Μηχανική - Ρευστομηχανική

Timeo hominem unius libri.

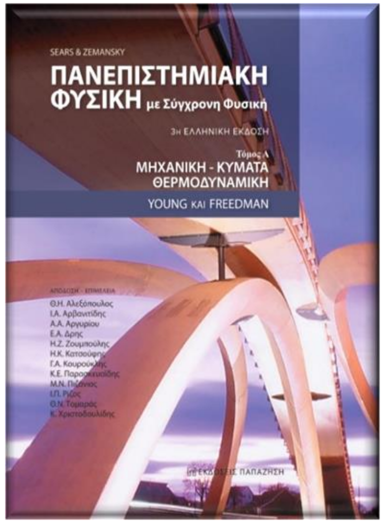
Thomas Acquinas

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

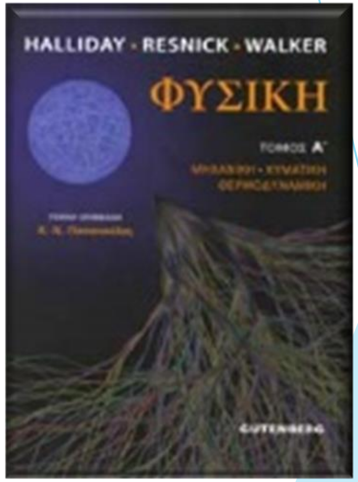
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Sears & Zemansky, Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, Τόμος Α, Μηχανική-Κύματα, Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

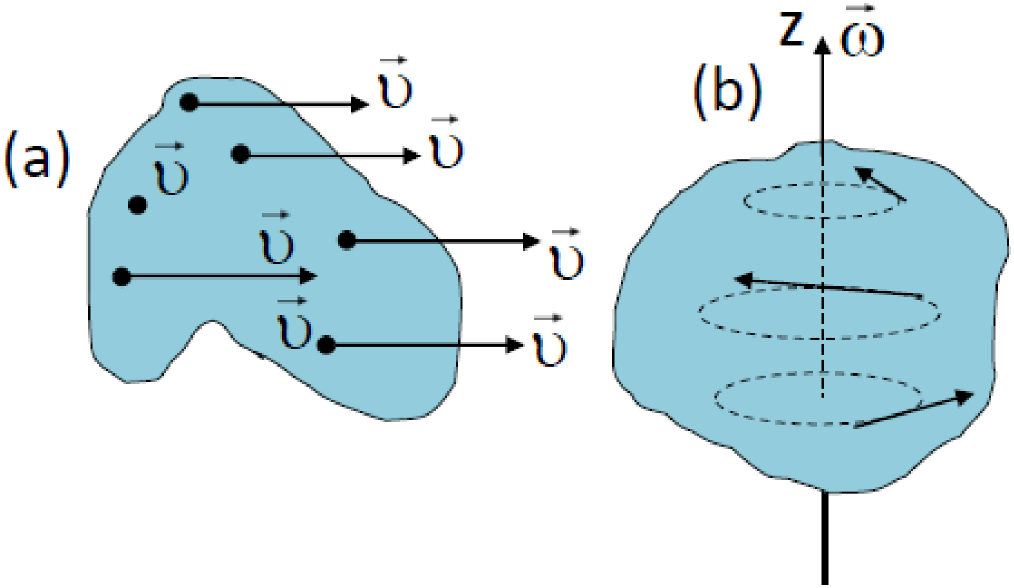
Περιστροφική κίνηση σώματος

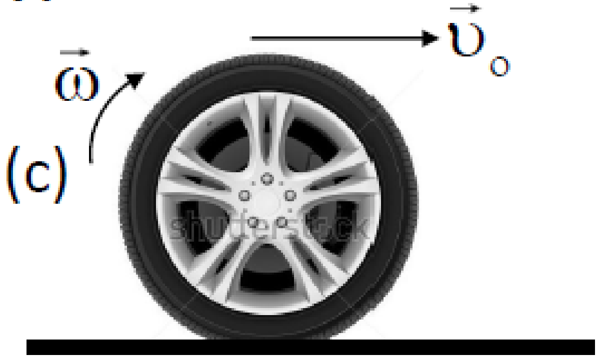
Περιστροφική κίνηση σώματος

a. **Μεταφορική κίνηση:** όλα τα σημεία του σώματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα

b. **Περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα :** Όλα τα σημεία του σώματος πάνω στον άξονα παραμένουν σταθερά, ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος διαγράφουν κυκλικές τροχιές με διαφορετικές ταχύτητες που εξαρτώνται από την απόσταση από τον άξονα περιστροφής

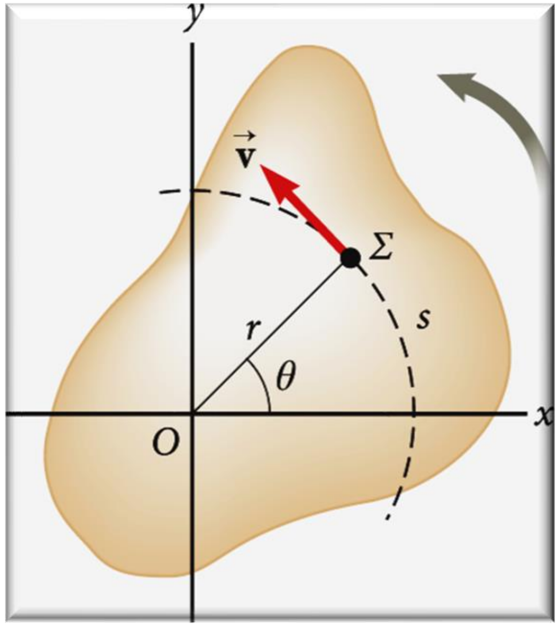
c. **Η κίνηση ενός σώματος μπορεί να είναι συνδυασμός μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης**





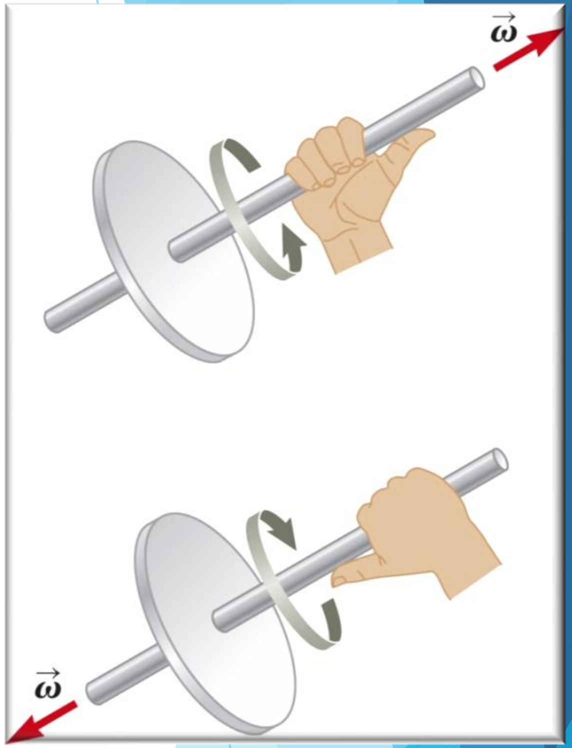
Ο τροχός αυτοκινήτου εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα υ_o και περιστροφική γύρω από τον οριζόντιο άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω

Περιστροφική κίνηση σώματος



$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

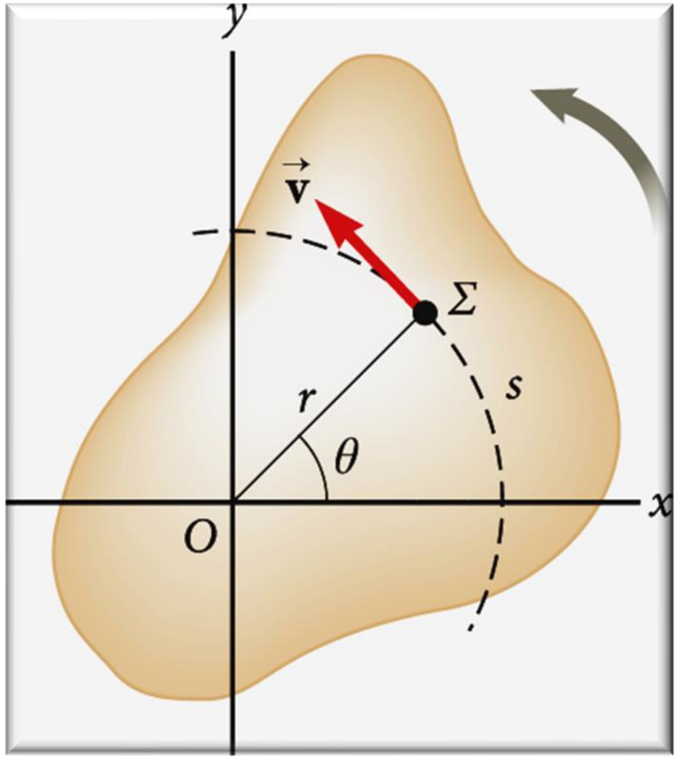
$$\alpha_{\gamma\omega\nu.} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$



- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω είναι θετικό όταν η γωνία ***θ*** αυξάνεται (αριστερόστροφη περιστροφή).
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω είναι αρνητικό όταν η γωνία ***θ*** μειώνεται (δεξιόστροφη περιστροφή).
- Το $a_{\gamma\omega\nu.}$ είναι θετικό όταν ένα σώμα που περιστρέφεται αριστερόστροφα επιταχύνει.
- Το $a_{\gamma\omega\nu.}$ είναι επίσης θετικό όταν ένα σώμα που περιστρέφεται δεξιόστροφα επιβραδύνει.

- Κατεύθυνση ω σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.
- Κατεύθυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu.}$ σύμφωνα με τη σχέση dω/dt.

Περιστροφική κίνηση σώματος



Το μέτρο της **εφαπτομενικής ταχύτητας** είναι $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$

Το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από το κέντρο περιστροφής

Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι η παράγωγος της εφαπτομενικής ταχύτητας.

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha_{\gamma\omega\nu.}$$

Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος έχουν ίδια γωνιακή επιτάχυνση, αλλά όχι ίδια εφαπτομενική επιτάχυνση.

Τα εφαπτομενικά μεγέθη εξαρτώνται από την απόσταση *r*, η οποία δεν είναι ίδια για όλα τα σημεία του σώματος.

Περιστροφική κίνηση σώματος

Οι αντιστοιχίες των μεταβλητών μεταξύ των εξισώσεων της μεταφορικής κίνησης και των εξισώσεων της περιστροφικής κίνησης είναι:

$x \rightarrow \theta$

$v \rightarrow \omega$

$a \rightarrow a_{\gamma\omega\nu.}$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha_{\gamma\omega\nu.} t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha_{\gamma\omega\nu.}(\theta_f - \theta_i)$$

όπου η επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu.}$ είναι σταθερή

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.1 *Κινηματικές εξισώσεις για την περιστροφική και τη μεταφορική κίνηση*

Άκαμπτο σώμα που κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση	Σωματίδιο που κινείται με σταθερή μεταφορική επιτάχυνση
$\omega_f = \omega_i + \alpha_{\gamma\omega\nu.} t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha_{\gamma\omega\nu.}(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$

Σχέση μεταξύ γωνιακών και γραμμικών μεγεθών

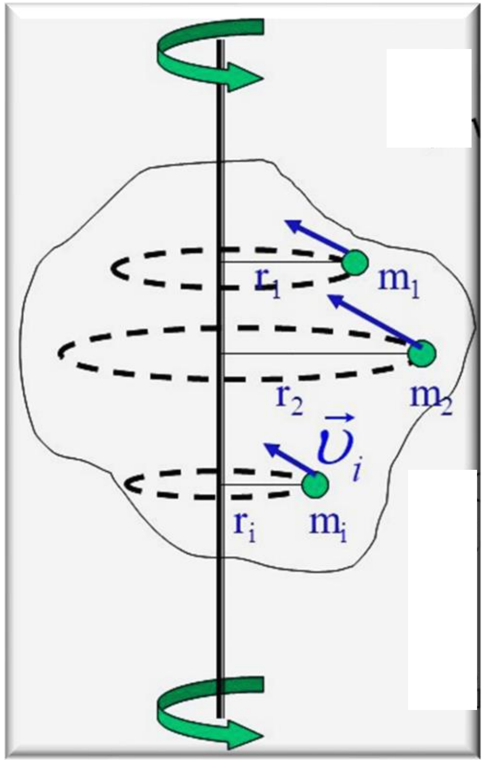
Κάθε σημείο του περιστρεφόμενου σώματος εκτελεί την ίδια περιστροφική κίνηση, αλλά όχι την ίδια μεταφορική κίνηση.

Μετατοπίσεις: $s = \theta r$,

Μέτρο ταχυτήτων: $v = \omega r$,

Μέτρο επιταχύνσεων: $a = a_{\gamma\omega\nu.} r$

Περιστροφική κίνηση σώματος - Κινητική Ενέργεια



Ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, παρά το γεγονός ότι μπορεί να μην έχει καθόλου μεταφορική κινητική ενέργεια. Κάθε σωματίδιο έχει κινητική ενέργεια: $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$. Ισχύει επίσης ότι $v_i = \omega_i r$.

- Η συνολική κινητική ενέργεια περιστροφής ενός άκαμπτου σώματος ισούται με το άθροισμα των ενεργειών όλων των σωματιδίων του.

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Το μέγεθος I ονομάζεται ροπή αδράνειας:

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

$$I = \int r^2 dm$$

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της περιστροφικής κίνησής του.

Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη μάζα, αλλά και από την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής.

Υπολογισμοί Ροπής Αδράνειας σωμάτων

Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας

Για ένα συνεχές άκαμπτο σώμα, θεωρούμε ότι το σώμα απαρτίζεται από πολλά μικρά στοιχεία, καθένα με μάζα Δm_i

$$I = \int r^2 dm$$

Γραμμική ομοιόμορφη κατανομή

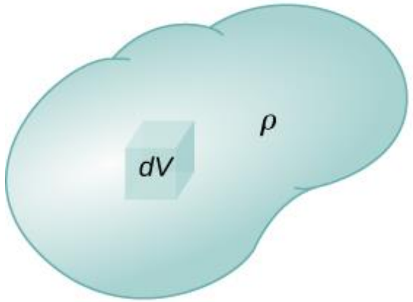
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}}$$

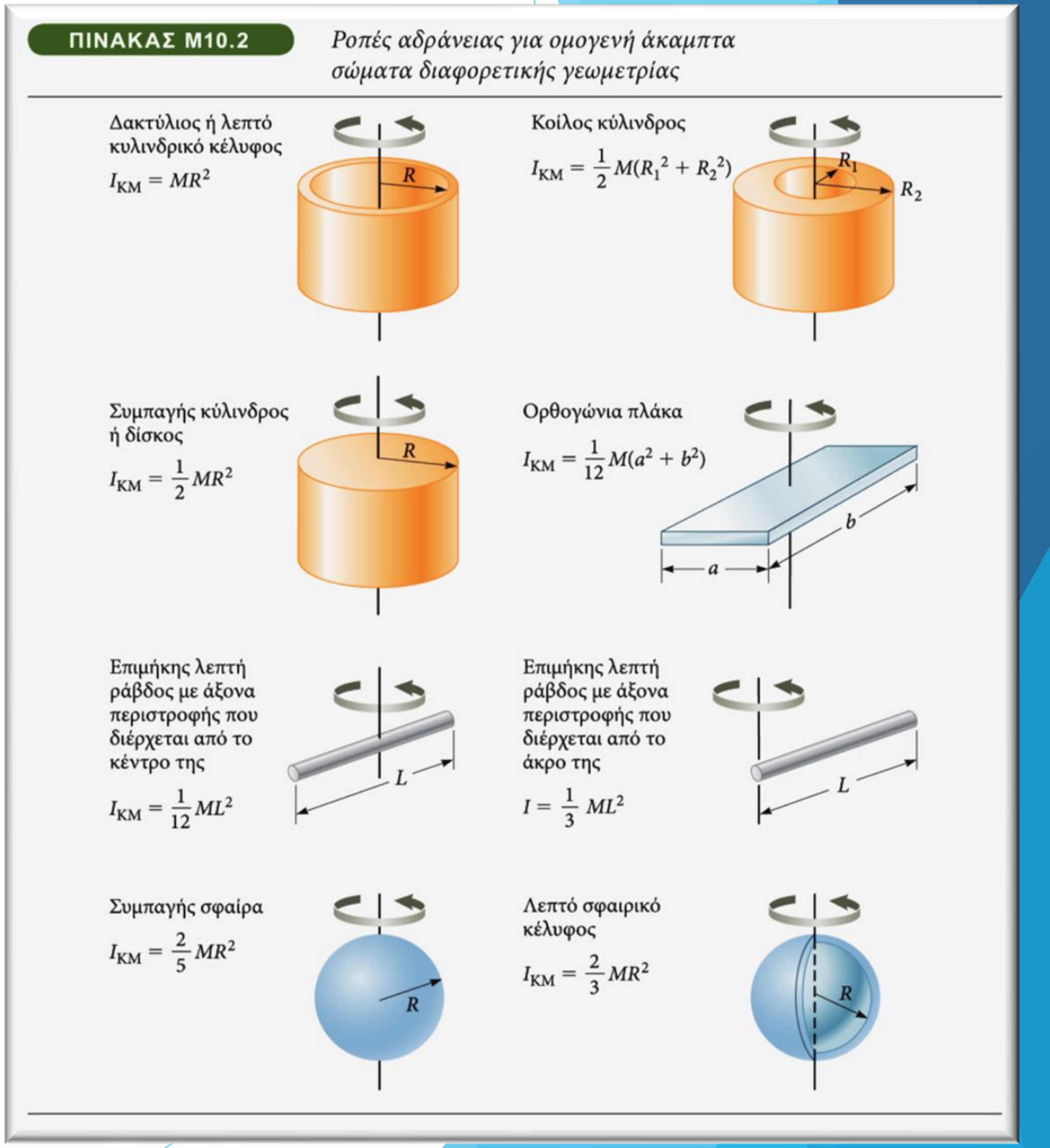
Επιφανειακή ομοιόμορφη κατανομή

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A_{(\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o})}}$$

Χωρική ομοιόμορφη κατανομή

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V_{(\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma)}}$$





ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.2 *Ροπές αδράνειας για ομογενή άκαμπτα σώματα διαφορετικής γεωμετρίας*

Δακτύλιος ή λεπτό κυλινδρικό κέλυφος
$I_{KM} = MR^2$

Κοίλος κύλινδρος
$I_{KM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

Συμπαγής κύλινδρος ή δίσκος
$I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$

Ορθογώνια πλάκα
$I_{KM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

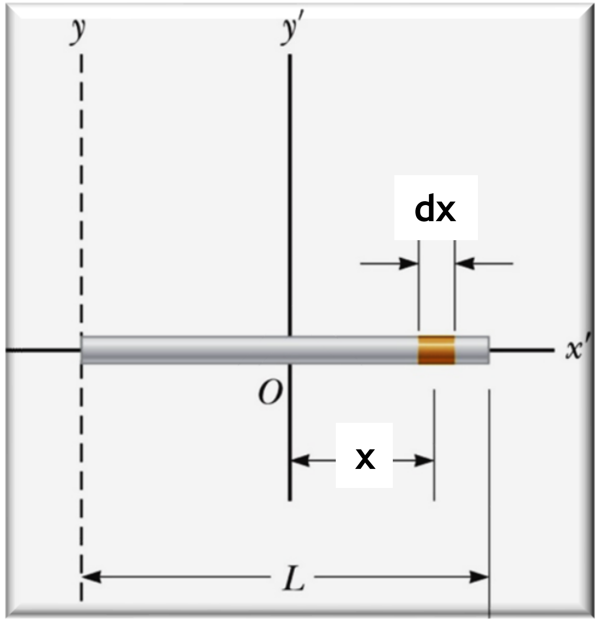
Επιμήκης λεπτή ράβδος με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο της
$I_{KM} = \frac{1}{12}ML^2$

Επιμήκης λεπτή ράβδος με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της
$I = \frac{1}{3}ML^2$

Συμπαγής σφαίρα
$I_{KM} = \frac{2}{5}MR^2$

Λεπτό σφαιρικό κέλυφος
$I_{KM} = \frac{2}{3}MR^2$

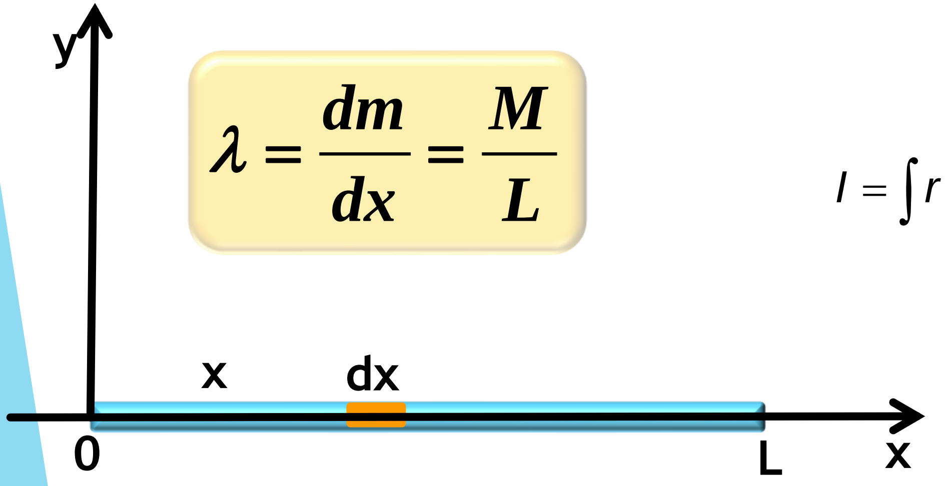
Ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς ράβδου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της.



- Η σκιασμένη περιοχή έχει μάζα
  - $dm = \lambda dx$
- Τότε, η ροπή αδράνειας είναι

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx \Rightarrow I = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \Rightarrow I = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12}ML^2}$$

Ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς ράβδου ως προς άξονα που περνάει από ένα άκρο της

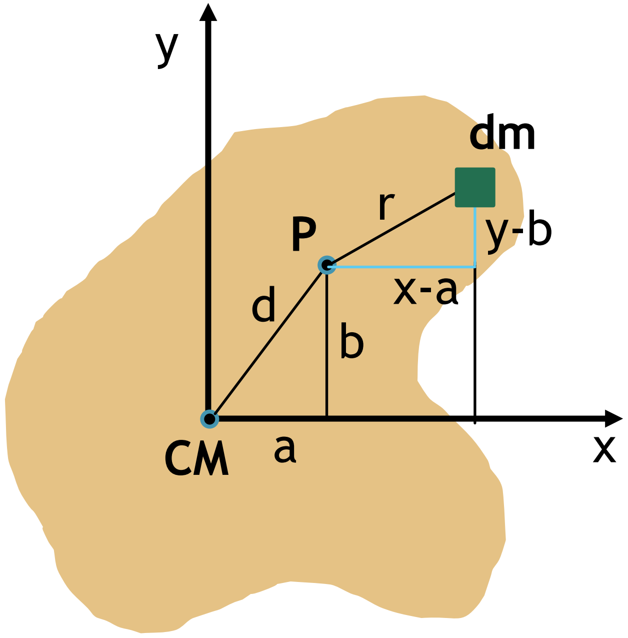


$$\boxed{\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}}$$

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx \Rightarrow I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx \Rightarrow I = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων

$$I = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{3}{12}ML^2 = I_{KM} + \frac{1}{4}ML^2 = I_{KM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = I_{KM} + Md^2$$



Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων

Η Ροπή Αδράνειας ενός σώματος ως προς άξονα περιστροφής ο οποίος είναι παράλληλος με τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Κέντρο Μάζας του σώματος, ισούται με το άθροισμα της ροπής αδράνειας I_o και του γινομένου md^2, όπου d είναι η απόσταση των δύο αξόνων.

$$I = \int r^2\,dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\,dm,$$

$$I = \int (x^2 + y^2)\,dm - 2a\int x\,dm - 2b\int y\,dm + \int (a^2 + b^2)\,dm.$$

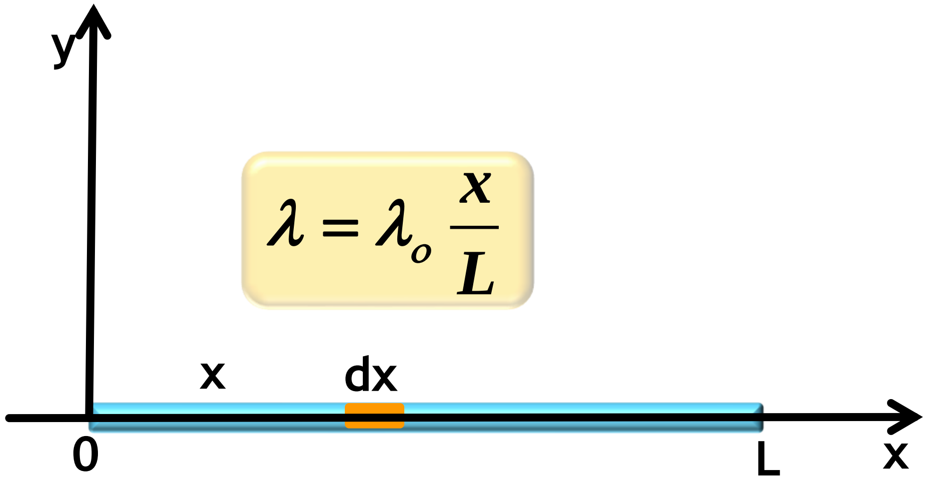
$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_o + md^2$$

Ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς ράβδου ως προς άξονα που περνάει από ένα άκρο της

$$I_o = I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$$

$$I = I_o + md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Ροπή αδράνειας μη ομογενούς συμπαγούς ράβδου ως προς άξονα που περνάει από ένα άκρο της



$$\lambda = \lambda_o \frac{x}{L}$$

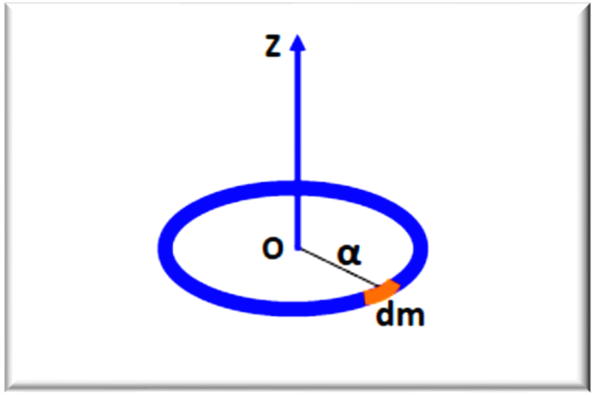
$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int_0^L x^2 \lambda dx \Rightarrow I = \int_0^L x^2 \lambda_o \frac{x}{L} dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{\lambda_o}{L} \int_0^L x^3 dx \Rightarrow I = \frac{\lambda_o}{L} \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^L \Rightarrow I = \frac{\lambda_o}{L} \frac{L^4}{4} \Rightarrow I = \frac{\lambda_o L^3}{4}$$

Επίσης: $$M = \int dm \Rightarrow M = \int \lambda dx \Rightarrow M = \int_0^L \lambda_o \frac{x}{L} dx \Rightarrow M = \frac{\lambda_o}{L} \int_0^L x dx \Rightarrow M = \frac{\lambda_o}{L} \frac{L^2}{2} \Rightarrow M = \frac{\lambda_0 L}{2}$$

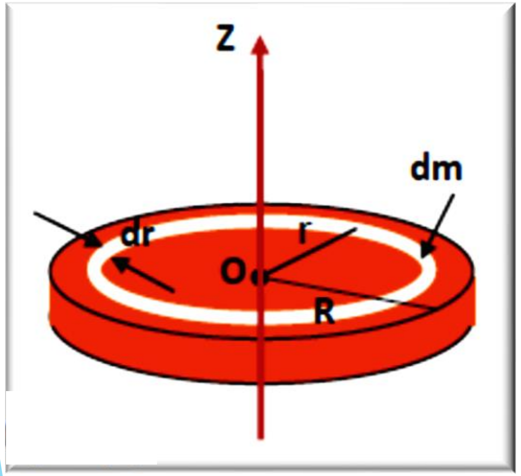
Επομένως: $$I = \frac{\lambda_o L^3}{4} \Rightarrow I = \frac{\lambda_o L}{2} \frac{L^2}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} M L^2$$

Ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου, ακτίνας α, ως προς τον άξονα περιστροφής OZ (σχήμα)



$$I=\int r^2dm \Rightarrow I=\int \alpha^2 dm \Rightarrow I=\alpha^2\int dm \Rightarrow I=M\alpha^2$$

Ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου, ακτίνας R και μάζας M, ως προς τον άξονα περιστροφής OZ (σχήμα)



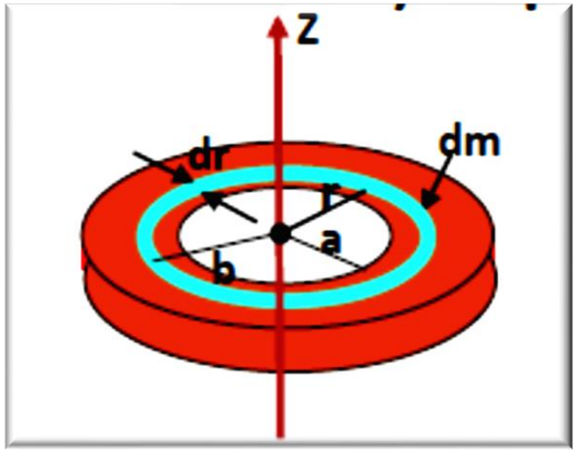
Ο λεπτός δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών δακτυλίων με στοιχειώδη μάζα dm και ακτίνα r.

$$\sigma=\frac{dm}{dS}=\frac{M}{\pi R^2}$$

$$I=\int r^2dm \Rightarrow I=\int_0^R r^2\sigma 2\pi r dr \Rightarrow I=2\pi\sigma\int_0^R r^3dr \Rightarrow I=2\pi\sigma\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R \Rightarrow I=2\pi\sigma\frac{R^4}{4}\Rightarrow$$

$$I=2\pi\frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\Rightarrow I=\frac{1}{2}MR^2$$

Ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου μάζας Μ, εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής b ως προς τον άξονα περιστροφής OZ (σχήμα)



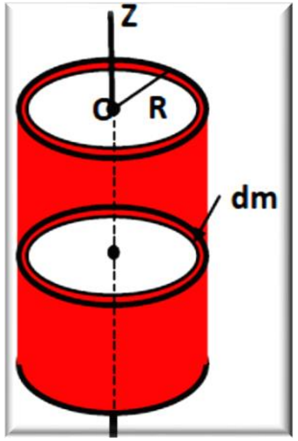
Ο λεπτός δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών δακτυλίων με στοιχειώδη μάζα dm και ακτίνα r.

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$$

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int_{\alpha}^{b} r^2 \sigma 2\pi r dr \Rightarrow I = 2\pi\sigma \int_{\alpha}^{b} r^3 dr \Rightarrow I = 2\pi\sigma \left.\frac{r^4}{4}\right|_{\alpha}^{b} \Rightarrow I = 2\pi\sigma \frac{\left(b^4 - \alpha^4\right)}{4} \Rightarrow$$

$$I = 2\pi \frac{M}{\pi\left(b^2 - \alpha^2\right)} \frac{\left(b^4 - \alpha^4\right)}{4} \Rightarrow I = 2\pi \frac{M}{\pi\left(b^2 - \alpha^2\right)} \frac{\left(b^2 + \alpha^2\right)\left(b^2 - \alpha^2\right)}{4} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(b^2 + \alpha^2\right)$$

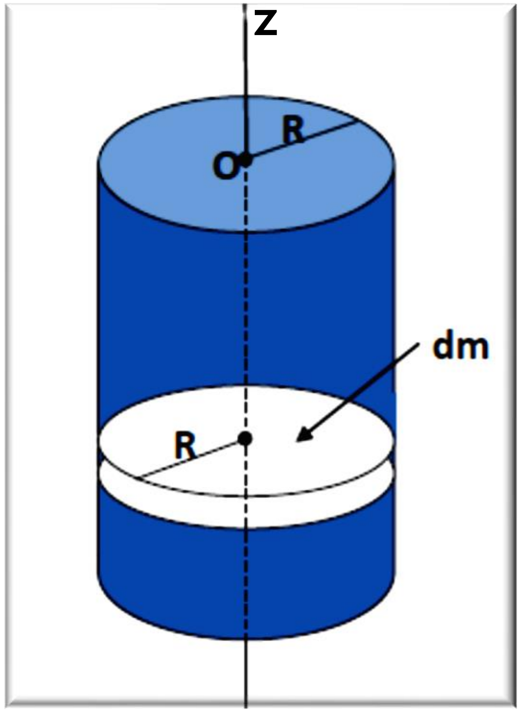
Ροπή αδράνειας λεπτότοιχου ομογενούς κοίλου κυλίνδρου μάζας Μ, και ακτίνας R ως προς τον άξονα περιστροφής OZ (σχήμα)



$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int R^2 dm \Rightarrow I = R^2 \int dm \Rightarrow I = MR^2$$

Ροπή αδράνειας συμπαγούς ομογενούς κυλίνδρου μάζας Μ, και ακτίνας R ως προς τον άξονα περιστροφής OZ (σχήμα)

1ος Τρόπος



Ο κύλινδρος μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών δίσκων με στοιχειώδη μάζα dm και ακτίνα R.

Υπολογίσαμε τη ροπή αδράνειας δίσκου η οποία δίδεται από τη σχέση:

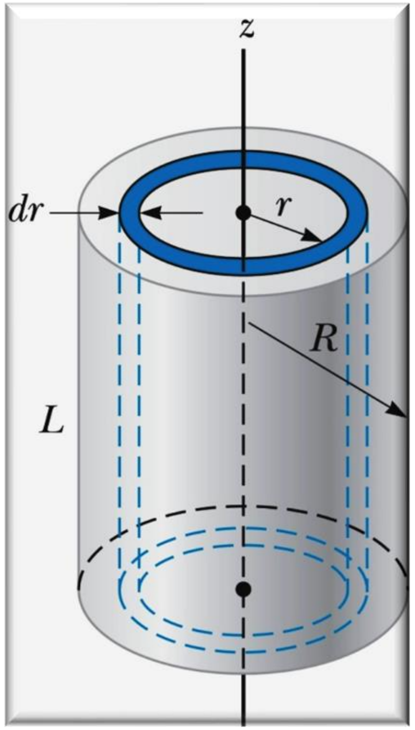
$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Η ροπή αδράνειας του λεπτού δίσκου είναι η στοιχειώδης ροπή αδράνειας μιας στοιχειώδους μάζας dm του κυλίνδρου. Επομένως:

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 \Rightarrow \int dI = \int \frac{1}{2} dm R^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} R^2 \int dm \Rightarrow I = \frac{1}{2} M R^2$$

Ροπή αδράνειας συμπαγούς ομογενούς κυλίνδρου μάζας Μ, και ακτίνας R ως προς τον άξονα περιστροφής OZ (σχήμα)

2ος Τρόπος



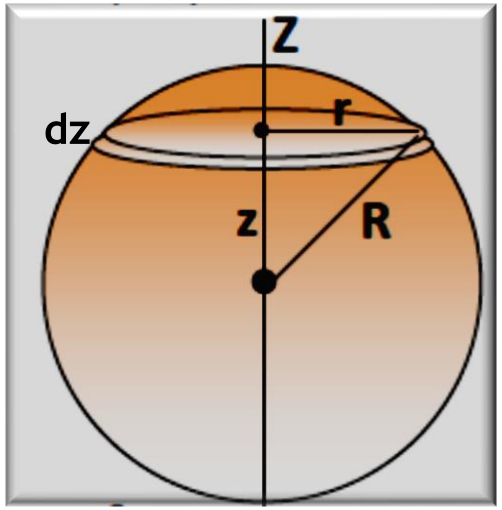
Ο κύλινδρος μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών κυλινδρικών φλοιών ύψους L, ακτίνας r και πάχους dr.

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{\pi L R^2}$$

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int r^2 \rho dV \Rightarrow I = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r L dr \Rightarrow I = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr \Rightarrow$$

$$I = 2\pi\rho L \frac{R^4}{4} \Rightarrow I = 2\pi \frac{M}{\pi L R^2} L \frac{R^4}{4} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} M R^2}$$

Ροπή αδράνειας συμπαγούς ομογενούς σφαίρας μάζας M, και ακτίνας R ως προς μία διάμετρό της (σχήμα)



Η σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών δίσκων με στοιχειώδη μάζα dm και μεταβλητή ακτίνα r.

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 \Rightarrow \int dI = \frac{1}{2}\int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} r^2 \rho\pi r^2 dz \Rightarrow I = \rho\pi \int_0^R r^4 dz \Rightarrow I = \pi\rho\int_0^R \left(R^2 - z^2\right)^2 dz \Rightarrow$$

$$I = \pi\rho\left[\int_0^R R^4 dz + \int_0^R z^4 dz - 2\int_0^R R^2 z^2 dz\right] \Rightarrow I = \pi\rho\left[R^4\int_0^R dz + \int_0^R z^4 dz - 2R^2\int_0^R z^2 dz\right] \Rightarrow$$

$$I = \pi\rho\left[R^4 z\Big|_0^R + \frac{z^5}{5}\Big|_0^R - 2R^2\frac{z^3}{3}\Big|_0^R\right] \Rightarrow I = \pi\rho\left[R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3}\right] \Rightarrow I = \pi\rho\left[\frac{8R^5}{15}\right] \Rightarrow$$

$$I = \pi\frac{3M}{4\pi R^3}\left[\frac{8R^5}{15}\right] \Rightarrow \boxed{I = \frac{2}{5}MR^2}$$

Ροπή Αδράνειας - Σύνοψη

Ράβδος: $\frac{1}{12}ML^2$

Δακτύλιος: MR^2

Δίσκος: $\frac{1}{2}MR^2$

Λεπτότοιχος κύλινδρος: MR^2

Συμπαγής κύλινδρος: $\frac{1}{2}MR^2$

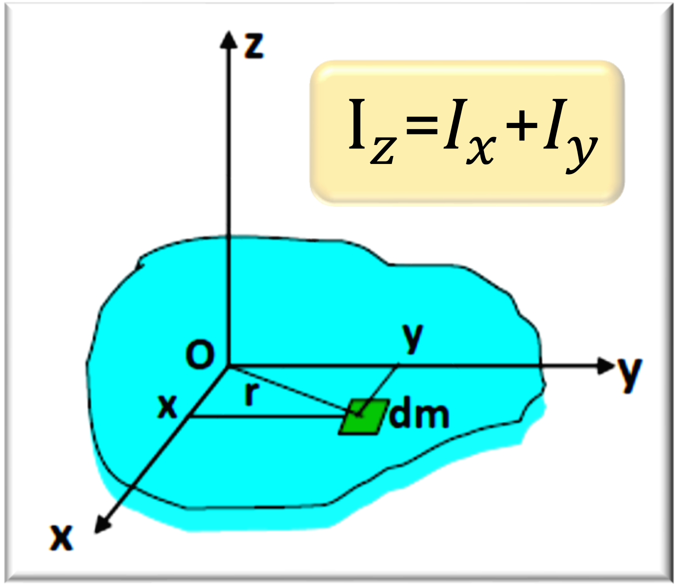
Σφαίρα: $\frac{2}{5}MR^2$

Είναι φανερό ότι η ροπή αδράνειας ενός σώματος δίδεται από τη σχέση:

$$f\,M\,R^2$$

Είδος	f
Ράβδος	1/12
Δακτύλιος	1
Δίσκος	1/2
Λεπτότοιχος κύλινδρος	1
Συμπαγής Κύλινδρος	1/2
Σφαίρα	2/5

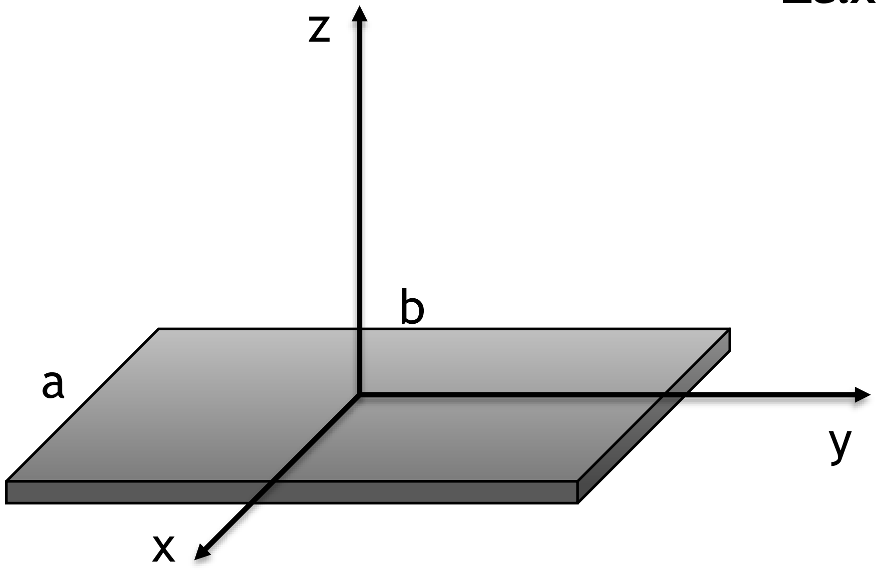
Θεώρημα Καθέτων Αξόνων



$$I_z=\int dmr^2=\int dm(x^2+y^2)=\int dmx^2+\int dmy^2$$

Ισχύει για κατανομές στο επίπεδο (δύο διαστάσεων).

Ροπή αδράνειας ομογενούς πλάκας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της



Δείχνουμε ότι: $I_x=\dfrac{1}{12}Mb^2$

Στη συνέχεια ότι: $I_y=\dfrac{1}{12}Ma^2$

Άρα: $I_z=I_x+I_y=\dfrac{1}{12}M(a^2+b^2)$