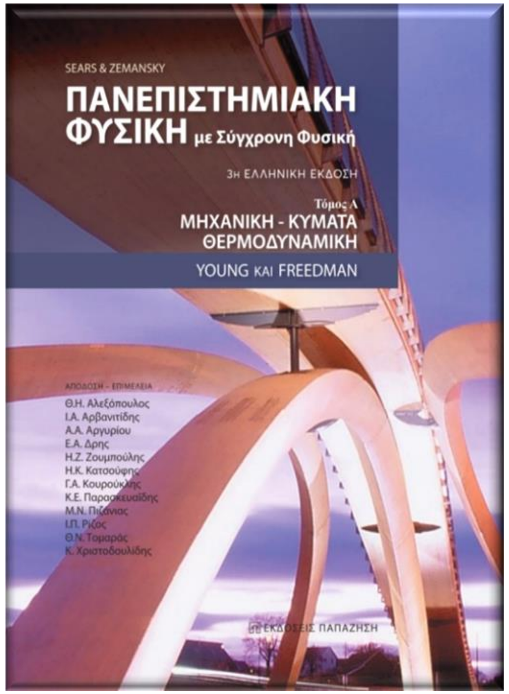
Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια,
pkara@upatras.gr

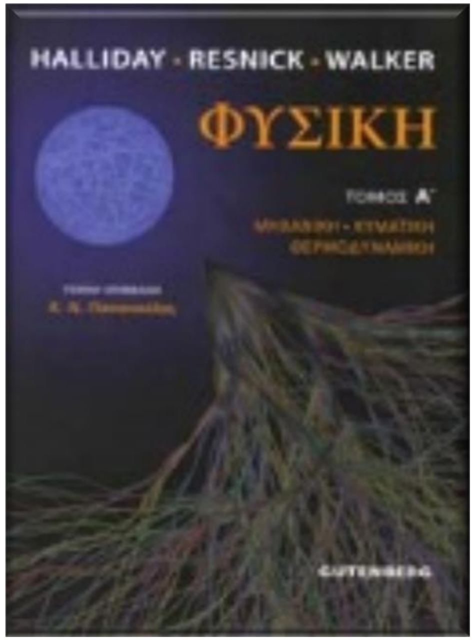
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής,
krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Περιεχόμενα Μαθήματος

Περιεχόμενα (ύλη) του μαθήματος

1. Μονάδες, φυσικές ποσότητες και διανύσματα.
2. Ευθύγραμμη κίνηση.
3. Κίνηση σε δύο ή τρεις διαστάσεις.
4. Νόμοι του Νεύτωνα.
5. Εφαρμογές των νόμων του Νεύτωνα.
6. Έργο και κινητική ενέργεια.
7. Δυναμική ενέργεια και διατήρηση της ενέργειας.
8. Βαρύτητικό πεδίο-Νόμος του Gauss
9. Ορμή, ώθηση και κρούσεις.
10. Περιστροφική κίνηση στερεών σωμάτων.
11. Δυναμική της περιστροφικής κίνησης.
12. Ισορροπία και ελαστικότητα.
13. Περιοδικές κινήσεις.
14. Μηχανική των ρευστών.

Εβδομαδιαίο Πρόγραμμα

Δευτέρα 9:00-11:00

Τρίτη 12:00-14:00

Πέμπτη 11:00-13:00

Link Μαθήματος (το ίδιο πάντα, εκτός εάν υπάρξει άλλη ενημέρωση)

https://upatras-gr.zoom.us/j/93119710940?pwd=N01VdUpSTGY0dTJscGMzRm44UWlPUT09

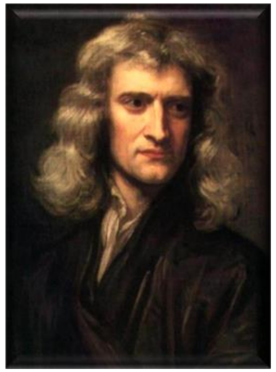
Φυσική (Κορωνίδα των Επιστημών)

Θεμελιώδης επιστήμη

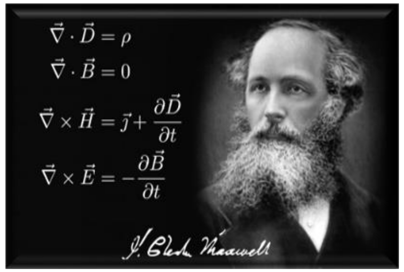
- Ασχολείται με τις βασικές αρχές του σύμπαντος.
- Αποτελεί τη βάση γι’ άλλες επιστήμες.
- Οι βασικές αρχές της είναι απλές.

Χωρίζεται σε πέντε βασικούς κλάδους

- Κλασική μηχανική
- Θερμοδυναμική
- Ηλεκτρομαγνητισμός
- Σχετικότητα
- Κβαντική μηχανική



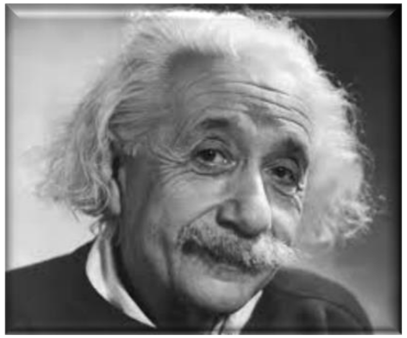
I. Newton
(1643 –1727)



J. C. Maxwell
(1831 –1879)

M. Planck
(1858 –1947)
Nobel 1918

N. Bohr
(1885 –1962)
Nobel 1922



A. Einstein
(1879 –1955)
Nobel 1921

E. Schrödinger
(1887 –1961)
Nobel 1933

W. Heisenberg
(1901 –1976)
Nobel 1932

Κλασική φυσική

- Οι τομείς της μηχανικής και του ηλεκτρομαγνητισμού είναι βασικοί για όλους τους υπόλοιπους κλάδους της κλασικής και της σύγχρονης φυσικής.

- **Κλασική φυσική**
  - Αναπτύχθηκε πριν από το 1900.
  - Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με την κλασική μηχανική.
    - Είναι γνωστή και ως νευτώνεια μηχανική ή απλώς μηχανική.

- **Σύγχρονη φυσική**
  - 1900 μέχρι σήμερα

Μαθηματικός Φορμαλισμός

Χωρικές Συντεταγμένες:
Θέση σημείου στο χώρο
Καρτεσιανές συντεταγμένες
Κυλινδρικές συντεταγμένες
Σφαιρικές συντεταγμένες

Διανύσματα:
Πρόσθεση και Αφαίρεση
Εσωτερικό γινόμενο
Εξωτερικό γινόμενο

Διαφορικός Λογισμός:
Παράγωγος
Μερική Παράγωγος
Ρυθμός μεταβολής
(Χρονική Παράγωγος)

Ολοκληρωτικός Λογισμός:
Επιφανειακά Ολοκληρώματα
Επικαμπύλια Ολοκληρώματα
Όρια ολοκλήρωσης
Αλλαγή μεταβλητής

Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι μονάδες μέτρησής τους

Μέγεθος	Μονάδα μέτρησης στο SI
Μήκος	μέτρο
Μάζα	χιλιόγραμμο
Χρόνος	δευτερόλεπτο
Θερμοκρασία	Kelvin
Ηλεκτρικό ρεύμα	ampere

Θεμελιώδη μεγέθη της μηχανικής

Μέγεθος	Μονάδα μέτρησης (SI)	Διαστάσεις
Μήκος	m	[L]
Μάζα	Kg	[M]
Χρόνος	s	[T]

Όλα τα υπόλοιπα μεγέθη στη μηχανική μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των τριών θεμελιωδών μεγεθών.

Παράγωγα μεγέθη

Μέγεθος (παραδείγματα)	Μονάδα μέτρησης (SI)	Διαστάσεις
Εμβαδόν επιφάνειας	m^2	$[L^2]$
Όγκος Σώματος	m^3	$[L^3]$
Ταχύτητα (μέτρο)	m/s	$[L/T]$
Επιτάχυνση (μέτρο)	m/s^2	$[L/T^2]$
Πυκνότητα	Kg/m^3	$[M/L^3]$

Τα παράγωγα μεγέθη μπορούν να εκφραστούν ως μαθηματικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών μεγεθών.

Προθέματα

- Αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 10 και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με οποιαδήποτε θεμελιώδη μονάδα.
- Είναι (υπο)πολλαπλάσια της θεμελιώδους μονάδας (1 mm = 10^{-3} m, 1 mg = 10^{-3} g)

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ1.4 *Προθέματα για δυνάμεις του δέκα*

Δύναμη	Πρόθεμα	Σύντμηση	Δύναμη	Πρόθεμα	Σύντμηση
10^{-24}	γιοκτο	y	10^{3}	χιλιο	k
10^{-21}	ζεπτο	z	10^{6}	μεγα	M
10^{-18}	ατο	a	10^{9}	γιγα	G
10^{-15}	φεμτο	f	10^{12}	τερα	T
10^{-12}	πικο	p	10^{15}	πετα	P
10^{-9}	νανο	n	10^{18}	εχα	E
10^{-6}	μικρο	μ	10^{21}	ζετα	Z
10^{-3}	χιλιοστο	m	10^{24}	γιοττα	Y
10^{-2}	εκατοστο	c			
10^{-1}	δεκατο	d			

Διαστατική ανάλυση

- **Μια τεχνική η οποία μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν μια εξίσωση έχει τη σωστή μορφή ή μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο.**

- Μπορείτε να χειριστείτε τις διαστάσεις (μήκος, μάζα, χρόνος, συνδυασμοί) ως αλγεβρικά μεγέθη.
  - Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση

- Τα δύο σκέλη της εξίσωσης πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

- Μια εξίσωση είναι σωστή μόνο αν οι διαστάσεις και στα δύο σκέλη της είναι ίδιες.

- Δεν μπορεί να δώσει τις αριθμητικές τιμές των παραγόντων: αυτός είναι ο περιορισμός της.

Διαστατική ανάλυση - 1

- **Μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν μια εξίσωση έχει τη σωστή μορφή**

Δίνεται η εξίσωση: $x = 1/2\ \alpha\ t^2$

Ελέγχουμε τις διαστάσεις κάθε σκέλους: $L = \frac{L}{\cancel{T^2}} \cancel{T^2} = L$

Η εξίσωση είναι διαστατικά σωστή

- **Δείξτε ότι η σχέση $u = \alpha t$ είναι διαστατικά σωστή όπου u είναι η ταχύτητα, α η επιτάχυνση και t ο χρόνος.**

ΛΥΣΗ

Οι διαστάσεις και στα δύο σκέλη πρέπει να είναι οι ίδιες

Η ταχύτητα έχει διαστάσεις L/T

Η επιτάχυνση έχει διαστάσεις L/T^2

Ο χρόνος έχει διαστάσεις T

$$[u] = [\alpha t] \Rightarrow \frac{L}{T} = \frac{L}{T^2} T \Rightarrow \frac{L}{T} = \frac{LT}{T^2} \Rightarrow \frac{L}{T} = \frac{L}{T}$$

Διαστατική ανάλυση - 2

- Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)

Να υπολογίσετε τους εκθέτες m και n

$$x \propto \alpha^m t^n$$

ΛΥΣΗ

Οι διαστάσεις και στα δύο σκέλη είναι L
Η επιτάχυνση έχει διαστάσεις L/T^2
Ο χρόνος έχει διαστάσεις T

$$[x] = [\alpha^m t^n] \Rightarrow L = \left(\frac{L}{T^2}\right)^m T^n \Rightarrow L = \frac{L^m}{T^{2m}} T^n$$

$$\Rightarrow L = L^m T^{(n-2m)} \Rightarrow L^1 = L^m T^{(n-2m)}$$

$$\Rightarrow L^1 T^0 = L^m T^{(n-2m)}$$

Άρα: **m = 1** και n-2m = 0 επομένως **n = 2**

$$x = \alpha t^2$$

Διαστατική ανάλυση - 3

- **Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)**

Υποθέστε ότι η επιτάχυνση α ενός σωματιδίου που κινείται με ομαλή ταχύτητα u σε κύκλο ακτίνας r είναι ανάλογη προς κάποια δύναμη της ακτίνας r, έστω r^n και κάποια δύναμη της ταχύτητας u, έστω u^m . Να υπολογίσετε τις τιμές των n και m και να γράψετε την απλούστερη μορφή μιας εξίσωσης για την επιτάχυνση α.

ΛΥΣΗ

Η επιτάχυνση έχει διαστάσεις L/T^2
Η ταχύτητα έχει διαστάσεις L/T
Ο χρόνος έχει διαστάσεις T
Η ακτίνα έχει διαστάσεις L

$$a = kr^n v^m$$

$$\frac{L}{T^2} = L^n \left(\frac{L}{T}\right)^m \Rightarrow \frac{L}{T^2} = L^n \frac{L^m}{T^m} \Rightarrow \frac{L^1}{T^2} = \frac{L^{n+m}}{T^m}$$

Άρα: **m = 2** και n+m = 1 επομένως **n = -1**

$$\boxed{a = kr^{-1}v^2 \Rightarrow a = k\frac{v^2}{r}}$$

Διαστατική ανάλυση - 4

- Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε μια σχέση που να συνδέει το «εμβαδόν» A του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας με την μάζα της m. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν A εξαρτάται από τη μάζα m της μαύρης τρύπας, την ταχύτητα του φωτός c και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.

ΛΥΣΗ

$$A = G^{\alpha} m^{\beta} c^{\gamma}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

$G = L^3 M^{-1} T^{-2}$

$$A = G^{\alpha} m^{\beta} c^{\gamma} \qquad L^2 = (L^3 M^{-1} T^{-2})^{\alpha} M^{\beta} (LT^{-1})^{\gamma}$$

Διαστατική ανάλυση – 5 (Συνέχεια…)

- Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε μια σχέση που να συνδέει το «εμβαδόν» A του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας με την μάζα της m. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν A εξαρτάται από τη μάζα m της μαύρης τρύπας, την ταχύτητα του φωτός c και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.

ΛΥΣΗ

$$A = G^{\alpha} m^{\beta} c^{\gamma}$$

$$\mathrm{L}^2 = (\mathrm{L}^3\,\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2})^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}(LT^{-1})^{\gamma}$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 3a+\gamma &= 2 \\ \beta-a &= 0 \\ -2a-\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= -4 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}$$

Διαστατική ανάλυση – 6 (προβλήματα για το σπίτι)

- **Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)**

1. **Από το πείραμα προκύπτει ότι το μέγιστο ύψος h_{max} που ανέρχεται ένα σώμα το οποίο εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα επάνω εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα u_o αλλά και την επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας g. Ανακαλύψτε την απλούστερη μορφή του νόμου που τα συνδέει.**

2. **Ο Ισαάκ Νεύτωνας είναι ο πατέρας του νόμου της Παγκόσμιας Έλξης. Διαπιστώθηκε ότι ελκτική δύναμη ανάμεσα σε δύο μάζες είναι ανάλογη του γινομένου των δύο μαζών m, της σταθεράς της Παγκόσμιας Έλξης G και της απόστασης r μεταξύ τους. Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που περιγράφει το νόμο της Παγκόσμιας Έλξης;**

Διαστατική ανάλυση – 7 (προβλήματα για το σπίτι)

Από το πείραμα προκύπτει ότι το μέγιστο ύψος h_{max} που ανέρχεται ένα σώμα το οποίο εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα επάνω εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα u_o αλλά και την επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας g. Ανακαλύψτε την απλούστερη μορφή του νόμου που τα συνδέει.

ΛΥΣΗ

$$\boldsymbol{h_{max} \propto u_o^{a} g^{\beta}}$$

Επομένως εφαρμόζοντας τη **Διαστατική ανάλυση** έχουμε:

$$h_{max} \propto u_o^{a} g^{\beta} \Rightarrow \mathrm{L} = (\mathrm{L\,T^{-1}})^{\alpha} (\mathrm{L\,T^{-2}})^{\beta} \Rightarrow \mathrm{L} = \mathrm{L}^{\alpha}\,\mathrm{T}^{-\alpha}\mathrm{L}^{\beta}\,\mathrm{T}^{-2\beta} \Rightarrow \mathrm{L} = \mathrm{L}^{\alpha+\beta}\,\mathrm{T}^{-(\alpha+2\beta)}$$ ***οπότε***:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 1 \\ \alpha+2\beta &= 0 \end{aligned}$$

Επιλύουμε το σύστημα και προκύπτει:

β = -1 και α = 2

Επομένως: $$\mathrm{h_{max}} \propto \frac{u_o^2}{g}$$ Ενώ η σωστή σχέση είναι: $$\mathrm{h_{max}} = \frac{u_o^2}{2g}$$

Διαστατική ανάλυση – 8 (προβλήματα για το σπίτι)

Ο Ισαάκ Νεύτωνας είναι ο πατέρας του νόμου της Παγκόσμιας Έλξης. Διαπιστώθηκε ότι ελκτική δύναμη ανάμεσα σε δύο μάζες είναι ανάλογη του γινομένου των δύο μαζών m, της σταθεράς της Παγκόσμιας Έλξης G και της απόστασης r μεταξύ τους. Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που περιγράφει το νόμο της Παγκόσμιας Έλξης;

ΛΥΣΗ

$$F \propto G^{\alpha} m^{\beta} r^{\gamma} \qquad F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} \quad \mathbf{G=L^3M^{-1}T^{-2}}$$

$$F \propto G^{\alpha} m^{\beta} r^{\gamma} \Longrightarrow \mathrm{MLT^{-2}} = (\mathrm{L^3M^{-1}T^{-2}})^{\alpha}\mathrm{M^{\beta}L^{\gamma}} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{MLT^{-2}} = (\mathrm{L^{3\alpha}M^{-\alpha}T^{-2\alpha}})\mathrm{M^{\beta}L^{\gamma}} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{MLT^{-2}} = \mathrm{T^{-2\alpha}M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}} \Rightarrow -2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha=1$$

$$\beta-\alpha=1 \Rightarrow \beta=2$$

$$3\alpha+\gamma=1 \Rightarrow \gamma=1-3\alpha \Rightarrow \gamma=-2$$

Δε διακρίνει το m_1 από το m_2

$$\mathbf{F \propto G^1 m^2 r^{-2}}$$

Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

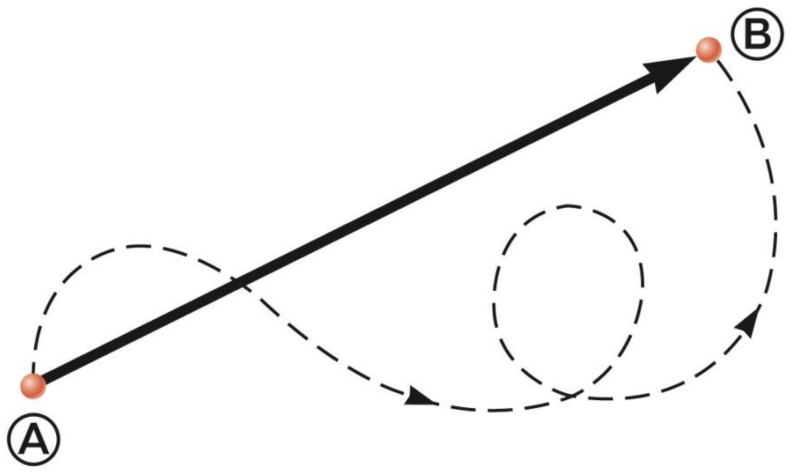
- Ένα φυσικό μέγεθος ανήκει στην κατηγορία των ***βαθμωτών μεγεθών***, όταν για την περιγραφή του απαιτείται να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο του.
- Ένα φυσικό μέγεθος είναι ***διανυσματικό*** όταν για την περιγραφή του απαιτείται να γνωρίζουμε το μέτρο και την κατεύθυνσή του.
- **Παράδειγμα: Απόσταση** και **Μετατόπιση**

Σωματίδιο κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθώντας τη διαδρομή που υποδεικνύει η διακεκομμένη γραμμή.

Αυτή είναι η ***απόσταση*** που διένυσε: **βαθμωτό μέγεθος**.

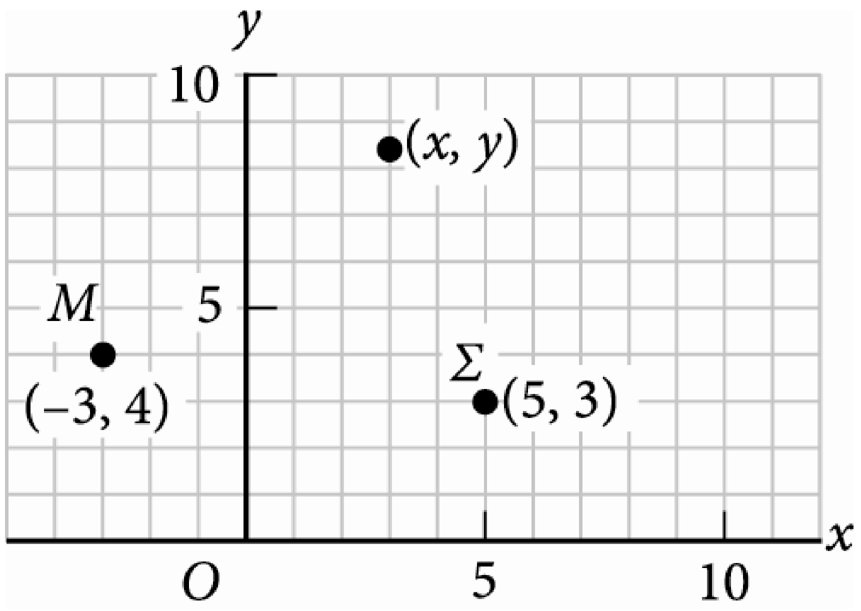
Μετατόπιση: η συμπαγής ευθεία που ενώνει το Α με το Β - ανεξάρτητη από τη διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο μεταξύ των δύο σημείων.

Μετατόπιση: **διανυσματικό μέγεθος**.



Θέση σημείου στο χώρο: Σύστημα συντεταγμένων

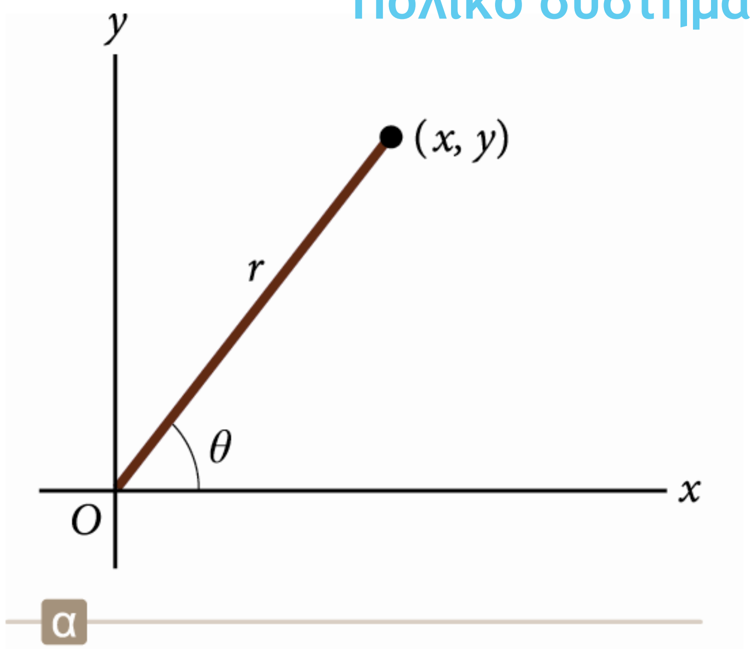
Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων



▶ Οι άξονες *x* και *y* τέμνονται στην αρχή των συντεταγμένων.

▶ Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (*x*, *y*).

Πολικό σύστημα συντεταγμένων



▶ Ορίζουμε την αρχή των αξόνων και έναν άξονα αναφοράς (άξονας x).

▶ Το σημείο βρίσκεται σε απόσταση r από την αρχή των αξόνων στην κατεύθυνση της γωνίας θ, η οποία μετριέται αριστερόστροφα από τον άξονα αναφοράς.

▶ Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (r, θ).

Μετατροπή πολικών συντεταγμένων σε καρτεσιανές

- Με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις r και θ:

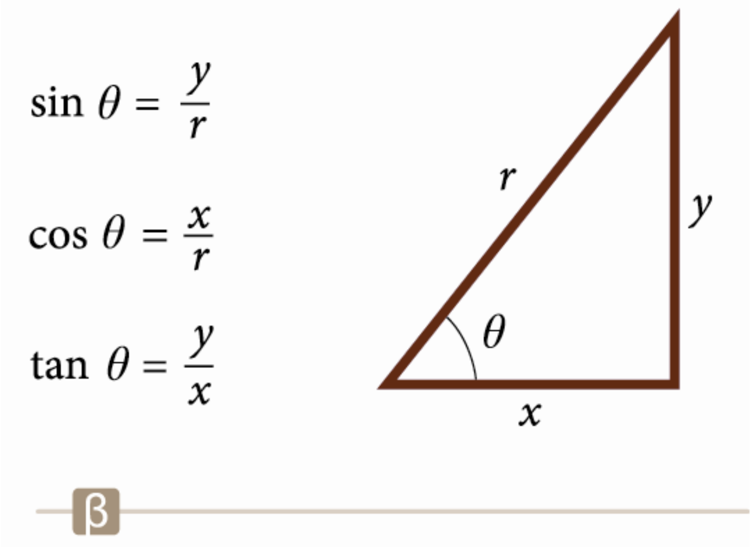
$x = r \cos \theta$

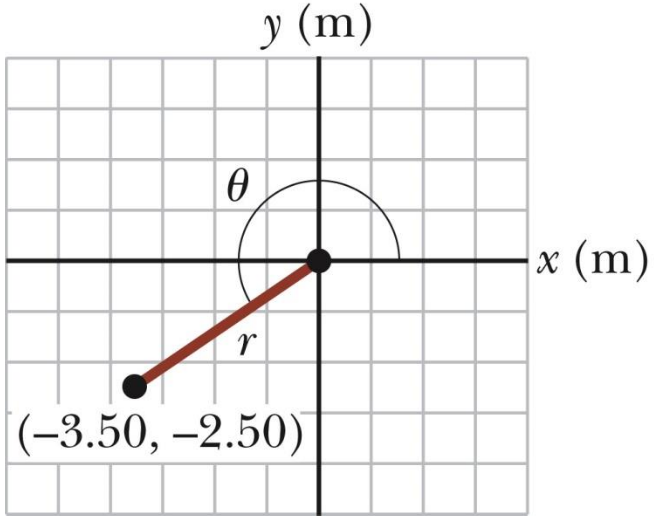
$y = r \sin \theta$

- Αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι γνωστές:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$





Θέση - Καρτεσιανές συντεταγμένες: (x,y) = (3.50, -2.50) m

Θέση - Πολικές συντεταγμένες:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50 \text{ m})^2 + (-2.50 \text{ m})^2} = 4.30 \text{ m}$$

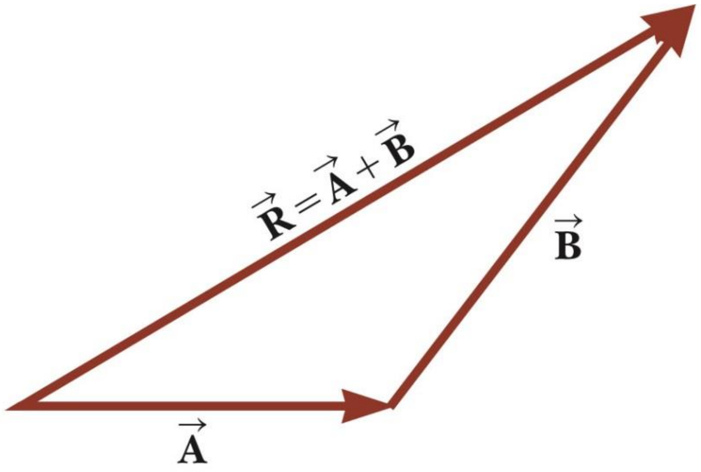
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50 \text{ m}}{-3.50 \text{ m}} = 0.714$$

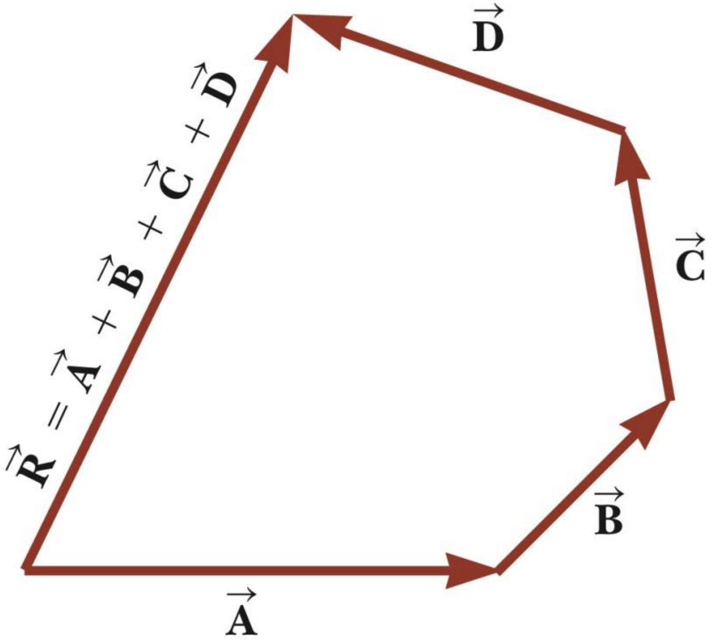
$\theta = 216°$ (3ο τεταρτημόριο)

Διανύσματα-Πρόσθεση διανυσμάτων

- Διάνυσμα $\vec{A}$ (ή **A**) με μέτρο $|\vec{A}|$ (ή A)
- Το μέτρο του διανύσματος έχει φυσικές μονάδες.
- Το μέτρο ενός διανύσματος είναι πάντα θετικός αριθμός.
- ***Ίσα*** διανύσματα : έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση ($A = B$ και έχουν ίδια διεύθυνση και φορά) - Αυτό μάς επιτρέπει να μεταθέσουμε παράλληλα ένα διάνυσμα σε μια νέα θέση.

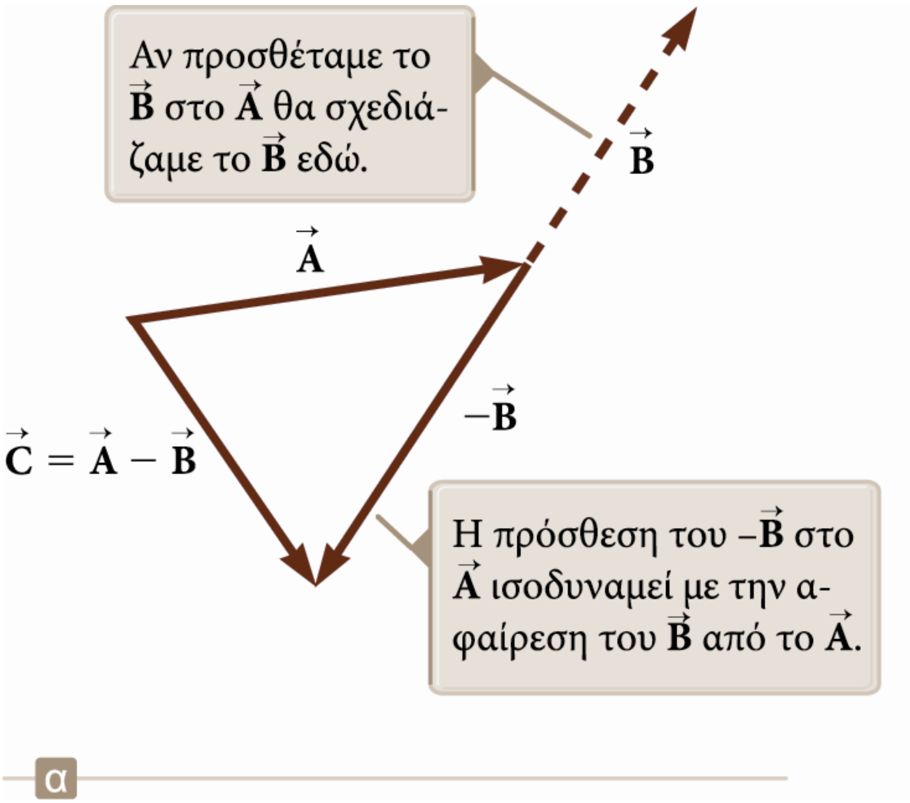
Πρόσθεση διανυσμάτων - Γραφική Μέθοδος





Αφαίρεση διανυσμάτων – Πολλαπλασιασμός με βαθμωτη ποσότητα

Αφαίρεση διανυσμάτων



$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

- Όπου $-\vec{B}$ αντίθετο του $\vec{B}$
- Γενικά ορίζουμε ως αντίθετο ενός διανύσματος το διάνυσμα το οποίο, όταν προστεθεί στο αρχικό, δίνει μηδενικό διανυσματικό άθροισμα.

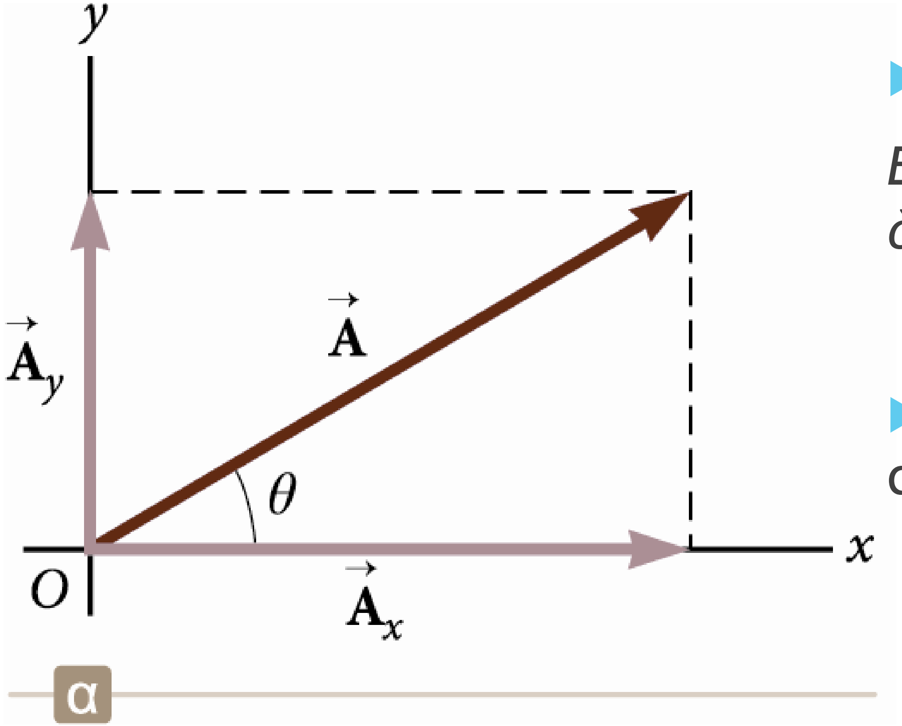
$$\vec{A}+\left(-\vec{A}\right)=0$$

- Το αρχικό διάνυσμα και το αντίθετό του θα έχουν ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες κατευθύνσεις.

Πολλαπλασιασμός/διαίρεση με βαθμωτή ποσότητα

- Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης ενός διανύσματος με μια βαθμωτή ποσότητα είναι διάνυσμα.
- Το μέτρο του διανύσματος πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται με τη βαθμωτή ποσότητα.
- Αν η βαθμωτή ποσότητα είναι θετική, το διάνυσμα που προκύπτει έχει την ίδια κατεύθυνση με το αρχικό διάνυσμα, ενώ αν είναι αρνητική το διάνυσμα που προκύπτει έχει αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό διάνυσμα.

Συνιστώσες διανύσματος



Συνιστώσα είναι η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε έναν άξονα

- Τα $\vec{\mathbf{A}}_x$ και $\vec{\mathbf{A}}_y$ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες του $\vec{\mathbf{A}}$.

Είναι διανύσματα, οπότε ακολουθούν όλους τους κανόνες των διανυσμάτων.

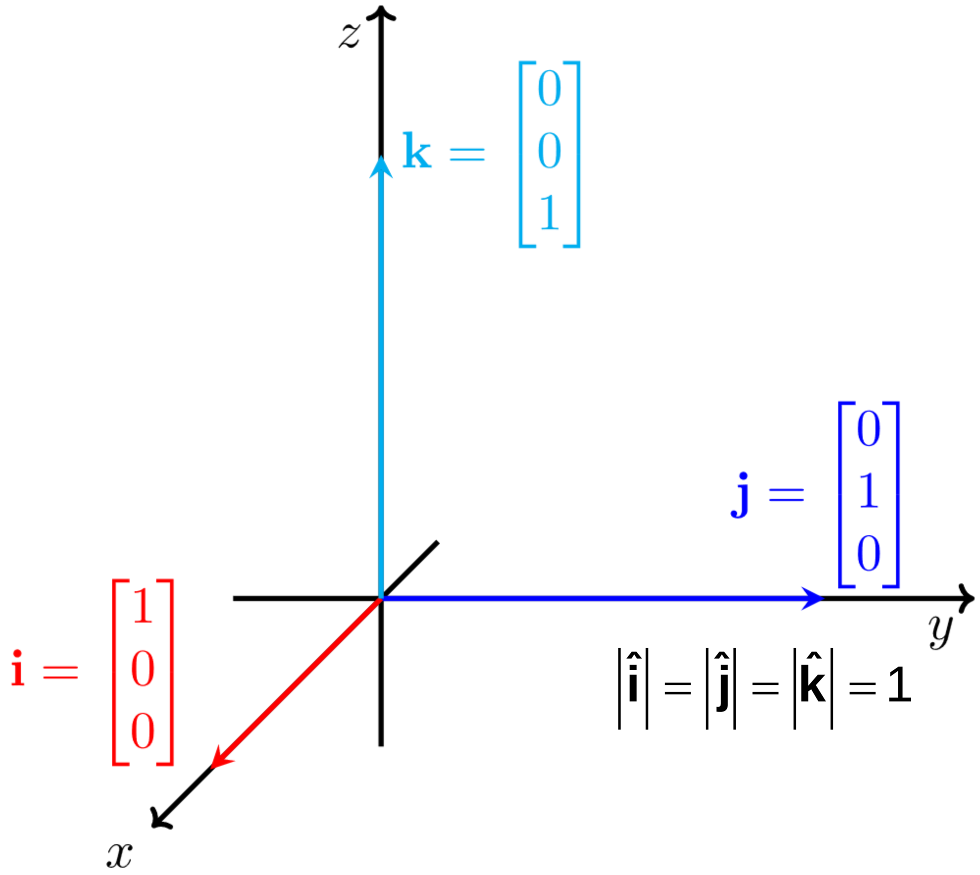
$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$$

- Τα A_x και A_y είναι βαθμωτά μεγέθη. Θα αναφερόμαστε σε αυτά ως τις συνιστώσες του $\vec{\mathbf{A}}$.

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

Μοναδιαία διανύσματα και συνιστώσες διανυσμάτων

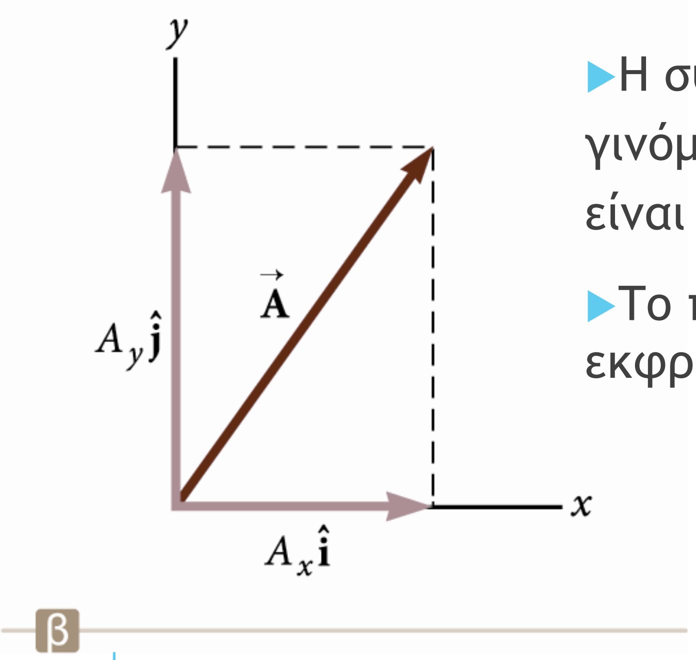


$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$$

-Ένα ***μοναδιαίο διάνυσμα*** έχει **μέτρο ίσο με 1.**

-Τα μοναδιαία διανύσματα ορίζουν μία συγκεκριμένη κατεύθυνση και δεν έχουν κάποια άλλη φυσική σημασία.



▶Η συνιστώσα $\mathbf{A}_x$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ και η συνιστώσα $\mathbf{A}_y$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_y\hat{\mathbf{j}}$, κ.ο.κ.

▶Το πλήρες διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως:

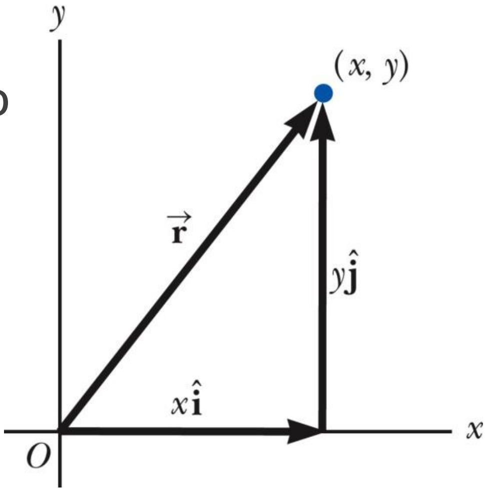
$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

▶Ένα σημείο του επιπέδου *xy* έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (*x*, *y*).

▶Το σημείο μπορεί να οριστεί από το διάνυσμα θέσης

$$\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

▶Η παραπάνω σχέση δίνει τις συνιστώσες του διανύσματος και τις συντεταγμένες του.



Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων

- Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$
- Τότε,

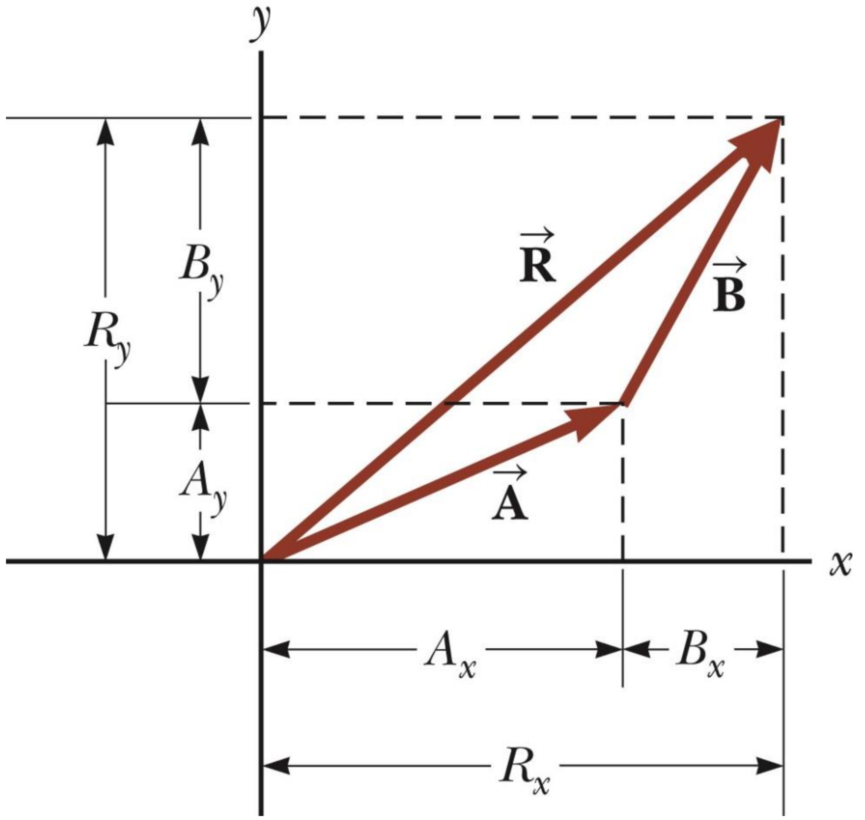
$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$$

- Άρα, $R_x = A_x + B_x$ και $R_y = A_y + B_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$



Επέκταση στις τρεις διαστάσεις

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad \theta_x = \cos^{-1}\frac{R_x}{R}, \kappa\lambda\pi.$$

Επέκταση σε περισσότερα των δύο διανύσματα

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x + C_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y + C_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z + C_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων - 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα των διανυσμάτων μετατόπισης $\vec{A}$ και $\vec{B}$ όπου $\vec{A} = (2,0\hat{\imath} + 2,0\hat{\jmath})m$
και $\vec{B} = (2,0\hat{\imath} - 4,0\hat{\jmath})m$

ΛΥΣΗ

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2,0\hat{\imath} + 2,0\hat{\jmath})m + (2,0\hat{\imath} - 4,0\hat{\jmath})m = (4,0\hat{\imath} - 2,0\hat{\jmath})m$$

Υπολογίσουμε το μέτρο του διανύσματος $\vec{R}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4,0)^2 + (-2,0)^2}m = \sqrt{20}m$$

Υπολογίσουμε τη γωνία του διανύσματος $\vec{R}$ με τον άξονα x

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{-2,0m}{4,0m} = -0,5$$

Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων - 2

Ένα σωματίδιο πραγματοποιεί τρεις διαδοχικές μετακινήσεις:

$\Delta\vec{r_1} = (15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath} + 12\hat{k})m$ $\quad\quad$ $\Delta\vec{r_2} = (23\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 5\hat{k})m$ $\quad\quad$ $\Delta\vec{r_3} = (-13\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})m$

Να υπολογίσετε τη συνισταμένη μετατόπιση καθώς και το μέτρο της.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε πρώτα τη συνισταμένη μετατόπιση του σωματιδίου

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r_1} + \Delta\vec{r_2} + \Delta\vec{r_3} = (15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath} + 12\hat{k})m + (23\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 5\hat{k})m + (-13\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})m = (25\hat{\imath} + 31\hat{\jmath} + 7\hat{k})m$$

Υπολογίσουμε κατόπιν το μέτρο της συνισταμένης μετατόπισης

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(25)^2 + (31)^2 + (7)^2}m = 40\ m$$

Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων - 3

Ένα σωματίδιο πραγματοποιεί τρεις διαδοχικές μετακινήσεις:

$$\boldsymbol{\Delta\vec{r_1}} = (\mathbf{15}\hat{\imath} + \mathbf{30}\hat{\jmath} + \mathbf{12}\hat{k})\boldsymbol{m} \qquad \boldsymbol{\Delta\vec{r_2}} = (\mathbf{23}\hat{\imath} - \mathbf{14}\hat{\jmath} - \mathbf{5}\hat{k})\boldsymbol{m} \qquad \boldsymbol{\Delta\vec{r_3}} = (-\mathbf{13}\hat{\imath} + \mathbf{15}\hat{\jmath})\boldsymbol{m}$$

Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{R}}$ με κάθε άξονα συντεταγμένων.

ΛΥΣΗ

Υπολογίσουμε πρώτα τη συνισταμένη μετατόπιση του σωματιδίου

$$\boldsymbol{\Delta\vec{r}} = \boldsymbol{\Delta\vec{r_1}} + \boldsymbol{\Delta\vec{r_2}} + \boldsymbol{\Delta\vec{r_3}} = (\mathbf{15}\hat{\imath} + \mathbf{30}\hat{\jmath} + \mathbf{12}\hat{k})\boldsymbol{m} + (\mathbf{23}\hat{\imath} - \mathbf{14}\hat{\jmath} - \mathbf{5}\hat{k})\boldsymbol{m} + (-\mathbf{13}\hat{\imath} + \mathbf{15}\hat{\jmath})\boldsymbol{m} = (\mathbf{25}\hat{\imath} + \mathbf{31}\hat{\jmath} + \mathbf{7}\hat{k})\boldsymbol{m}$$

Υπολογίσουμε κατόπιν το μέτρο της συνισταμένης μετατόπισης

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{\boldsymbol{R_x^2} + \boldsymbol{R_y^2} + \boldsymbol{R_z^2}} = \sqrt{(\mathbf{25})^2 + (\mathbf{31})^2 + (\mathbf{7})^2}\boldsymbol{m} = \mathbf{40}\ \boldsymbol{m}$$

Γνωρίζουμε ότι: $cos\theta_x = \dfrac{R_x}{R} = \dfrac{25}{40} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625 \Longrightarrow \theta_x = 51{,}32^o$

$$cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{31}{40} = 0{,}775 \Longrightarrow \theta_y = 39{,}2^o \qquad cos\theta_z = \frac{R_{zy}}{R} = \frac{7}{40} = 0{,}175 \Longrightarrow \theta_z = 79{,}9^o$$

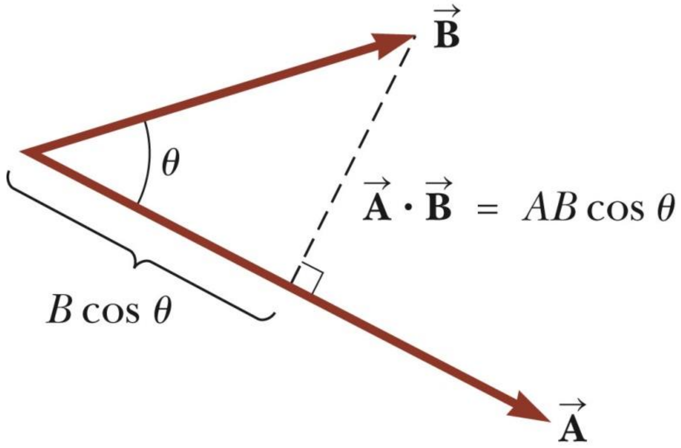
Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Γράφουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

θ είναι η γωνία μεταξύ των A και B.

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv A\, B \cos\theta$$

- **Το εσωτερικο γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος.**



- Αντιμεταθετική ιδιότητα.
  - $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$
- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.
  - $\vec{\mathbf{A}} \cdot \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$

Εσωτερικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

- Σε μορφή συνιστωσών:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{A\, B} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}\sqrt{B_x^{\,2} + B_y^{\,2} + B_z^{\,2}}} = \frac{\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}}}{\mathrm{AB}}$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων - 1

Παράδειγμα υπολογισμού εσωτερικού γινομένου

Τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ δίδονται από τις σχέσεις $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ και $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \bullet \vec{B}$
β) Να υπολογίσετε τη γωνία θ μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

ΛΥΣΗ

α) $$\vec{A} \bullet \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \bullet (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = -2\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} + \cancelto{0}{4\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath}} - \cancelto{0}{3\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath}} + 6\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = -2 + 0 - 0 + 6 = 4$$

β) Γνωρίζουμε ότι: $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB}$ αλλά

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Επομένως $$\cos\theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Πως υπολογίζουμε εάν δύο διανύσματα είναι κάθετα, παράλληλα ή αντιπαράλληλα;

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων - 2

Παράδειγμα υπολογισμού εσωτερικού γινομένου

Ένα σωματίδιο δέχεται μια σταθερή δύναμη $\vec{F} = (5\hat{i} + 2\hat{j})N$ και υφίσταται μια μετατόπιση στο επίπεδο xy η οποία δίδεται από τη σχέση $\Delta\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j})m$. Να υπολογίσετε το έργο W που παράγει η δύναμη στο σωματίδιο.

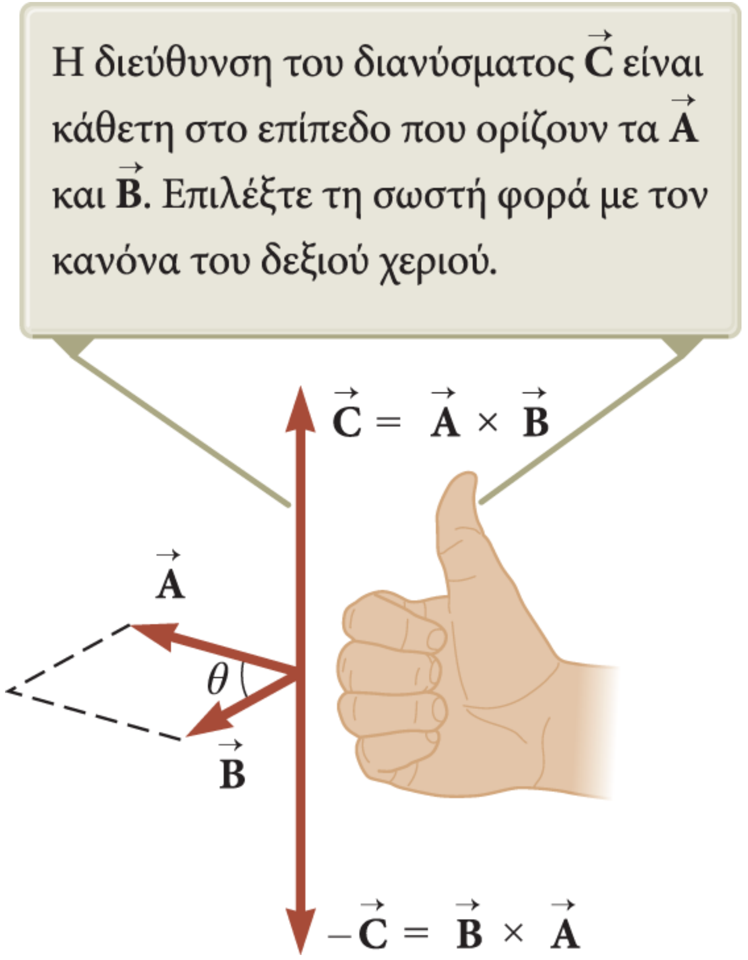
ΛΥΣΗ

$$\vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = (5\hat{i} + 2\hat{j}) \bullet (2\hat{i} + 3\hat{j}) = 5\hat{i} \bullet 2\hat{i} + \cancelto{0}{5\hat{i} \bullet 3\hat{j}} + \cancelto{0}{2\hat{j} \bullet 2\hat{i}} + 2\hat{j} \bullet 3\hat{j} = 10 + 0 + 0 + 6 = 16\, J$$

Το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι πάντα ένα ΒΑΘΜΩΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$:
- Το διανυσματικό (εξωτερικό) γινόμενο των $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι ένα *τρίτο διάνυσμα*, το
- $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$.
- Το μέτρο του διανύσματος *C* είναι *AB* sin *θ*
  - θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$.



- Η ποσότητα *AB* sin *θ* ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$.
- Η διεύθυνση του $\vec{\mathbf{C}}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$
- Ο καλύτερος τρόπος για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{C}}$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου - 1

- Στο διανυσματικό γινόμενο *δεν* ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τα δύο διανύσματα έχει σημασία.
  - Για να λάβετε υπόψη τη σειρά, θυμηθείτε ότι $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$. Επίσης $\vec{\mathbf{A}} \times \left(-\vec{\mathbf{B}}\right) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$
- Αν $\vec{A} || \vec{B}$ (θ = 0° ή 180°), τότε $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$
  - Επίσης, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$.
- Αν $\vec{A} \perp \vec{B}$, τότε $\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB$.
- Στο διανυσματικό γινόμενο ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$

Εξωτερικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Επίσης $\hat{\mathbf{i}} \times \left(-\hat{\mathbf{j}}\right) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$

Χρήση οριζουσών

- Το διανυσματικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί σε μορφή ορίζουσας ως

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

- Αν αναπτύξουμε τις ορίζουσες, παίρνουμε τη σχέση

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου - 2

Η παράγωγος του διανυσματικού γινομένου ως προς μια μεταβλητή, όπως ο χρόνος t, είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)=\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\times\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\times\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$$

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά των παραγόντων του γινομένου.

Παραδείγματα υπολογισμού Εξωτερικού Γινομένου - 1

Παράδειγμα υπολογισμού εξωτερικού γινομένου

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$

Υπολογίστε το $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\
&= 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}} \\
&= 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Εξωτερικού Γινομένου - 2

Δίνονται η δύναμη και η θέση:

$\vec{\mathbf{F}} = (2.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\,\hat{\mathbf{j}})\ N$

$\vec{\mathbf{r}} = (4.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00\,\hat{\mathbf{j}})\ m$

Να υπολογίσετε τη μηχανική ροπή $\vec{\tau}$ εάν $\vec{\tau} = \vec{r} x \vec{F}$

ΛΥΣΗ

$$\vec{\tau} = \vec{r} x \vec{F} = [(4,00\hat{\imath} + 5,00\hat{\jmath})N] x [(2,00\hat{\imath} + 3,00\hat{\jmath})N] =$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{(4,00)(2,00)\hat{\imath}x\hat{\imath}} \rightarrow 0 + (4,00)(3,00)\hat{\imath}x\hat{\jmath} + \\ (5,00)(2,00)\hat{\jmath}x\hat{\imath} + \cancel{(5,00)(3,00)\hat{\jmath}x\hat{\jmath}} \rightarrow 0 \end{bmatrix} = [(12,00\hat{k} - 10,00\hat{k})] = 2,00\hat{k}\ Nm$$

Υπενθυμίζουμε: $\hat{\imath}x\hat{\imath} = \hat{\jmath}x\hat{\jmath} = \hat{k}x\hat{k} = 0$

$\hat{\imath}x\hat{\jmath} = \hat{k}$ $\quad$ $\hat{\jmath}x\hat{k} = \hat{\imath}$ $\quad$ $\hat{k}x\hat{\imath} = \hat{\jmath}$

$\hat{\jmath}x\hat{\imath} = -\hat{k}$ $\quad$ $\hat{k}x\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$ $\quad$ $\hat{\imath}x\hat{k} = -\hat{\jmath}$

Καλή Μελέτη