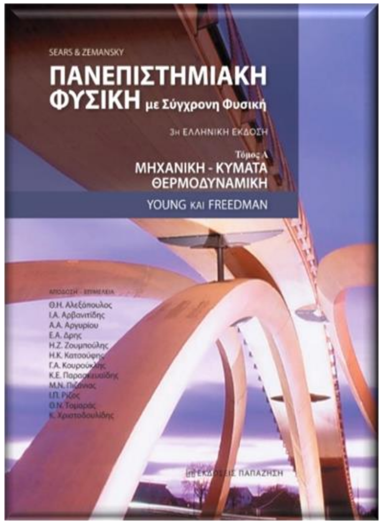
Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

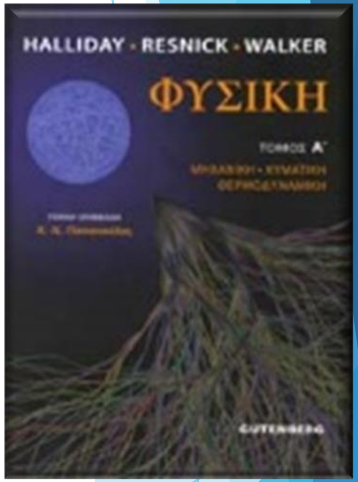
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ

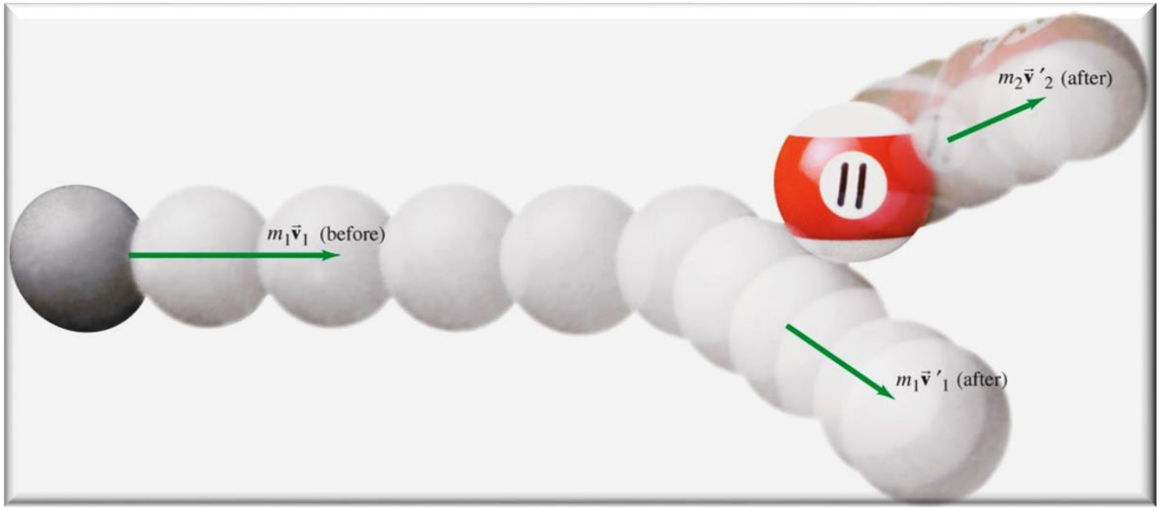


Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Η έννοια της Ορμής - Κρούσεις



Η έννοια της Ορμής

Η ορμή ορίζεται ως διάνυσμα που εκφράζεται από τη σχέση

$$\vec{P} = m\vec{u}$$

Μονάδα Μέτρησης Ορμής : ***Kg m/s***

Η φορά του διανύσματος της ορμής είναι αυτή του διανύσματος της ταχύτητας και έχει τρεις συνιστώσες:

$$P_x = mu_x \qquad P_y = mu_y \qquad P_z = mu_z$$

$$\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$$

Η έννοια της Ορμής

$$\vec{P} = m\vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Γενικευμένος Νόμος του Νεύτωνα

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

Παράδειγμα

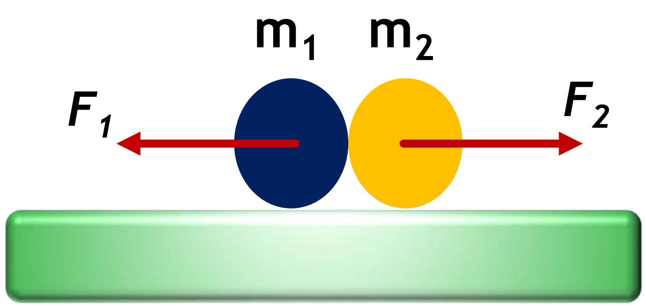
Δίδεται η ορμή ενός σώματος το οποίο κινείται επάνω στον άξονα x από τη σχέση: $P = kt^2$. Να υπολογιστούν: i) Οι διαστάσεις του μεγέθους k. ii) Η δύναμη F που εξασκείται στο σώμα.

Λύση

i) ;;;;;;;;;;

ii) $F = \frac{dP}{dt} \Rightarrow F = \frac{d\left(kt^2\right)}{dt} \Rightarrow F = 2kt$

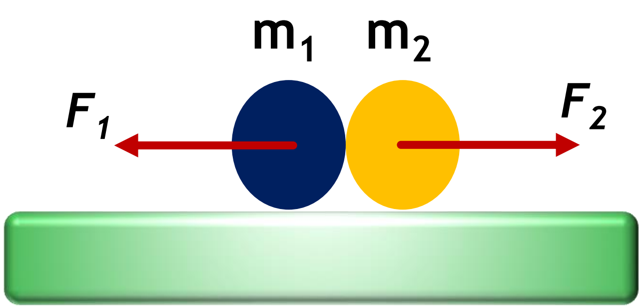
Η έννοια της Ορμής



- Η έννοια της ορμής είναι πολύ χρήσιμη όταν δύο ή περισσότερα σώματα αλληλεπιδρούν (Σύστημα σωμάτων).
- Εσωτερικές δυνάμεις εξασκούνται μεταξύ των σωμάτων.
- Εξωτερικές δυνάμεις εξασκούνται στα σώματα του συστήματος από το περιβάλλον.

Εάν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν τότε το σύστημα σωμάτων ονομάζεται απομονωμένο.

Θεώρημα Διατήρησης της Ορμής



Δύο σώματα μαζών m_1 και m_2 κινούνται αντίθετα και συγκρούονται μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι στα δύο σώματα δε δρουν εξωτερικές δυνάμεις. Κατά το χρονικό διάστημα της σύγκρουσής τους εμφανίζονται στα δύο σώματα δυνάμεις Δράσης - Αντίδρασης F_1 και F_2.

$$\vec{F}_1 = m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt} \Rightarrow m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\left(m_1\vec{u}_1\right)}{dt} + \frac{d\left(m_2\vec{u}_2\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\vec{P}_1\right)}{dt} + \frac{d\left(\vec{P}_2\right)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = const.}$$

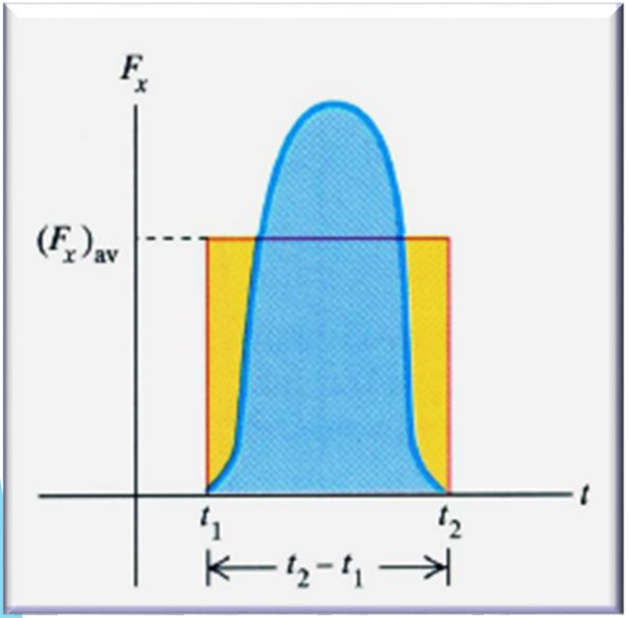
Θεώρημα διατήρησης της ορμής

Ώθηση δύναμης

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\vec{P}$$

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

Η Ώθηση Ω δύναμης είναι μια διανυσματική ποσότητα στενά συνδεδεμένη με την έννοια της ορμής.



$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{P}$$

Θεώρημα Ώθησης - Ορμής

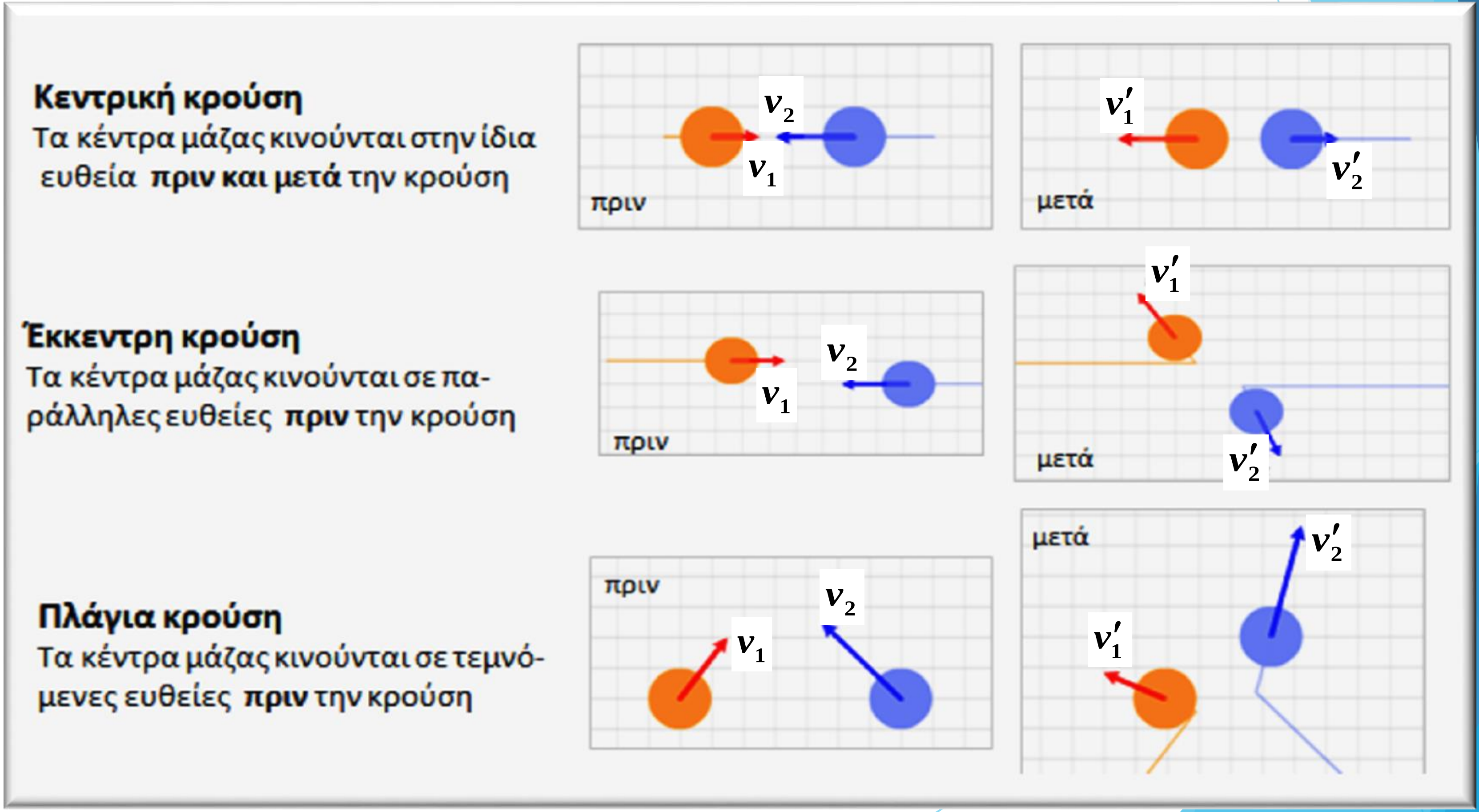
Ώθηση δύναμης

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{P}$$

Κρούση σωμάτων

Κρούση ονομάζουμε το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο δύο ή περισσότερα σώματα έρχονται σε επαφή για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται μεταξύ τους πολύ ισχυρές δυνάμεις.



Κρούση σωμάτων

- **Ελαστική κρούση:** Η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται.

- **Μη ελαστική κρούση:** Η ολική κινητική ενέργεια δε διατηρείται. Κάποιο ποσοστό της ολικής κινητικής ενέργειας πριν την κρούση χάνεται (μετατρέπεται σε θερμότητα).

- **Πλαστική Κρούση:** Τα σώματα ενώνονται κατά την κρούση και στη συνέχεια κινούνται μαζί ως ένα σώμα. Η ολική κινητική ενέργεια δε διατηρείται.

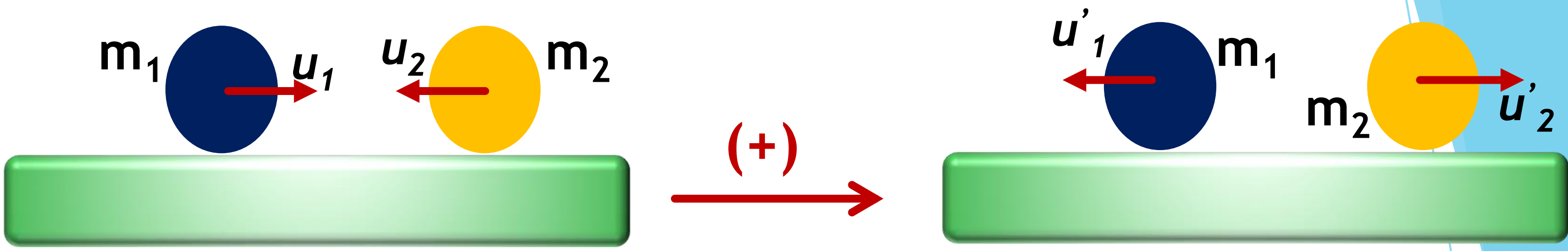
✓ **Η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται πάντα σε κάθε είδος κρούσης (πρέπει πάντα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν).**

✓ **Η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται μόνο στις ελαστικές κρούσεις.**

✓ **Η Αρχή διατήρησης της ορμής μας δίνει τρεις εξισώσεις (μία για κάθε διάσταση) καθώς η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος.**

Πάντα ορίζουμε μία θετική φορά για τα διανύσματα των ορμών.

Κεντρική κρούση σωμάτων - Ελαστική



$$m_1u_1 - m_2u_2 = m_2u_2' - m_1u_1'$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2$$

Λύνουμε το σύστημα δύο εξισώσεων δύο αγνώστων.

$$u_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$u_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

Κεντρική κρούση σωμάτων - Ελαστική

$$u_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$u_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

I) Εάν **$m_1=m_2=m$** και **$v_1=v$** ενώ **$v_2=0$** τότε ποιες είναι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση;

$$v_1' = 0 \qquad v_2' = v$$

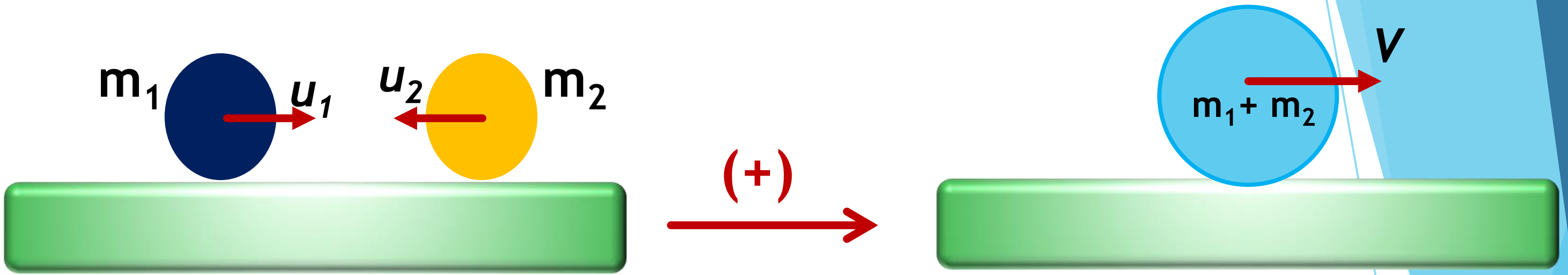
Τα δύο σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες.

II) Εάν **$m_1<<m_2$** και **$v_1=v$** ενώ **$v_2=0$** τότε ποιες είναι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση;

$$v_1' = -v_1 = -v \qquad v_2' = 0$$

Το πρώτο σώμα αντιστρέφει την κίνησή του και κινείται προς τα πίσω με το ίδιο μέτρο ταχύτητας ενώ το δεύτερο συνεχίζει να παραμένει ακίνητο.

Κεντρική κρούση σωμάτων - Πλαστική



$$m_A u_A - m_B u_B = (m_A + m_B)V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_A u_A - m_B u_B}{m_A + m_B}$$

Πόση κινητική ενέργεια έγινε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης;

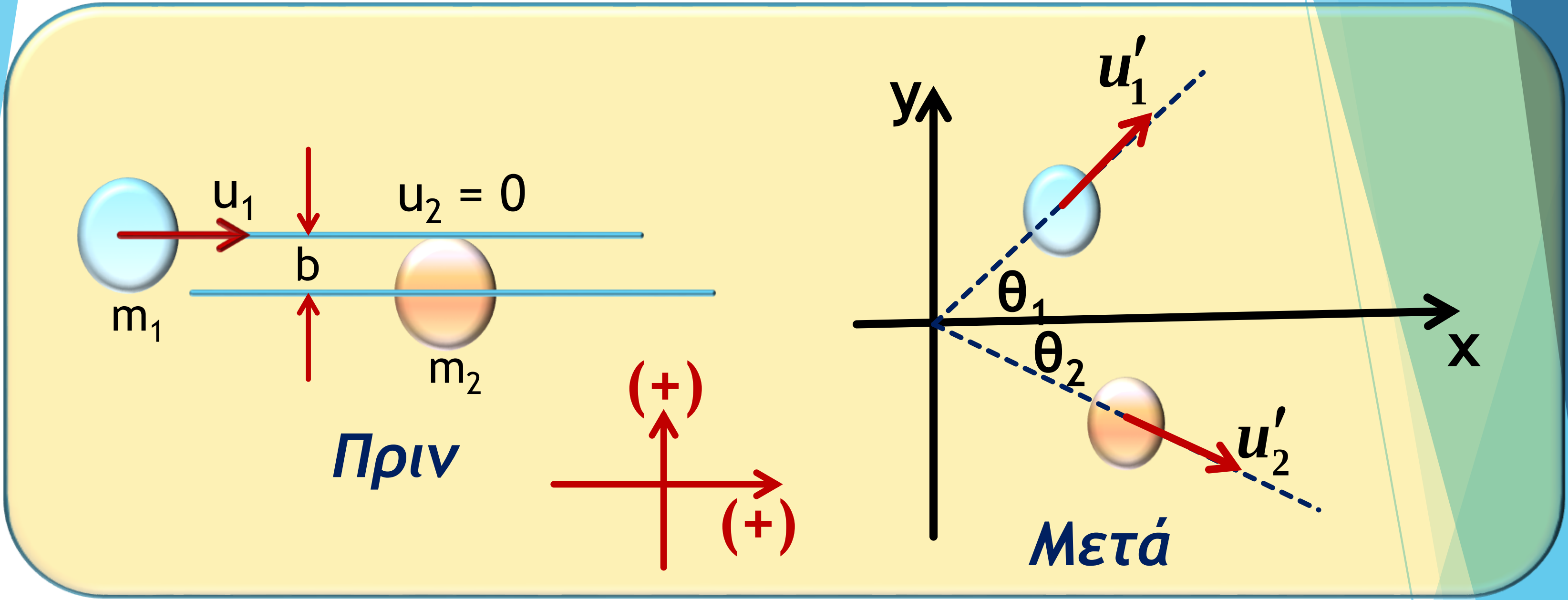
$$K_{\pi\rho\iota\nu} = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2$$

$$K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 \Rightarrow K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A u_A - m_B u_B}{m_A + m_B}\right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{(m_A u_A - m_B u_B)^2}{m_A + m_B}$$

$$\boxed{\Delta \mathrm{K} = K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} > 0}$$

Κρούση σωμάτων - Έκκεντρη



Άξονας x

b: Παράμετρος κρούσης

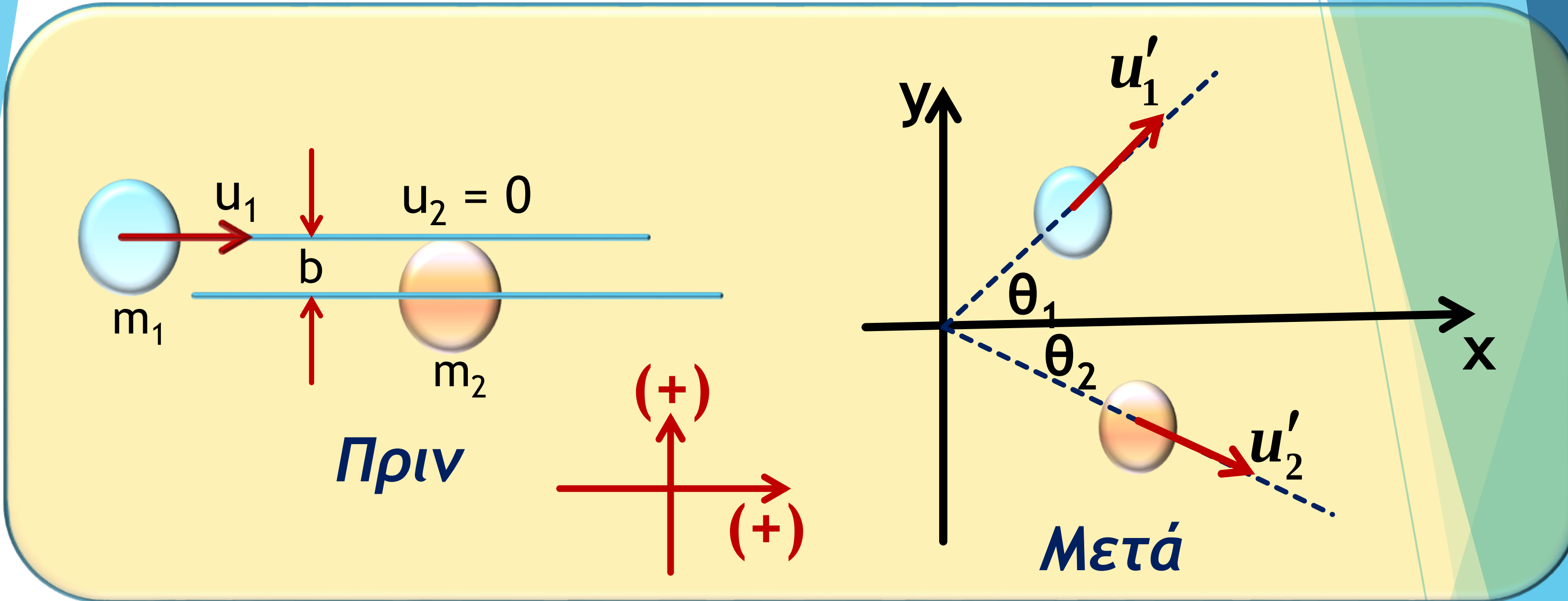
$$m_1 u_1 = m_1 u_1' \cos\theta_1 + m_2 u_2' \cos\theta_2$$

Άξονας y

$$0 = m_1 u_1' \sin\theta_1 - m_2 u_2' \sin\theta_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \cos^2\theta_1 + \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \cos^2\theta_2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \sin^2\theta_2$$

Κρούση σωμάτων - Έκκεντρη



Επομένως:

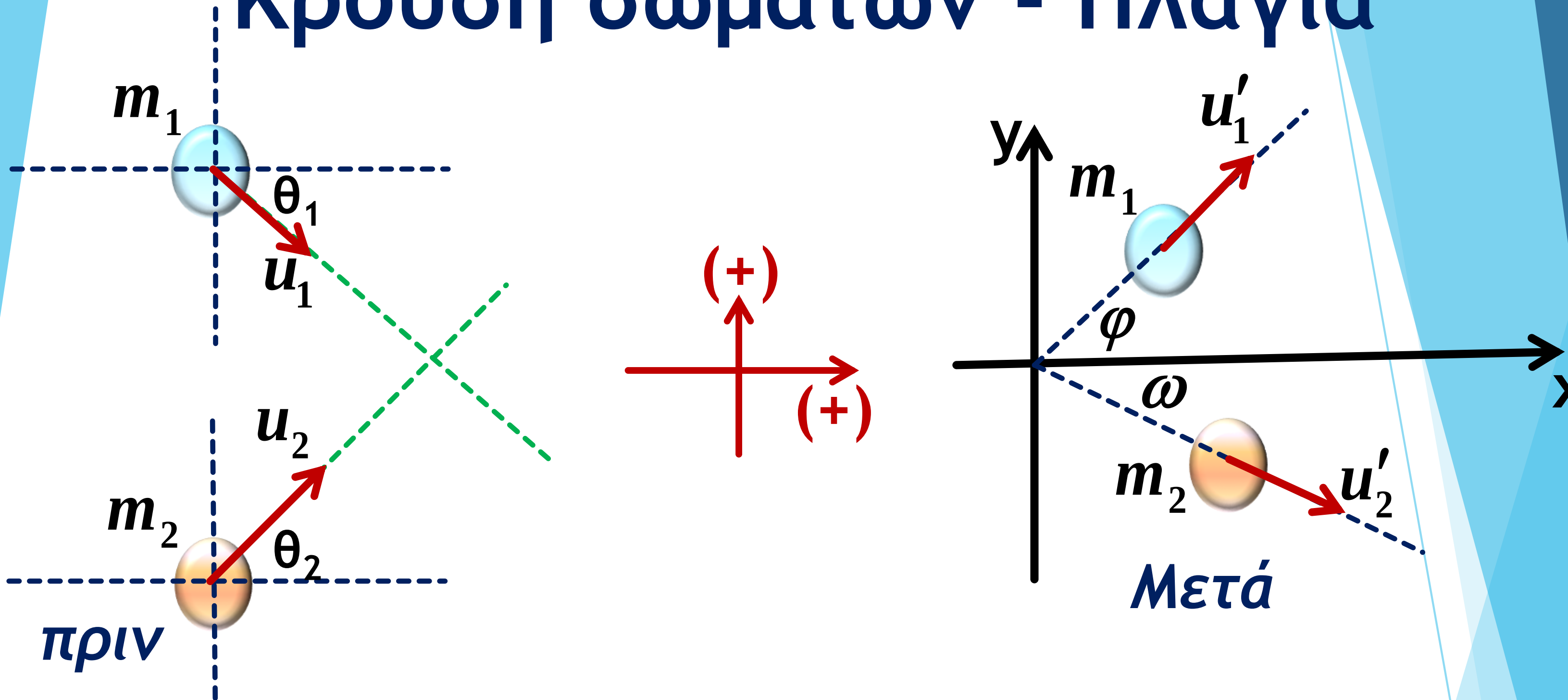
❖ **Από την εφαρμογή της Αρχής διατήρησης της ορμής προκύπτουν δύο εξισώσεις, μία για κάθε διεύθυνση (άξονας x και άξονας y).**

❖ **Η τρίτη εξίσωση προκύπτει από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας.**

Αλλά… **Οι άγνωστες ποσότητες είναι τέσσερις…**

Χρειάζεται αναγκαστικά να μας δοθεί ένα δεδομένο ώστε να μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα το σύστημα των εξισώσεων.

Κρούση σωμάτων - Πλάγια



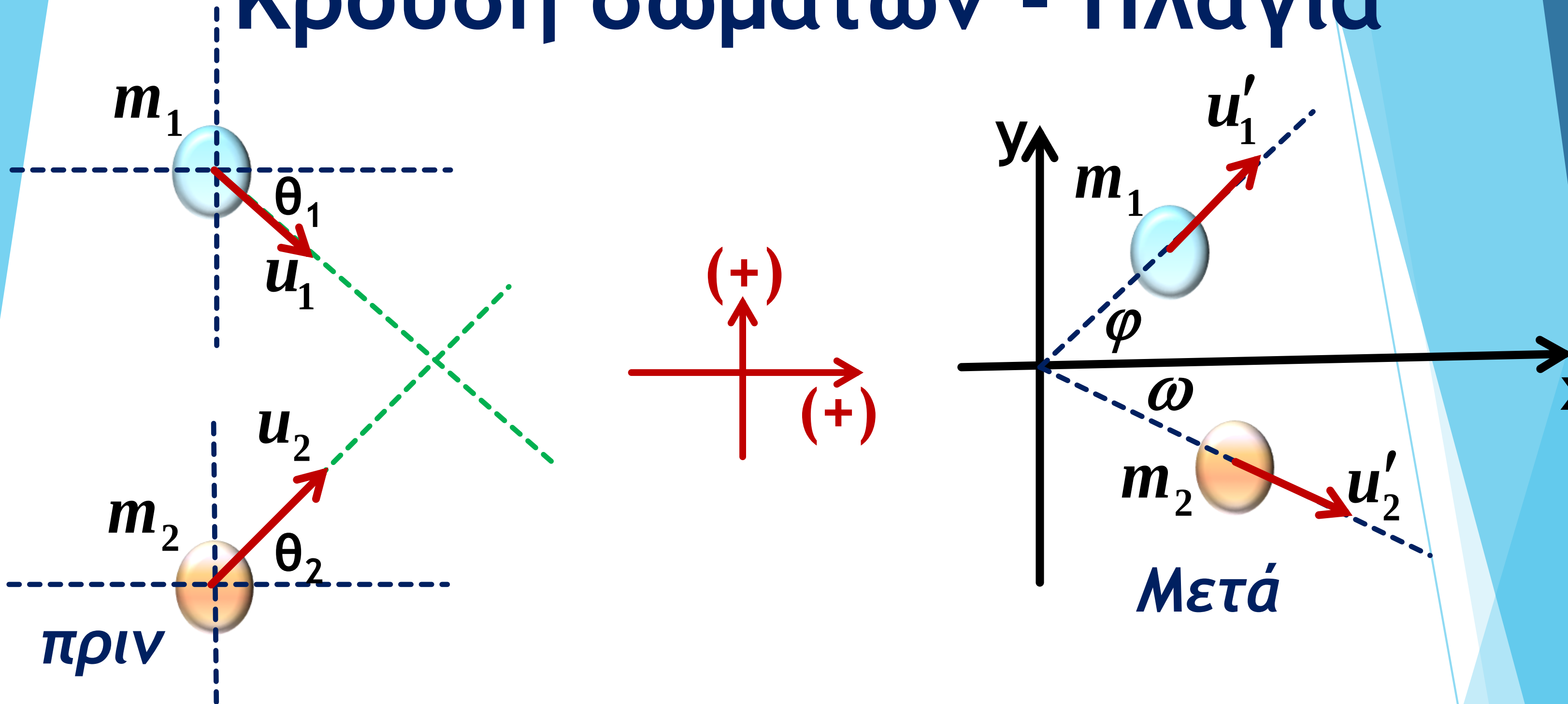
Άξονας x: $$m_1 u_1 \cos\theta_1 + m_2 u_2 \cos\theta_2 = m_1 u_1' \cos\varphi + m_2 u_2' \cos\omega$$

Άξονας y: $$m_2 u_2 \sin\theta_2 - m_1 u_1 \sin\theta_1 = m_1 u_1' \sin\varphi - m_2 u_2' \sin\omega$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 \cos^2\theta_1 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \cos^2\theta_1 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \cos^2\theta_2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \cos^2\theta_2 =$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \cos^2\omega + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \sin^2\omega$$

Κρούση σωμάτων - Πλάγια



Πάλι…..

❖ Από την εφαρμογή της Αρχής διατήρησης της ορμής προκύπτουν δύο εξισώσεις, μία για κάθε διεύθυνση (άξονας x και άξονας y).

❖ Η τρίτη εξίσωση προκύπτει από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας.

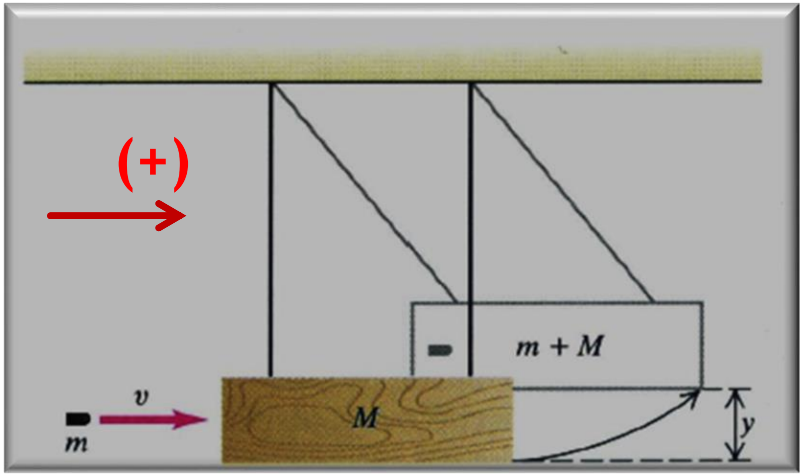
Πάλι… Οι άγνωστες ποσότητες είναι τέσσερις…

Χρειάζεται αναγκαστικά να μας δοθεί ένα δεδομένο ώστε να μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα το σύστημα των εξισώσεων.

Βαλλιστικό Εκκρεμές

Σφαίρα μάζας m και ταχύτητας υ σφηνώνεται σε ένα κομμάτι ξύλου μάζας M, όπως στο σχήμα. Το ξύλο, μετά τη κρούση, ανέρχεται σε ύψος y. Να υπολογίσετε τη ταχύτητα της σφαίρας υ πριν την κρούση.

Λύση



$$mυ = (m + M)V, \qquad υ = \frac{m + M}{m}V$$

$$\tfrac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gy,$$

$$V = \sqrt{2gy}.$$

$$υ = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gy}.$$

Καλή Μελέτη