 και x_8 .
- Αν $E_{ολ} = E_4$, το σωματίδιο δεν κάνει ταλάντωση. Μπορεί να κινείται μόνο δεξιά του L απομακρυνόμενο προς το ∞ . Αν κινείτο προς τα αριστερά, μόλις φτάσει στο L αναπηδά απομακρυνόμενο προς τα δεξιά.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-6



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Όταν δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(r)$ μπορούν να υπολογιστούν οι θέσεις και το είδος ισορροπίας

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι:

1. Υπολογίζεται η παράγωγος $\frac{dU}{dr}$
2. Η δύναμη είναι $F = -\frac{dU}{dr}$
3. Οι θέσεις ισορροπίας υπολογίζονται θέτοντας $F=0$ και έστω ότι είναι η r_1 , r_2 και r_3

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-7

4.

Το είδος ισορροπίας προσδιορίζεται ως εξής:

α) Υπολογίζεται η $\frac{d^2U}{dr^2}$

β) Υπολογίζεται η τιμή της $\frac{d^2U}{dr^2}$ στις θέσεις ισορροπίας r_1 , r_2 και r_3

γ) Αν π.χ. $\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=r_1} > 0$ η καμπύλη εμφανίζει ελάχιστο και το r_1 είναι θέση **ευσταθούς** ισορροπίας.

Αν π.χ. $\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=r_2} < 0$ η καμπύλη εμφανίζει μέγιστο και το r_2 είναι θέση **ασταθούς** ισορροπίας

Αν π.χ. $\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=r_3} = 0$ στο r_3 η ισορροπία είναι **αδιάφορη**.

U(x)

E₄

E₃

E₂

E₁

0

x₇ x₃ x₁

x₂ x₄ x₅ x₆ x₈

L

H

C

A

B

K₁

D

K₂

F

K₃

G

I

$\frac{dU}{dx} = 0$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-8

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων είναι:

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) Τις θέσεις ισορροπίας και iii) Το είδος ισορροπίας.

Λύση

i) Υπολογίσουμε την $F(x)$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right) = (-x^2 + x + 2)$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right) = -(-x^2 + x + 2)$$

$$\vec{F} = -(-x^2 + x + 2)\hat{i} = (x^2 - x - 2)\hat{i}$$

ii) Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται από $\frac{dU}{dx} = 0$.

Οπότε:
 $-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ Στις θέσεις αυτές η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει **ακρότατα**.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-9

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων είναι:

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) Τις θέσεις ισορροπίας και iii) Το είδος ισορροπίας.

Λύση – Συνέχεια...

- iii) Πρέπει να ελέγξουμε εάν τα ακρότατα αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Επομένως υπολογίζουμε την τιμή της 2^{ης} παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις που μηδενίζεται η 1^η παράγωγος.

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right) = (-x^2 + x + 2)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx} (-x^2 + x + 2) = (-2x + 1)$$

Επομένως για $x=2$ $\frac{d^2U}{dx^2} = (-2 \cdot 2 + 1) = -3 < 0$ **ΜΕΓΙΣΤΟ**
έχουμε: για $x=-1$ έχουμε: $\frac{d^2U}{dx^2} = (-2 \cdot (-1) + 1) = 3 > 0$ **ΕΛΑΧΙΣΤΟ**

ΜΕΓΙΣΤΟ: ΘΕΣΗ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟ: ΘΕΣΗ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-10

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων δίδεται από τη σχέση:

$$U(r) = r e^{-ar}$$

Όπου $a > 0$ μία σταθερά και r η απόσταση μεταξύ τους. Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) τις θέσεις ισορροπίας και iii) το είδος ισορροπίας.

Λύση

$$i) \quad \frac{dU}{dr} = \frac{d}{dx} (r e^{-ar}) = (1 - ar) e^{-ar} \quad \vec{F}_r = -\frac{dU}{dr} \hat{r} = -(1 - ar) e^{-ar} \hat{r} = (ar - 1) e^{-ar} \hat{r}$$

$$ii) \quad \text{Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται από } \frac{dU}{dr} = 0.$$

Οπότε:

$$(1 - ar) e^{-ar} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \infty \\ r = \frac{1}{a} \end{cases} \quad \text{Στις θέσεις αυτές η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει} \\ \text{ακρότατα.}$$

iii) Πρέπει να ελέγξουμε εάν τα ακρότατα αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Επομένως υπολογίζουμε την τιμή της 2^{ης} παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις που μηδενίζεται η 1^η παράγωγος.

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{d}{dr} ((1 - ar) e^{-ar}) = \frac{d}{dr} (e^{-ar}) - \frac{d}{dr} (ar e^{-ar}) = -a e^{-ar} - a e^{-ar} + a^2 r e^{-ar} = -2a e^{-ar} + a^2 r e^{-ar}$$

$$\text{Επομένως για } r = \frac{1}{a} \text{ έχουμε: } \frac{d^2U}{dr^2} = \left(-2a e^{-\frac{1}{a}a} + a^2 \frac{1}{a} e^{-a \frac{1}{a}} \right) = \frac{-2a}{e} + \frac{a}{e} = -\frac{a}{e} < 0$$

ΜΕΓΙΣΤΟ

**ΘΕΣΗ ΑΣΤΑΘΟΥΣ
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-11

Δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(r)=2r^3-18r$

α) Να υπολογίσετε τη δύναμη F

β) Να βρείτε τις θέσεις ισορροπίας

γ) Να βρείτε το είδος ισορροπίας

δ) Να σχεδιάσετε την $U(r)$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{dU}{dr} = 6r^2 - 18, F = -\frac{dU}{dr} = -6r^2 + 18$$

$$\beta) F = 0 \Rightarrow -6r^2 + 18 = 0 \Rightarrow r_1 = +\sqrt{3} = 1.73, r_2 = -\sqrt{3} = -1.73$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-12

γ) είδος ισορροπίας $\frac{d^2U}{dr^2} = 12r$

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία.}$$

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=-\sqrt{3}} = -12\sqrt{3} < 0 \quad \text{ασταθής ισορροπία}$$

δ) Πότε $U(r)=0$;

$$2r^3 - 18r = 0 \Rightarrow 2r(r^2 - 9) = 0 \Rightarrow r = 0, \quad r = +3, \quad r = -3$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-13

- Ποιες οι τιμές της $U(r)$ στις θέσεις ισορροπίας;

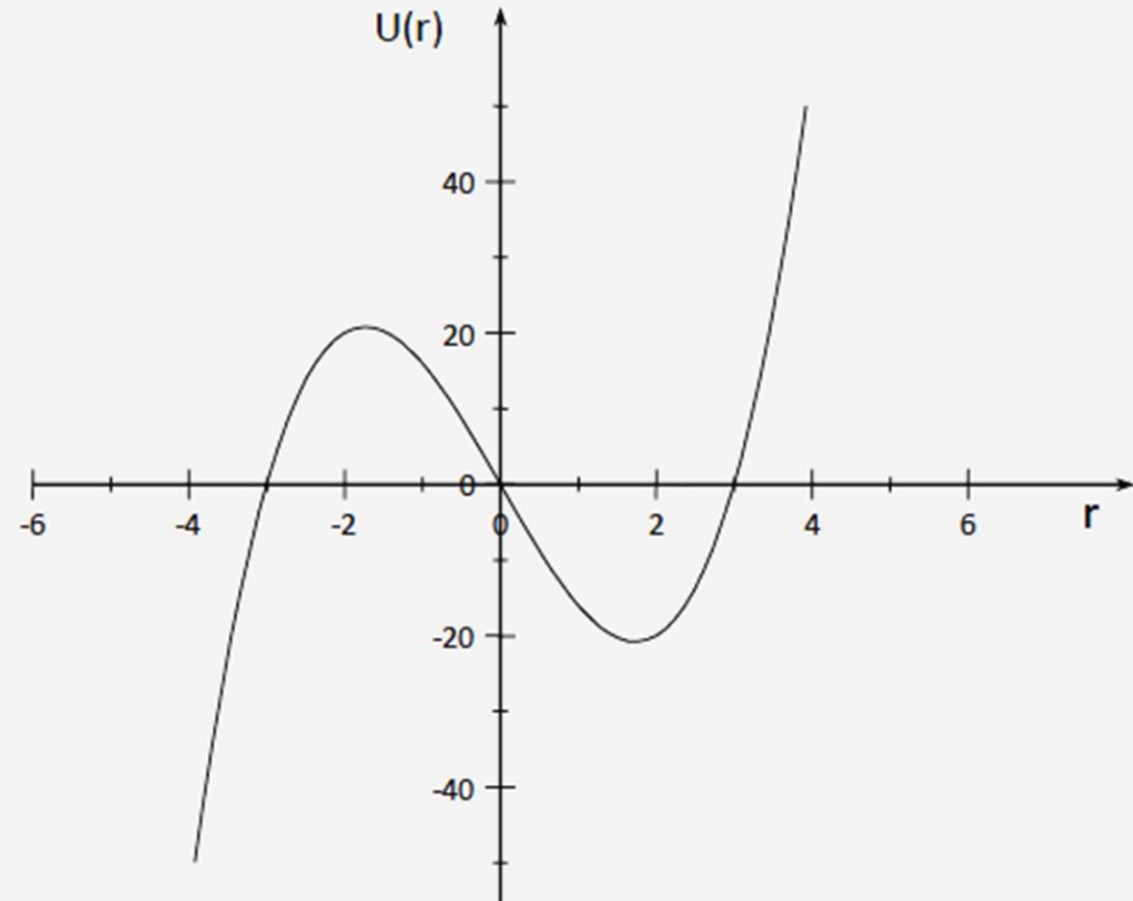
$$U(r=0)=0$$

$$U(r=\sqrt{3})=-12\sqrt{3}=-20.78$$

$$U(r=-\sqrt{3})=12\sqrt{3}=20.78$$

$$\text{Όταν } r \rightarrow +\infty \quad U(r) \rightarrow +\infty$$

$$\text{Όταν } r \rightarrow -\infty \quad U(r) \rightarrow -\infty$$



$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-14

- Αν $U(r) = 2r^4 - 4r^2$ να υπολογιστούν τα ζητούμενα του προηγούμενου παραδείγματος

Λύση

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

$$\alpha) \quad \frac{dU}{dr} = 8r^3 - 8r \quad F = -\frac{dU}{dr} = -8r^3 + 8r$$

$$\beta) \quad F = 0 \Rightarrow -8r^3 + 8r = 0 \Rightarrow r = 0, r = +1, r = -1$$

γ) είδος ισορροπίας

$$\frac{d^2U}{dr^2} = 24r^2 - 8$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-15

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=0} = -8 < 0 \quad \text{ασταθής ισορροπία, μέγιστο}$$

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=+1} = +16 > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία, ελάχιστο}$$

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=-1} = +16 > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία, ελάχιστο}$$

δ) Πότε $U(r)=0$;

$$2r^4 - 4r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$r=0, \quad r=+\sqrt{2}=1.41, \quad r=-\sqrt{2}=-1.41$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-16

- Ποιες οι τιμές της $U(r)$ στις θέσεις ισορροπίας;

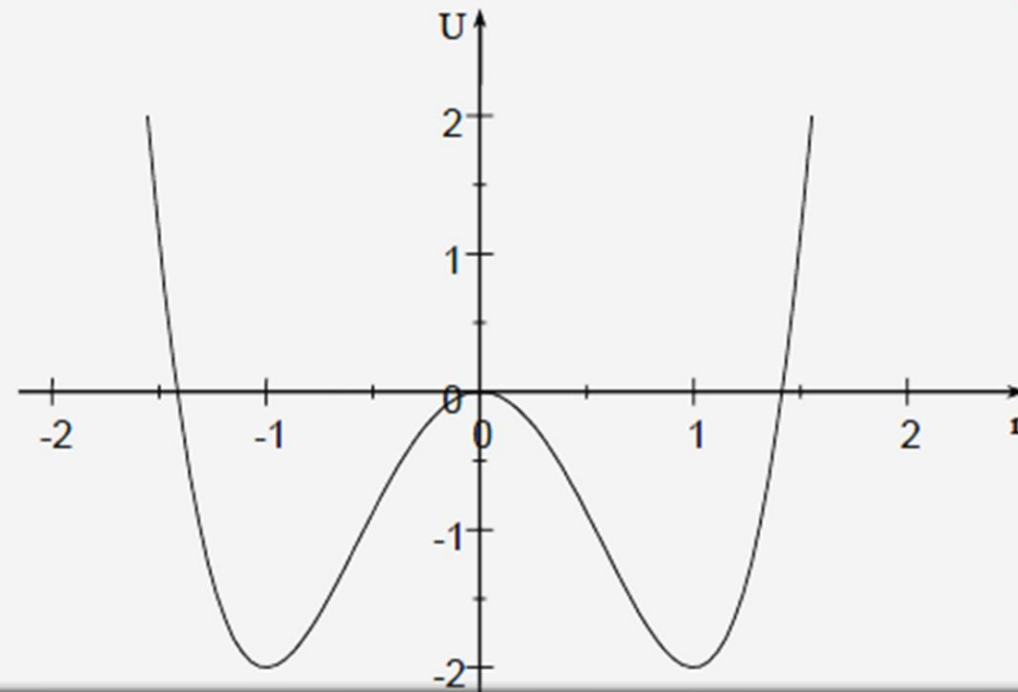
- $U(r=0)=0$

- $U(r=+1)=-2$

- $U(r=-1)=-2$

Όταν $r \rightarrow +\infty$ $U(r) \rightarrow +\infty$

Όταν $r \rightarrow -\infty$ $U(r) \rightarrow +\infty$



$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Η Δυναμική Ενέργεια που σχετίζεται με τη δύναμη μεταξύ δύο ουδέτερων ατόμων σε ένα μόριο δίδεται από τη σχέση:

$$U(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

Όπου ε και σ δύο σταθερές, μεγαλύτερες του μηδενός. Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης,

ii) τις θέσεις ισορροπίας και iii) το είδος ισορροπίας.

2) Σε ένα σωματίο ασκείται συντηρητική δύναμη της μορφής: $\vec{F} = (-Ax + Bx^2)\hat{i}$. i) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σωματίου σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει από την αρχή των αξόνων ($x=0$) απόσταση X . Δίδεται $U=0$ J για $x=0$ m. ii) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU του σωματίου καθώς μετακινείται από την θέση $x=2$ m στη θέση $x=3$ m. iii) να υπολογίσετε επίσης τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας ΔK .

3) Ένα σωματίο μάζας $m=4$ Kgr κινείται κατά τον άξονα x . Η θέση του περιγράφεται από την εξίσωση:

$x = t + 2t^3$, όπου το x είναι μέτρα και το t σε sec. Να υπολογίσετε: i) Την κινητική του ενέργεια μια τυχαία χρονική στιγμή t . ii) Την επιτάχυνσή του a . iii) Τη δύναμη F που εξασκείται σε αυτό και iv) Το έργο που παράγει η δύναμη F κατά το χρονικό διάστημα $t=0$ s έως $t=2$ s.