Μηχανική - Ρευστομηχανική

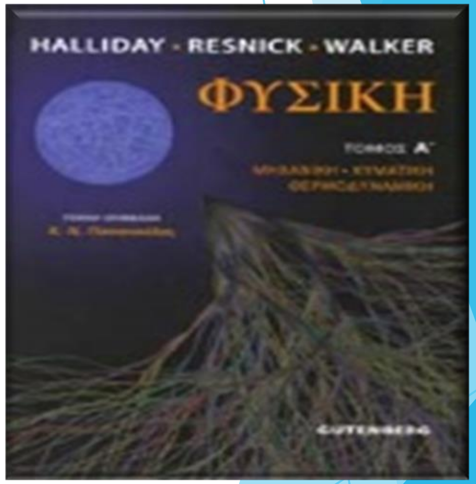
Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr, chkron@upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ

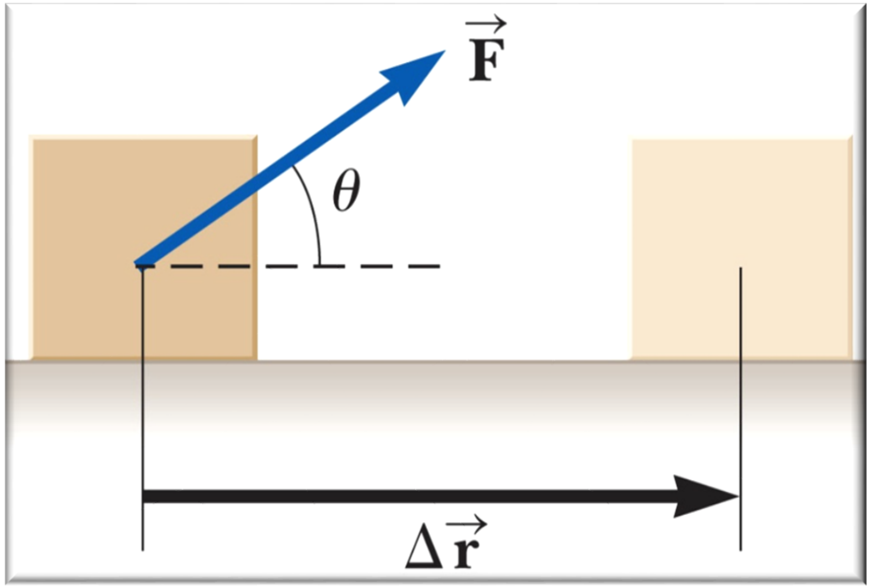
Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Η έννοια του Έργου

Έργο Δύναμης



Μία δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.

Η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ του σχήματος μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά $\Delta\vec{r}$ και παράγει έργο:

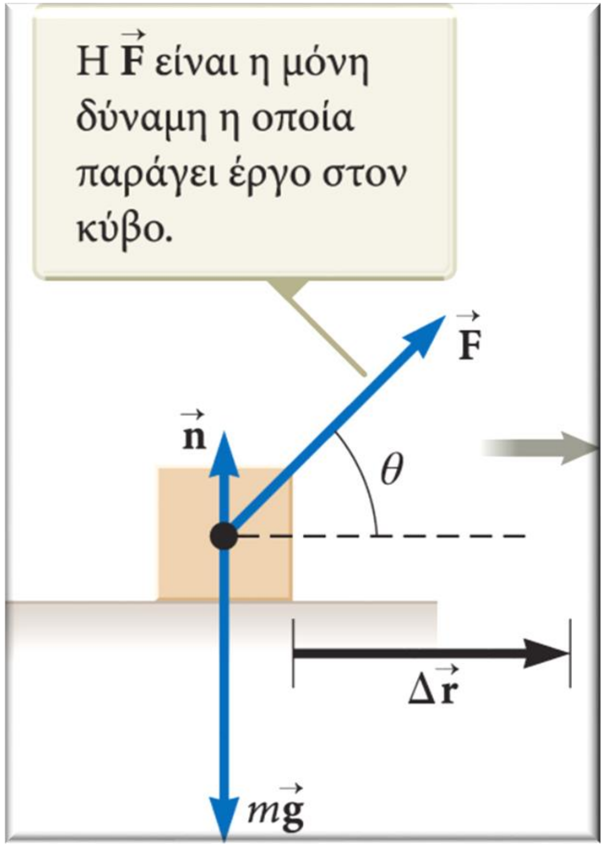
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta$$

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα δεν παράγει έργο αν το σώμα δεν μετακινείται.

Το έργο είναι βαθμωτό μέγεθος.

Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι το joule (J). 1 joule = N · m = kg · m^2 / s^2

Έργο Δύναμης

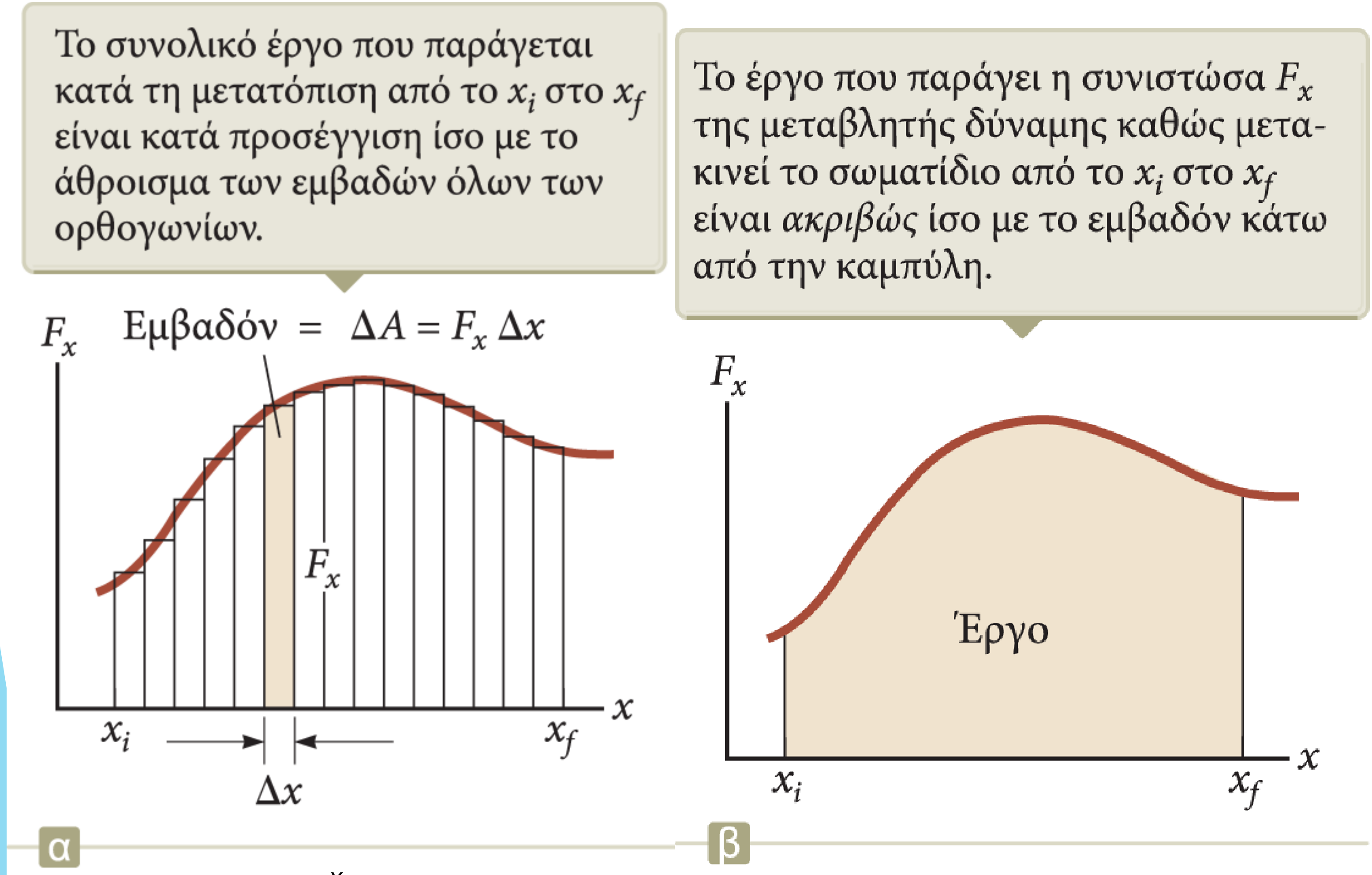


- Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από την κατεύθυνση της δύναμης σε σχέση με τη μετατόπιση.
  - Το έργο είναι θετικό όταν η προβολή της $\vec{F}$ στο $\Delta\vec{r}$ έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση.
  - Το έργο είναι αρνητικό όταν η προβολή έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης.
  - Το έργο είναι μηδέν όταν $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$
- Αν το έργο που παράγεται είναι θετικό, ενέργεια μεταφέρεται προς το σώμα.
- Αν το έργο που παράγεται είναι αρνητικό, ενέργεια μεταφέρεται από το σώμα.
- Το αποτέλεσμα είναι η μεταβολή της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο σώμα.

Η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο στο σώμα καθώς $\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι η μοναδική δύναμη που παράγει έργο στο σώμα

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης



$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Έργο πολλών δυνάμεων

Το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα είναι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Στη γενική περίπτωση μιας συνισταμένης δύναμης με μεταβαλλόμενο μέτρο και κατεύθυνση,

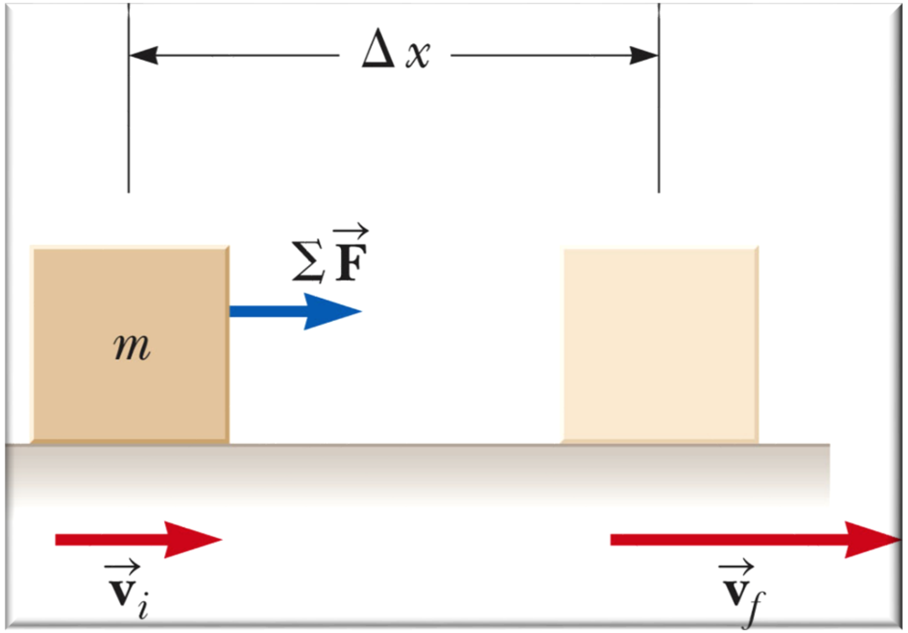
$$\mathbf{W}_{\mathbf{A \to B}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \bullet \mathbf{d}\vec{\ell}$$

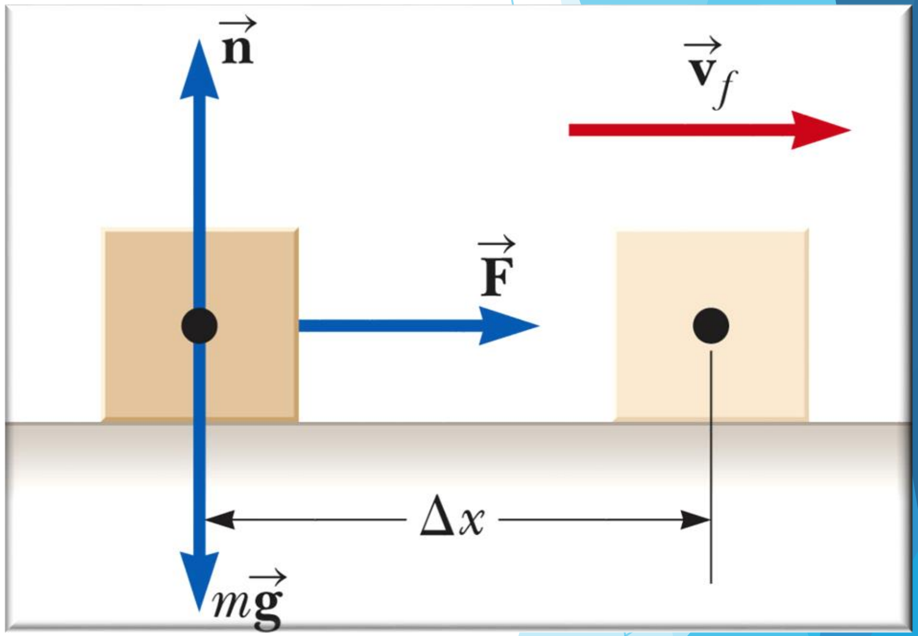
Ή ισοδύναμα το συνολικό έργο είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα του έργου που παράγει κάθε δύναμη χωριστά.

$$\mathbf{W}_{\mathbf{A \to B}} = \sum_{\text{δυνάμεις}} \left(\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \bullet \mathbf{d}\vec{\ell} \right)$$

Έργο και Κινητική Ενέργεια

Μια πιθανή επίπτωση του έργου που παράγεται για να μεταφερθεί ενέργεια προς ένα σύστημα είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του





$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\,a\,dx \Rightarrow W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{du}{dt}\,dx \Rightarrow$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{v_i}^{v_f} m\,u\,du \Rightarrow W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = m\int_{v_i}^{v_f} u\,du \Rightarrow W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = K_f - K_i = \Delta K$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \Delta K = ½mv_f^2 - 0$$

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = K_f - K_i = \Delta K$$

- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται αν το συνολικό έργο που παράγεται σε αυτό είναι θετικό.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος μειώνεται αν το συνολικό έργο είναι αρνητικό.
- Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας αναφέρεται στο μέτρο της ταχύτητας του συστήματος και όχι στην ταχύτητά του ως διάνυσμα.

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας
πλήρης απόδειξη (δε χρειάζεται να τη γνωρίζετε…)

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = = \int_A^B m\vec{\alpha} \cdot \vec{u}dt = m = \int_A^B (\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u})\, dt$$

Αλλά….. $\frac{d}{dt}(u^2)=\frac{d}{dt}(uu)=\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u})= \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{u}}}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{u}+\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}=2\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{u}}}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{u}$

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = = \int_A^B m\vec{\alpha} \cdot \vec{u}dt = m \int_A^B \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u}\right) dt =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} m \int_A^B \frac{d}{dt}(u^2)dt = \frac{1}{2}\, m \int_A^B du^2$$

$$\boldsymbol{W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = K_f - K_i = \Delta K}$$

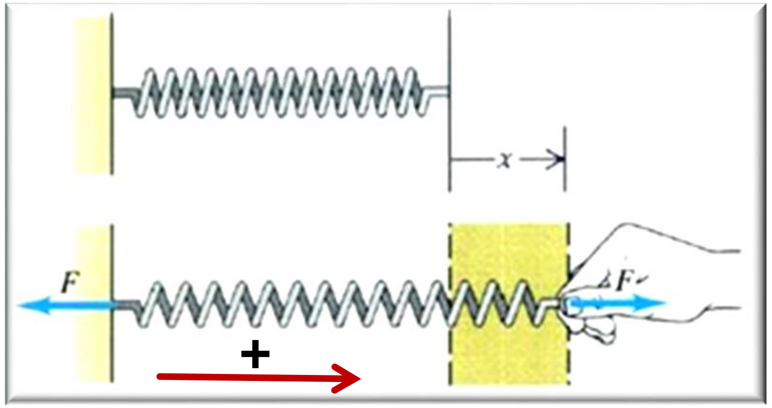
Υπολογισμός έργου δύναμης σε μία διάσταση

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx$$

Παράδειγμα

Ελατήριο ασκεί δύναμη σε σώμα της μορφής F(x)=-kx, όπου k μία σταθερά, με αποτέλεσμα το σώμα να μετατοπίζεται από τη θέση x_1 στη θέση x_2. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F(x).

Λύση



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -kx\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx$$

$$W = -k\int_A^B x\,dx \Rightarrow W = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} \Rightarrow W = -k\left(\frac{x_2^{\,2}}{2} - \frac{x_1^{\,2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$W = k\frac{x_1^{\,2}}{2} - k\frac{x_2^{\,2}}{2} < 0$$

Παραδείγματα υπολογισμού έργου δύναμης - 1 -

Σώμα μάζας m μετακινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ που εξαρτάται από την θέση x, όπου

$$\mu(x) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{x}{a}}$$

και μ_0 μια σταθερά . Πόσο έργο καταναλώνεται από την δύναμη τριβής για μετατόπιση του αντικειμένου από τη θέση $x_1 = a$ έως τη θέση $x_2 = 2a$;

Λύση

Η δύναμη της τριβής T κατά την κίνηση του σώματος είναι ίση με

$$T = \mu N = \mu B = \mu m g \quad \Rightarrow \quad T(x) = \mu_0 m g \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}$$

Το έργο της τριβής δίνεται από το ολοκλήρωμα της δύναμης $T(x)$ από την θέση $x_1 = a$ έως την θέση $x_2 = 2a$

$$W_{x_1 \to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} T dx \Rightarrow W_{x_1 \to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 m g}{1 + \frac{x}{a}} dx \Rightarrow W_{x_1 \to x_2} = \mu_0 m g \int_a^{2a} \frac{1}{1 + \frac{x}{a}} dx \Rightarrow W_{x_1 \to x_2} = \mu_0 m g \int_a^{2a} \frac{a}{a + x} dx \Rightarrow$$

$$W_{x_1 \to x_2} = a \mu_0 m g \int_a^{2a} \frac{1}{a + x} d(a + x) \Rightarrow W_{x_1 \to x_2} = a \mu_0 m g \ln(a + x)\Big|_a^{2a} \Rightarrow W_{x_1 \to x_2} = a \mu_0 m g \ln \frac{(a + 2a)}{a + a} \Rightarrow$$

$$W_{x_1 \to x_2} = a \mu_0 m g \ln \frac{3}{2}$$

Παραδείγματα υπολογισμού έργου δύναμης - 2 -

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$$

Παράδειγμα

Δύναμη F στη θετική κατεύθυνση του άξονα x δρα σε σώμα που κινείται κατά μήκος του άξονα. Αν το μέτρο της δύναμης είναι $F=10e^{-x/2}$ (N) να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F καθώς το σώμα μετακινείται από τη θέση x=0 στη θέση x=2m.

Λύση

$$W = \int_A^B \vec{F} * d\vec{l} \Rightarrow W = \int_0^2 10e^{-x/2}\,\vec{\imath} * dx\vec{\imath} \Rightarrow W = 10\int_0^2 e^{-x/2}\,dx \Rightarrow W = -10\int_0^2 e^{-x/2}\,d(-x) \Rightarrow$$

$$W = -20\int_0^2 e^{-x/2}\,d\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow W = -20e^{-x/2}]_0^2 \Rightarrow W = -20\,(e^{-2/2} - e^0) \Rightarrow W = -20\,(e^{-1} - 1) \Rightarrow$$

$$W = -20\,(0.36 - 1) \Rightarrow W = -20\,(-0.64) \Rightarrow W = 12.8\text{ J}$$

Παραδείγματα υπολογισμού έργου δύναμης - 3 -

Δύναμη F=6t (Nt) όπου t είναι ο χρόνος ασκείται σε σώμα μάζας m=2Kg κατά μήκος του άξονα x. Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο να υπολογιστεί το έργο της δύναμης στα πρώτα δύο δευτερόλεπτα της κίνησής του.

Λύση

Το έργο της δύναμης F δίδεται από το ολοκλήρωμα $W = \int_{x1}^{x2} F dx$. Επειδή η δύναμη F στο ολοκλήρωμα εξαρτάται από το χρόνο εκφράζουμε και το dx ως συνάρτηση του χρόνου. Υπολογίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση x(t) από τον νόμο του Νεύτωνα.

$$F(t) = ma \Rightarrow F(t) = m\frac{du}{dt} \Rightarrow du = \frac{F(t)}{m}dt \Rightarrow \int_0^V du = \int_0^t \frac{6t}{m}dt \Rightarrow u\Big|_0^V = \frac{6}{m}\int_0^t tdt \Rightarrow V = \frac{6}{m}\frac{t^2}{2} \Rightarrow V = \frac{3t^2}{m} \Rightarrow V = \frac{3t^2}{2}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$V = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{3t^2}{2}dt \Rightarrow x = \frac{3}{2}\frac{t^3}{3} \Rightarrow x = \frac{t^3}{2}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση του x και υπολογίζουμε τη ποσότητα dx: $x = \frac{t^3}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2}dt$ **Τότε:**

$$W = \int_0^2 F(t)dx \Rightarrow W = \int_0^2 6t\frac{3t^2}{2}dt \Rightarrow W = 9\int_0^2 t^3 dt \Rightarrow W = 9\frac{t^4}{4}\Big|_0^2 \Rightarrow W = 9\frac{2^4}{4} \Rightarrow W = 36\,J$$

Υπολογισμός έργου δύναμης σε δύο διαστάσεις

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy$$

Παράδειγμα

Σε σώμα εξασκείται η δύναμη $\vec{F} = (4x\hat{\imath} + 3y\hat{\jmath})\ (Nt)$. Το σώμα μετακινείται από τη θέση x=0m στη θέση x=5m κατά μήκος του άξονα x. Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F.

Λύση

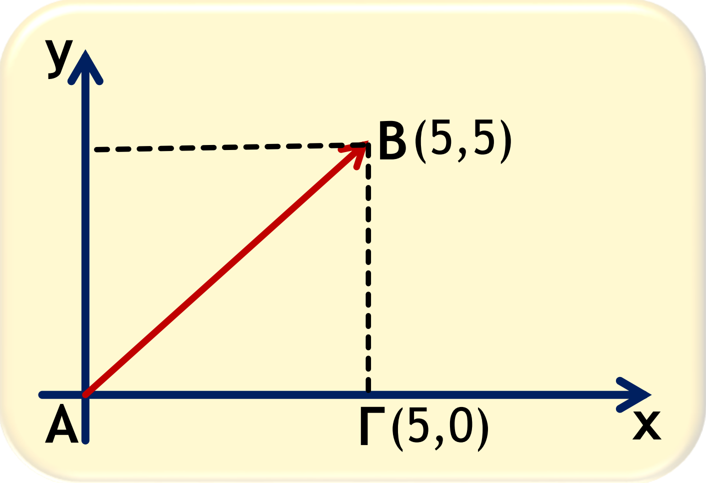
$$W = \int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{r} = \int_0^5 (4x\hat{i} + 3y\hat{j})\bullet(dx\hat{i}) \Rightarrow W = \int_0^5 4x\cdot dx \Rightarrow W = 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5 \Rightarrow W = 50J$$

Παραδείγματα υπολογισμού έργου δύναμης - 5 -

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}=\alpha y\hat{i}+bx\hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (5,5) κατά μήκος των εξής διαδρομών:

I) Κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία Α και Β.

II) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ όπου το σημείο Γ είναι το Γ (5,0).



I) $$W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow W=\int_A^B\left(\alpha y\hat{i}+bx\hat{j}\right)\cdot\left(dx\hat{i}+dy\hat{j}\right)\Rightarrow W=\int_A^B\left(\alpha y\,dx+bx\,dy\right)\Rightarrow$$

Αλλά ισχύει ότι: x=y και dx=dy. Οπότε:

$$W=\int_A^B\left(\alpha y\,dx+bx\,dy\right)\Rightarrow W=\int_0^5\left(\alpha x\,dx+by\,dy\right)\Rightarrow$$

$$W=\int_0^5 \alpha x\,dx+\int_0^5 by\,dy\Rightarrow W=\alpha\int_0^5 x\,dx+b\int_0^5 y\,dy\Rightarrow$$

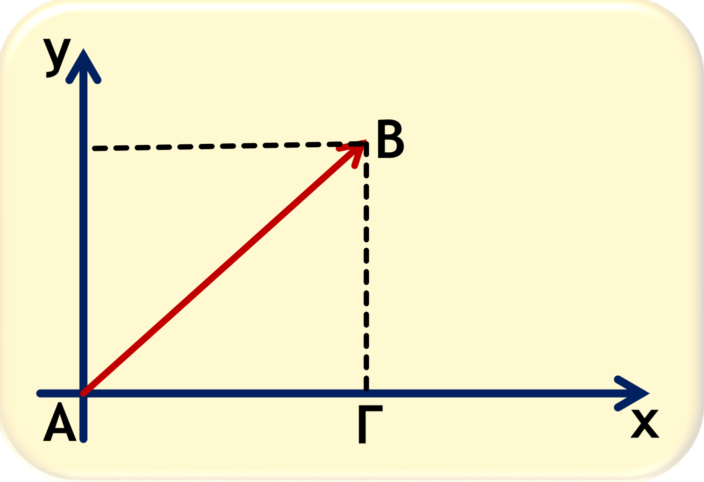
$$W=\alpha\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5+b\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^5\Rightarrow W=\frac{25}{2}a+\frac{25}{2}b\Rightarrow W=\frac{25}{2}(a+b)$$

Παραδείγματα υπολογισμού έργου δύναμης - 6 -

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \alpha y \hat{i} + b x \hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (5,5) κατά μήκος των εξής διαδρομών:

I) Κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία Α και Β.

II) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ όπου το σημείο Γ είναι το Γ (5,0).



II) $W = W_{A\to\Gamma} + W_{\Gamma\to B} = W = \int_{A}^{\Gamma}\left(\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}\right)\cdot dx\hat{i} + \int_{\Gamma}^{B}\left(\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}\right)\cdot dy\hat{j} \Rightarrow$

$$W = W_{A\to\Gamma} + W_{\Gamma\to B} = W = \int_0^5 \alpha y\, d x + \int_0^5 b x\, d y \Rightarrow$$

$$W = 0 + \int_0^5 b x\, d y \Rightarrow W = b x \int_0^5 d y \Rightarrow W = b x\, y\Big|_0^5 \Rightarrow W = b\, 5\cdot 5 \Rightarrow W = 25b$$

Το έργο αυτής της δύναμης εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να μετακινηθούμε από το σημείο Α στο σημείο Β.

Παραδείγματα υπολογισμού έργου δύναμης - 7 -

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}+2xy\hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (2,4) κατά μήκος της καμπύλης y=x² .

Λύση

$$W=\int_A^B \vec{F}\bullet d\,\vec{r}=\int_A^B\left(\left(x^2+y^2\right)\hat{i}+2xy\hat{j}\right)\bullet\left(d\,x\hat{i}+d\,\mathrm{y}\,\hat{j}\right)\Rightarrow W=\int_0^2\left(x^2+y^2\right)d\,x+\int_0^4 2xydy\Rightarrow$$

$$W=\int_0^2 x^2dx+\int_0^2 y^2d\,x+2\int_0^4 xydy$$

Αλλά ισχύει ότι: $y=x^2$ Οπότε:

$$W=\int_0^2 x^2d\,x+\int_0^2 x^4d\,x+2\int_0^4 y^{1/2}ydy\Rightarrow W=\int_0^2 x^2d\,x+\int_0^2 x^4d\,x+2\int_0^4 y^{3/2}dy\Rightarrow$$

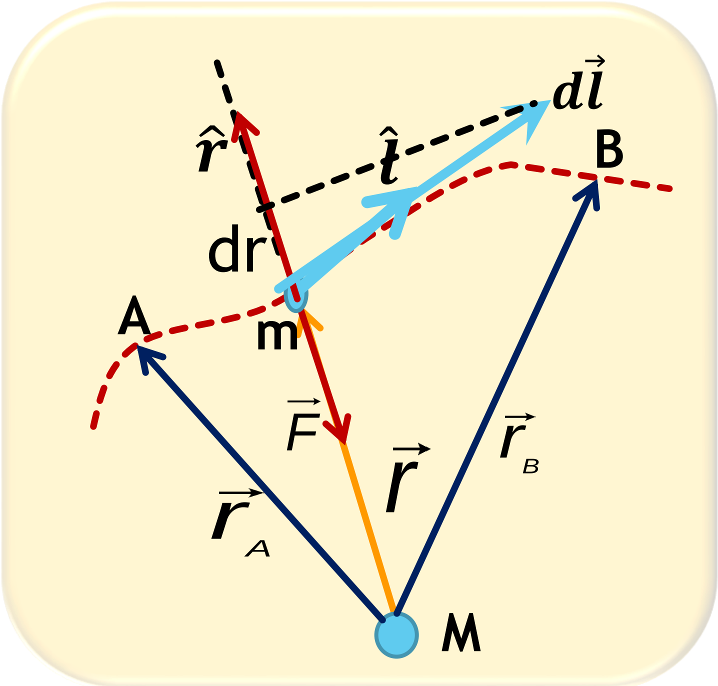
$$W=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2+2\left.\frac{y^{5/2}}{5/2}\right|_0^4\Rightarrow W=\cdots\cdot$$

Κάνετε τις πράξεις και υπολογίστε το τελικό αποτέλεσμα σε Joule

Έργο βαρυτικής δύναμης

Βαρυτικό Πεδίο

Υπολογίζουμε το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής από το σημείο A στο B



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\hat{\imath}\cdot dl\hat{l} =$$

$$-GMm\int_A^B \left(\frac{dl}{r^2}\right)\hat{\imath}\cdot\hat{l} = -GMm\int_A^B \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Αλλά $\quad dl\cos\theta = dr \quad$ Οπότε:

$$-GMm\int_A^B \frac{dl}{r^2}\cos\theta = -GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$ Τελικά:

$$W_{A\to B} = -\frac{GMm}{r_A} - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right) = U_A - U_B$$

Συντηρητική Δύναμη

Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση

Υπολογισμός έργου δύναμης σε τρεις διαστάσεις

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \left(3x^2 + 6y\right)\hat{\imath} - 14yz\,\hat{\jmath} + 20xz^2\hat{k}$ (σε N και x σε m,) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $A(0, 0, 0)$ στο σημείο $B(1, 1, 1)$. Η διαδρομή είναι η καμπύλη C, η οποία δίνεται στην παραμετρική μορφή: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Λύση - Συνέχεια…

$$W = \int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{r} = \int_A^B (Fxdx + Fydy + Fzdz) = \int_A^B [(3x^2 + 6y)dx - 14yzdy + 20xz^2dz]$$

$x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, και $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2\,dt$

$$W = \int_A^B \left[\left(3x^2 + 6y\right)dx - 14yz\,dy + 20xz^2dz\right] = \int_0^1 \left[\left(3t^2 + 6t^2\right)dt - 14t^2t^3\left(2t\,dt\right) + 20t\left(t^3\right)^2\left(3t^2dt\right)\right]$$

$$\int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)dt = [3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}]\Big|_0^1 = 5\,J$$

Υπολογισμός έργου δύναμης σε τρεις διαστάσεις

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k}\right)\cdot\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \left(3x^2 + 6y\right)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$ (σε N και x σε m,) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο *A*(0, 0, 0) στο σημείο *B*(1, 1, 1) . Η διαδρομή είναι η καμπύλη *C*, η οποία δίνεται στην παραμετρική μορφή: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Λύση

Επιβεβαιώνουμε ότι τα σημεία *A* και *B* πράγματι βρίσκονται πάνω στην καμπύλη *C*. Το σημείο *A* αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$ της παραμέτρου, και το *B* στην τιμή $t = 1$. Το παραγόμενο έργο είναι ίσο με:

$$W = \int_A^B \vec{\mathrm{F}}\bullet d\vec{\mathrm{r}} = \int_A^B (Fxdx + Fydy + Fzdz) = \int_A^B [(3x^2 + 6y)dx - 14yzdy + 20xz^2dz]$$

Για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, θα πρέπει να εκφράσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα συναρτήσει μίας μόνο μεταβλητής. Επιλέγουμε να εκφράσουμε όλες τις μεταβλητές συναρτήσει του t . Έτσι, είναι:

$x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, και $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2\,dt$

Ασκήσεις για το σπίτι…

Σώμα μάζας m κινείται σε οριζόντιο επίπεδο δάπεδο μεταβλητού συντελεστή κινητικής τριβής με $\mu_\kappa=\mu_0+\alpha x^2$. Να υπολογίσετε το έργο της τριβής το οποίο καταναλώνεται κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση x_1 έως x_2. Δίδεται το g.

Πόσο έργο παράγει η δύναμη $\vec{F}=67\hat{\imath}+23\hat{\jmath}+55\hat{k}$ (Nt) όταν επενεργεί σε σώμα το οποίο κινείται ευθύγραμμα από τη θέση $\vec{r_1}=16\hat{\imath}+31\hat{\jmath}$ (m) έως τη θέση $\vec{r_2}=21\hat{\imath}+10\hat{\jmath}+14\hat{k}$ (m)

Δύναμη F στη θετική κατεύθυνση του άξονα x δρα σε σώμα που κινείται κατά μήκος του άξονα. Αν το μέτρο της δύναμης είναι $F=(1-x)e^{-x}$ (N) να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F καθώς το σώμα μετακινείται από τη θέση x=0 στη θέση x=1m.

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}=(2x+y)\hat{\imath}+(2y+x)\hat{\jmath}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (2,8) κατά μήκος της διαδρομής $y=x^3$.

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}=(x^2+y^2)\hat{\imath}+axy\hat{\jmath}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (1,1) κατά μήκος της καμπύλης (α) y=x και (β) $y=x^{1/2}$. Επίσης να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς α ώστε να παράγεται το ίδιο έργο κατά τις δύο διαδρομές.

Ευχαριστώ

Καλό διάβασμα…