

Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκοντες

Παναγιώτα Καραχάλιου

Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr



Χριστόφορος Κροντηράς

Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr



Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄
Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-
Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick,
Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Μηχανική των ρευστών

Ρευστά (Υγρά και αέρια)

Καταστάσεις της ύλης

▶ Στερεά

- ▶ Έχουν καθορισμένο όγκο και σχήμα.

▶ Υγρά

- ▶ Έχουν καθορισμένο όγκο αλλά όχι καθορισμένο σχήμα.

▶ Αέρια - ελεύθερα

- ▶ Δεν έχουν ούτε καθορισμένο όγκο ούτε καθορισμένο σχήμα.

▶ Γενικά, ένα συγκεκριμένο υλικό θεωρείται στερεό, υγρό, ή αέριο ανάλογα με το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να μεταβάλλει το σχήμα του υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης.

▶ Ως ρευστό ορίζουμε μια συγκέντρωση μορίων τα οποία έχουν τυχαία διάταξη και διατηρούν τη συνοχή τους λόγω των ασθενών συνεκτικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους και των δυνάμεων που ασκούν τα τοιχώματα του δοχείου.

▶ Τα ρευστά δεν μπορούν να δεχτούν διατμητικές ή εφελκυστικές τάσεις.

▶ Η μόνη τάση που μπορεί να ασκηθεί σε ένα σώμα το οποίο είναι βυθισμένο σε ένα στατικό ρευστό είναι εκείνη που τείνει να συμπιέσει το σώμα από όλες τις πλευρές.

▶ Η δύναμη που ασκεί ένα στατικό ρευστό σε ένα σώμα είναι πάντα κάθετη στις επιφάνειες του σώματος.

Στατική και δυναμική των ρευστών

▶ **Στατική των ρευστών:** Περιγράφει ρευστά τα οποία είναι ακίνητα.

▶ **Δυναμική των ρευστών:** Περιγράφει ρευστά τα οποία βρίσκονται σε κίνηση

Πίεση

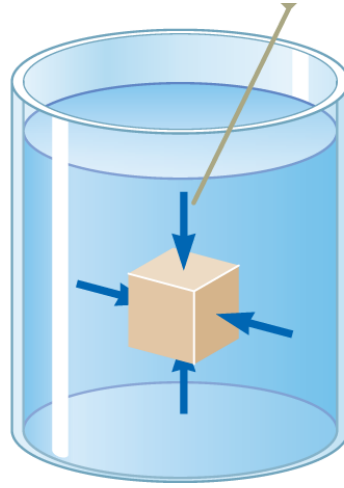
▶ Η πίεση P του ρευστού στο επίπεδο που βρίσκεται βυθισμένη η διάταξη ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου της δύναμης προς το εμβαδόν.

$$P \equiv \frac{F}{A}$$

- ▶ Η πίεση είναι βαθμωτό μέγεθος.
- ▶ Είναι ανάλογη του μέτρου της δύναμης.
- ▶ Αν η πίεση δεν είναι σταθερή σε μια περιοχή, η δύναμη dF που ασκείται σε μια επιφάνεια εμβαδού dA είναι $dF = PdA$.

▶ Οι μονάδες της πίεσης είναι τα pascal (Pa). $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

▶ Η κατεύθυνση της δύναμης που προκαλεί την πίεση είναι κάθετη στην επιφάνεια στην οποία ασκείται η πίεση.



Η πυκνότητα ενός υλικού ορίζεται ως η μάζα ανά μονάδα όγκου.

$$\rho \equiv \frac{M}{V}$$

Η ύπαρξη διαφόρων τιμών πυκνότητας υποδεικνύει ότι η μέση απόσταση μεταξύ των μορίων ενός αερίου είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή ενός στερεού ή ενός υγρού.

ΠΙΝΑΚΑΣ M14.1

Πυκνότητες διαφόρων στοιχείων και υλικών σε κανονική θερμοκρασία (0°C) και πίεση (ατμοσφαιρική)

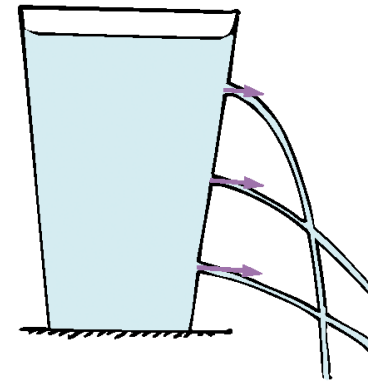
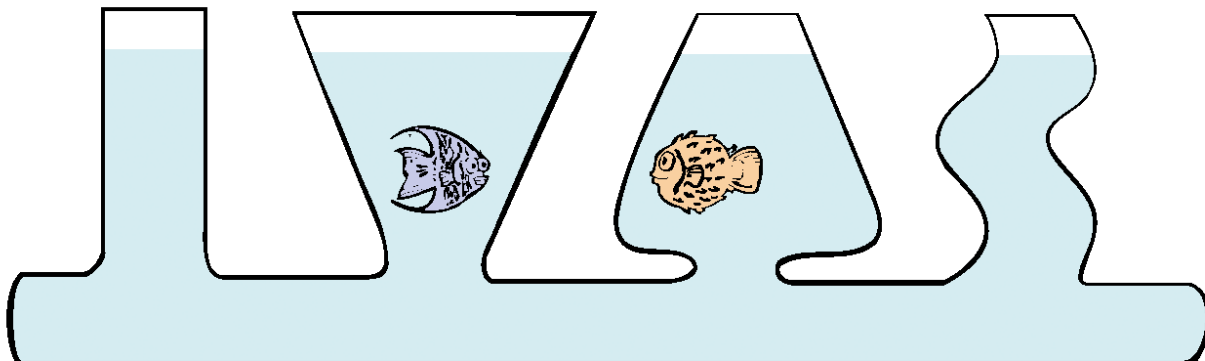
Στοιχείο/υλικό	ρ (kg/m ³)	Στοιχείο/υλικό	ρ (kg/m ³)
Αέρας	1.29	Σίδηρος	7.86×10^3
Αέρας (σε 20°C και ατμοσφαιρική πίεση)	1.20	Μόλυβδος	11.3×10^3
Αργίλιο	2.70×10^3	Υδράργυρος	13.6×10^3
Βενζόλιο	0.879×10^3	Άζωτο (αέριο)	1.25
Ορείχαλκος	8.4×10^3	Εύλο βελανιδιάς	0.710×10^3
Χαλκός	8.92×10^3	Όσμιο	22.6×10^3
Αιθυλική αλκοόλη	0.806×10^3	Οξυγόνο (αέριο)	1.43
Γλυκό νερό	1.00×10^3	Εύλο πεύκης	0.373×10^3
Γλυκερίνη	1.26×10^3	Λευκόχρυσος	21.4×10^3
Χρυσός	19.3×10^3	Θαλασσινό νερό	1.03×10^3
Ήλιο (αέριο)	1.79×10^{-1}	Άργυρος	10.5×10^3
Υδρογόνο (αέριο)	8.99×10^{-2}	Κασσίτερος	7.30×10^3
Πάγος	0.917×10^3	Ουράνιο	19.1×10^3

Μεταβολή της πίεσης συναρτήσει του βάθους

- ▶ Όταν κολυμπάτε μέσα στο νερό αισθάνεστε την πίεση στα τύμπανα των αυτιών σας
- ▶ Όσο μεγαλύτερο είναι το βάθος στο οποίο κολυμπάτε τόσο μεγαλύτερη είναι και η πίεση που δέχεστε
- ▶ Αυτό οφείλεται στο βάρος των υπερκείμενων ρευστών πάνω από το σημείο στο οποίο βρίσκεστε.
- ▶ Επίσης, η πίεση εξαρτάται από την πυκνότητα του ρευστού στο οποίο βυθίζεται ένα σώμα. Άρα:

$$P = \rho gh + P_0$$

- ▶ Όπου P_0 η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια του ρευστού



Γιατί τα φράγματα φροντίζουμε να έχουν πλατιά βάση?

Μεταβολή της πίεσης συναρτήσει του βάθους

▶ Έστω η σκουρόχρωμη περιοχή, η οποία αντιπροσωπεύει ένα δείγμα υγρού που βρίσκεται μέσα σε έναν κύλινδρο.

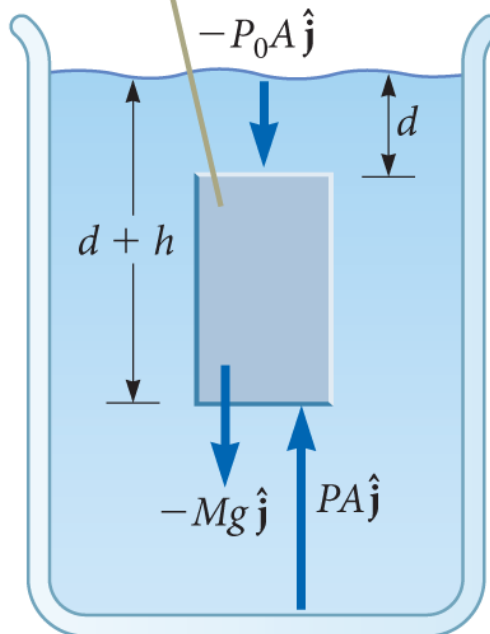
▶ Έχει διατομή εμβαδού A .

▶ Εκτείνεται από βάθος d μέχρι βάθος $d + h$ κάτω από την επιφάνεια του υγρού.

▶ Στο δείγμα ασκούνται τρεις εξωτερικές δυνάμεις.

*Η πυκνότητα είναι ίδια σε κάθε σημείο του ρευστού.
Ασυμπίεστο ρευστό.*

Η ποσότητα του υγρού βρίσκεται σε ισορροπία, άρα η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι μηδενική.



-Η δύναμη $P_0 A$ με κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω, η οποία ασκείται στην άνω έδρα.

-Η δύναμη PA με κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα πάνω, η οποία ασκείται στην κάτω έδρα.

-Η βαρύτητα $Mg = \rho Vg = \rho Ahg$ που ασκείται κατακόρυφα προς τα κάτω.

$$\sum \vec{F} = PA\hat{j} - P_0 A\hat{j} - Mg\hat{j} = 0$$

$$P = P_0 + \rho gh$$

Η πίεση P σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια του υγρού είναι μεγαλύτερη από την πίεση P_0 στην επιφάνεια κατά ρgh .

Αν το δοχείο με το υγρό είναι ανοιχτό στο επάνω μέρος και P_0 είναι η πίεση στην επιφάνεια του υγρού, τότε P_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση. $P_0 = 1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$

Δύναμη σε Φράγμα

Σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA του φράγματος ασκείται δύναμη dF :

$$dF = P dA = \rho g(H - y)w dy$$

Για να βρω τη συνολική δύναμη ολοκληρώνω την dF :

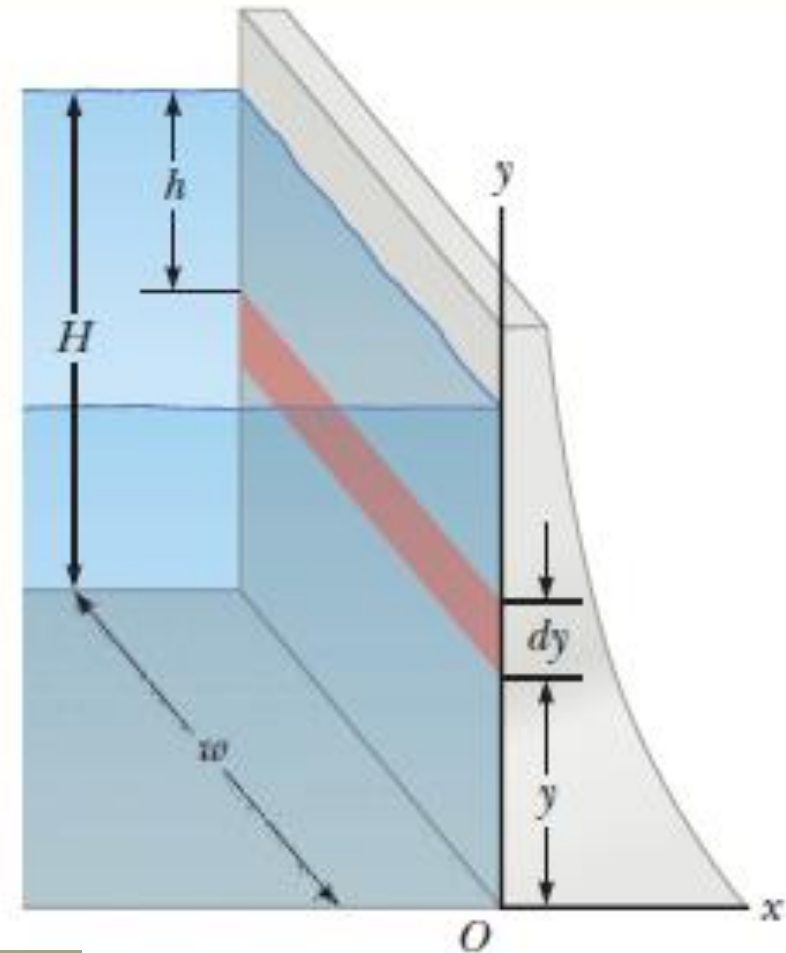
$$F = \int P dA = \int_0^H \rho g(H - y)w dy = \frac{1}{2}\rho g w H^2$$

Το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι:

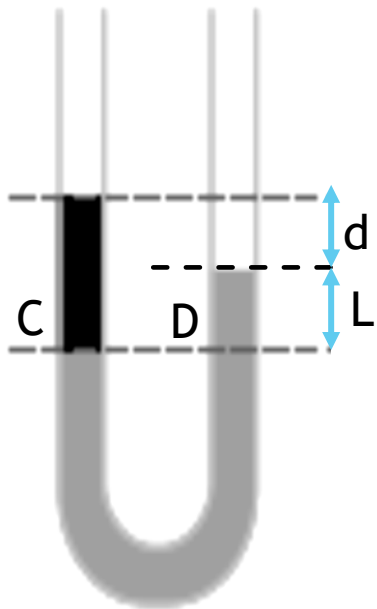
$$\tau(O) = \int d\tau = \int r dF = \int y dF = \int y P dA = \int_0^H y \rho g w (H - y) dy = \frac{1}{6} \rho g w H^3$$

$$\tau(O) = Fd = \frac{1}{6} \rho g w H^3 \rightarrow d = \frac{\frac{1}{6} \rho g w H^3}{\frac{1}{2} \rho g w H^2} = \frac{1}{3} H$$

Πάνω από τη βάση του φράγματος



Υπολογισμός της πυκνότητας - Υοειδής σωλήνας



Στο σχήμα φαίνεται ένας σωλήνας σχήματος U, ο οποίος περιέχει δυο υγρά, νερό (ανοιχτόχρωμο) και λάδι (σκουρόχρωμο) που βρίσκονται σε στατική ισοροπία. Αν η πυκνότητα του νερού είναι $\rho_w = 998 \text{ Kg/m}^3$ προτείνετε τρόπο για τον υπολογισμό της πυκνότητας του λαδιού.

Αφού έχουμε στατική ισοροπία οι πιέσεις στο επίπεδο της διεπιφάνειας είναι ίσες:

$$P_C = P_D \rightarrow P_0 + \rho_{oil} g(d + L) = P_0 + \rho_w gL \rightarrow$$

$$\rho_{oil} = \rho_w \frac{L}{L + d}$$

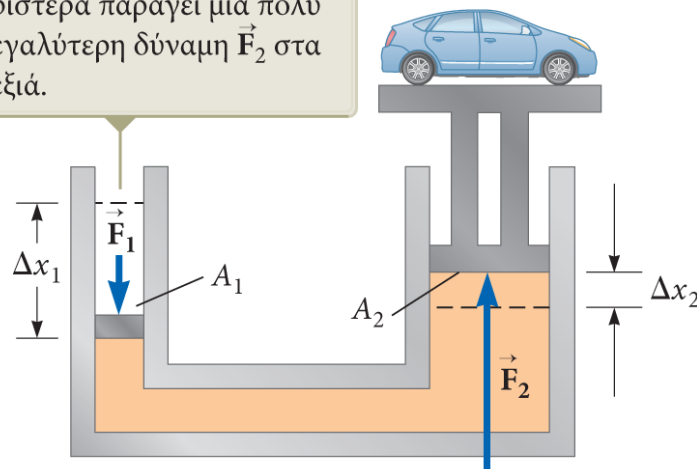
Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα του λαδιού μετρώντας τη στάθμη των δυο υγρών στο αριστερό και στο δεξιό σκέλος του σωλήνα.

Νόμος του Pascal

- ▶ Η πίεση σε ένα σημείο ενός ρευστού εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται το σημείο και από την τιμή της πίεσης στην επιφάνεια P_0 .
- ▶ Κάθε μεταβολή της πίεσης στην επιφάνεια του ρευστού μεταδίδεται σε όλα τα σημεία του ρευστού.
- ▶ Στην παραπάνω πρόταση βασίζεται ο νόμος του Pascal:

Κάθε μεταβολή στην πίεση που ασκείται σε ένα ρευστό μεταδίδεται αυτούσια σε κάθε σημείο του ρευστού, καθώς και στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει.

Επειδή η αύξηση της πίεσης είναι ίδια στις δύο πλευρές, μια μικρή δύναμη \vec{F}_1 στα αριστερά παράγει μια πολύ μεγαλύτερη δύναμη \vec{F}_2 στα δεξιά.



$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

α

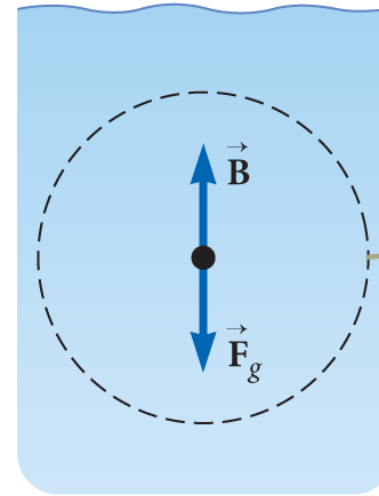
Ασκώντας μια μικρή δύναμη μπορούμε να πάρουμε ως αποτέλεσμα μια μεγαλύτερη δύναμη. Ο όγκος του υγρού που ωθείται προς τα κάτω στο αριστερό μέρος της εικόνας πρέπει να ισούται με τον όγκο του υγρού που ωθείται προς τα επάνω στο δεξιό μέρος της εικόνας.

Εφόσον οι όγκοι είναι ίσοι, $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$

$$F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2 \quad \text{Έργο}_1 = \text{Έργο}_2$$

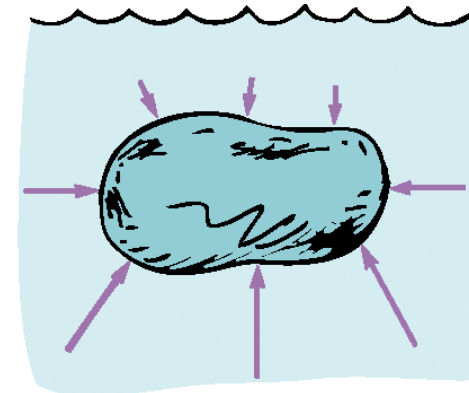
Δύναμη άνωσης

- ▶ Η δύναμη άνωσης είναι η κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα επάνω που ασκεί ένα ρευστό σε κάθε σώμα που είναι βυθισμένο σε αυτό.
- ▶ Η «ιδεατή σφαίρα» του νερού βρίσκεται σε ισορροπία.
- ▶ Πρέπει να υπάρχει μια κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα επάνω, η οποία εξισορροπεί την κατακόρυφη βαρυτική δύναμη με φορά προς τα κάτω.
- ▶ Το μέτρο της άνωσης πρέπει να ισούται με το μέτρο της βαρυτικής δύναμης.
- ▶ Η δύναμη της άνωσης είναι η συνισταμένη δύναμη όλων των δυνάμεων τις οποίες ασκεί το ρευστό που περιβάλλει τη σφαίρα.



Η δύναμη άνωσης \vec{B} που ασκείται σε μια μπάλα θαλάσσης, η οποία αντικαθιστά αυτή την «ιδεατή σφαίρα» νερού, είναι ίδια με τη δύναμη άνωσης που ασκείται στην «ιδεατή σφαίρα».

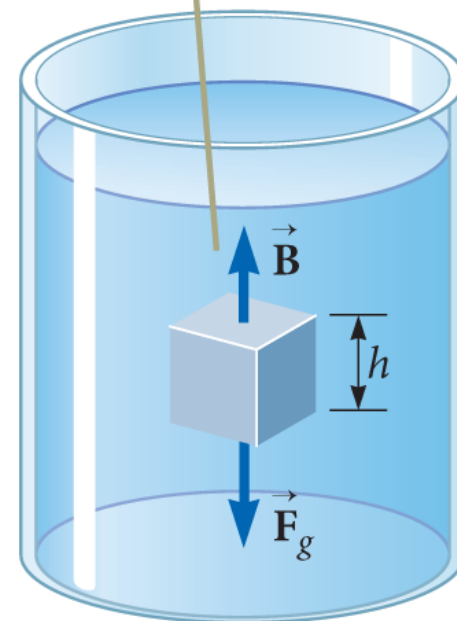
β



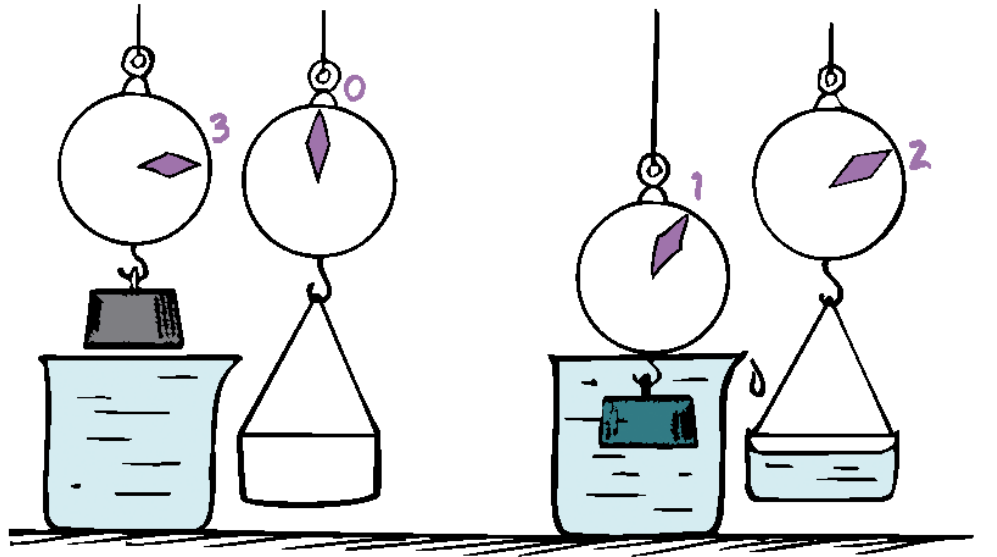
Αρχή του Αρχιμήδη

- ▶ **Αρχή του Αρχιμήδη:** Το μέτρο της δύναμης άνωσης ισούται πάντα με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζεται από το σώμα.
- ▶ Η αρχή του Αρχιμήδη δεν αναφέρεται στη σύσταση του σώματος που δέχεται τη δύναμη της άνωσης.
- ▶ Η σύσταση του σώματος δεν επηρεάζει την άνωση επειδή η τελευταία ασκείται από το ρευστό που το περιβάλλει.
- ▶ $B = (P_{\text{κάτω}} - P_{\text{πάνω}}) A = (\rho_{\text{ρευσ.}} gh) A$
- ▶ $B = \rho_{\text{ρευσ.}} g V_{\text{εκτοπ.}}$
 - ▶ $V_{\text{εκτοπ.}} = Ah$ είναι ο όγκος του ρευστού που εκτοπίζει ο κύβος.
- ▶ $B = Mg$
 - ▶ Mg είναι το βάρος του ρευστού που εκτοπίζει ο κύβος.

Η δύναμη άνωσης που ασκείται στον κύβο είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί το υγρό στην άνω και στην κάτω έδρα του.



Αρχή του Αρχιμήδη-Φαινόμενο Βάρος σε ρευστό



ΕΙΚΟΝΑ 13.12 Ένα σώμα ζυγίζει περισσότερο στον αέρα απ' ό,τι στο νερό. Όταν το βαρίδι της εικόνας, που έχει βάρος 3 N στον αέρα, είναι βυθισμένο στο νερό, φαίνεται να ζυγίζει μόνο 1 N. Το βάρος που «χάνεται», 2 N, ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου νερού, που ισούται με τη δύναμη της άνωσης.

Η αρχή του Αρχιμήδη - Παράδειγμα

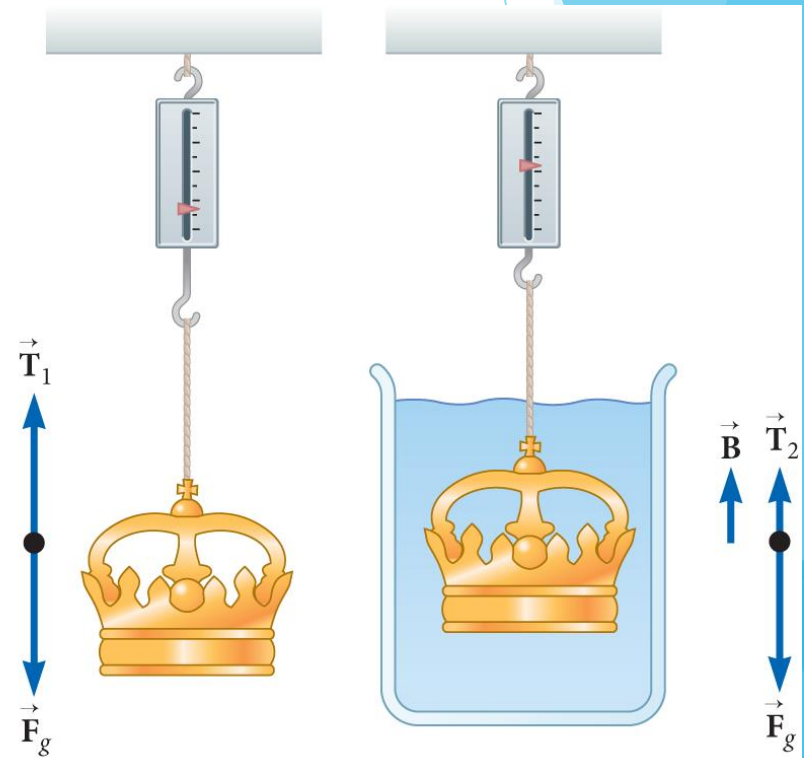
Σώμα πυκνότητας $\rho_{\sigma\omega\mu}$ εμφανίζεται στο νερό 200 N ελαφρύτερο απ'ότι στον αέρα. Να υπολογιστεί το βάρος του σώματος στον αέρα.

Η άνωση ισούται με το πραγματικό μείον το φαινόμενο βάρος:

$$B = F_g - T_2$$

$$B = \rho_w g V_{\sigma\omega\mu} \rightarrow V_{\sigma\omega\mu} = \frac{B}{\rho_w g} \rightarrow \frac{m_{\sigma\omega\mu}}{\rho_{\sigma\omega\mu}} = \frac{B}{\rho_w g} \rightarrow$$

$$m_{\sigma\omega\mu} = \frac{\rho_{\sigma\omega\mu} B}{\rho_w g} \rightarrow m_{\sigma\omega\mu} g = \frac{\rho_{\sigma\omega\mu} B}{\rho_w} \rightarrow F_g = \frac{\rho_{\sigma\omega\mu}}{\rho_w} B$$



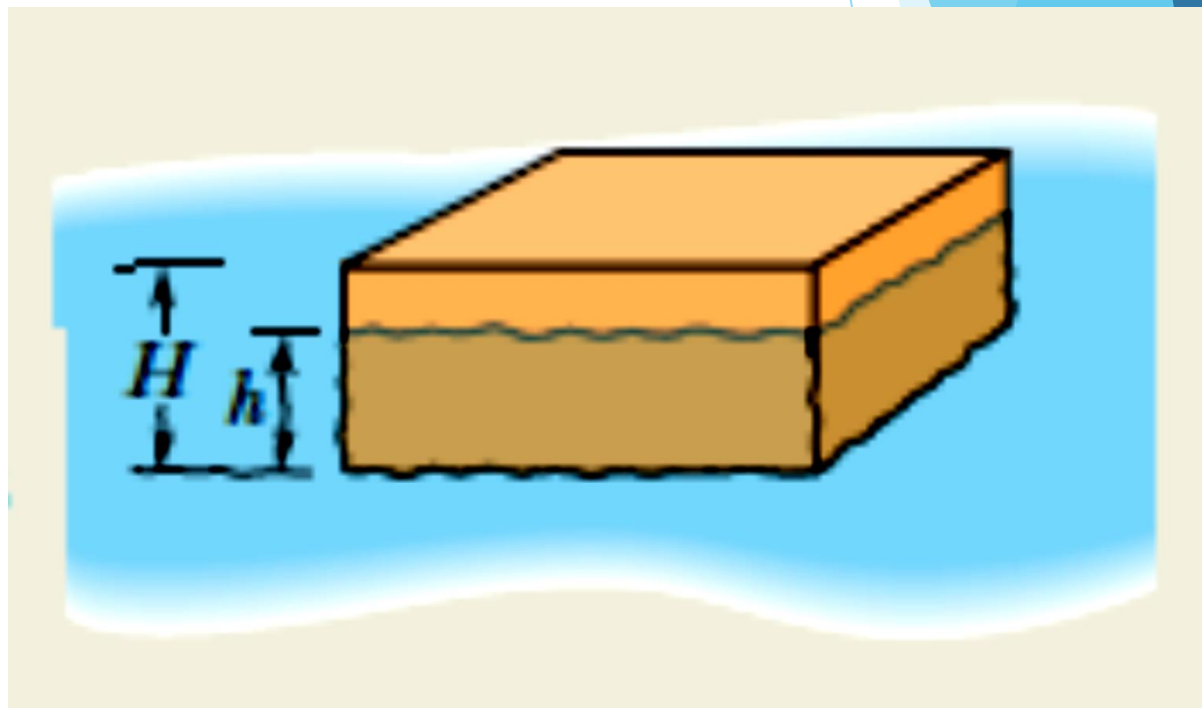
Η αρχή του Αρχιμήδη: Σώμα που επιπλέει (μερικώς βυθισμένο)

Να βρεθεί ο λόγος h/H αν είναι γνωστές οι πυκνότητες του ρευστού και του σώματος

$$B = \rho_w g V_{\text{εκτ}} \rightarrow V_{\text{εκτ}} = \frac{B}{\rho_w g} \rightarrow hA = \frac{B}{\rho_w g}$$

$$F_g = m_{\text{σωμ}} g = \rho_{\text{σωμ}} V_{\text{σωμ}} g \rightarrow HA = \frac{F_g}{\rho_{\text{σωμ}} g}$$

$$\frac{h}{H} = \frac{\rho_{\text{σωμ}}}{\rho_w}$$



Η αρχή του Αρχιμήδη: Πλήρως Βυθισμένο σώμα

- ▶ Ένα σώμα είναι πλήρως βυθισμένο σε ένα ρευστό πυκνότητας $\rho_{\text{ρευσ.}}$.
- ▶ Ο όγκος $V_{\text{εκτοπ.}}$ του εκτοπισμένου ρευστού ισούται με τον όγκο $V_{\text{σώμ.}}$ του σώματος.
- ▶ Το μέτρο της κατακόρυφης άνωσης με φορά προς τα επάνω είναι

$$B = \rho_{\text{ρευσ.}} \cdot g V_{\text{σώμ.}}$$

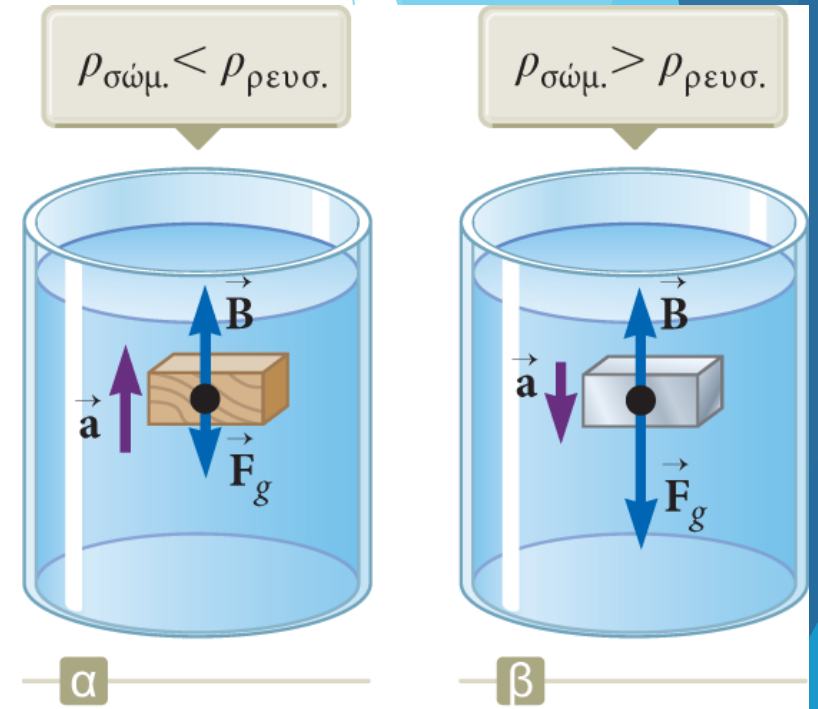
- ▶ Η κατακόρυφη βαρυτική δύναμη με φορά προς τα κάτω είναι

$$F_g = Mg = \rho_{\text{σώμ.}} \cdot g V_{\text{σώμ.}}$$

- ▶ Η συνισταμένη δύναμη είναι

$$B - F_g = (\rho_{\text{ρευσ.}} - \rho_{\text{σώμ.}}) g V_{\text{σώμ.}}$$

- ▶ Αν η πυκνότητα του σώματος είναι μικρότερη από την πυκνότητα του ρευστού, το σώμα θα επιταχύνεται προς τα επάνω.
- ▶ Αν η πυκνότητα του σώματος είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του ρευστού, το σώμα θα βυθιστεί.
- ▶ Αν η πυκνότητα του βυθισμένου σώματος ισούται με την πυκνότητα του ρευστού, το σώμα παραμένει σε ισορροπία.



Ροή ρευστών

Στρωτή ροή

- ▶ Μόνιμη ροή
- ▶ Κάθε σωματίδιο του ρευστού ακολουθεί ομαλή τροχιά.
- ▶ Οι τροχιές των σωματιδίων δεν τέμνονται ποτέ.
- ▶ Κάθε σωματίδιο του ρευστού που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο έχει την ίδια ταχύτητα.

Τυρβώδης ροή

- ▶ Ακανόνιστη ροή που χαρακτηρίζεται από περιοχές μικρών στροβιλισμών.
- ▶ Η τυρβώδης ροή δημιουργείται όταν η ταχύτητα των σωματιδίων ξεπεράσει κάποια συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή.

Ιξώδες

- ▶ Εκφράζει τον βαθμό εσωτερικής τριβής του ρευστού.
- ▶ Η εσωτερική τριβή, ή δύναμη ιξώδους, εκφράζει την αντίσταση που παρουσιάζουν δύο διαδοχικά στρώματα του ρευστού στη σχετική κίνησή τους.
- ▶ Λόγω του ιξώδους, μέρος της κινητικής ενέργειας του ρευστού μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια.

Ιδανικό ρευστό

▶ Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση της πολύπλοκης ροής των ρευστών, κάνουμε τις εξής τέσσερις παραδοχές:

- ▶ **Το ρευστό δεν έχει ιξώδες** - αγνοούμε την εσωτερική τριβή.

Τα σώματα που κινούνται μέσα στο ρευστό δεν δέχονται δυνάμεις ιξώδους.

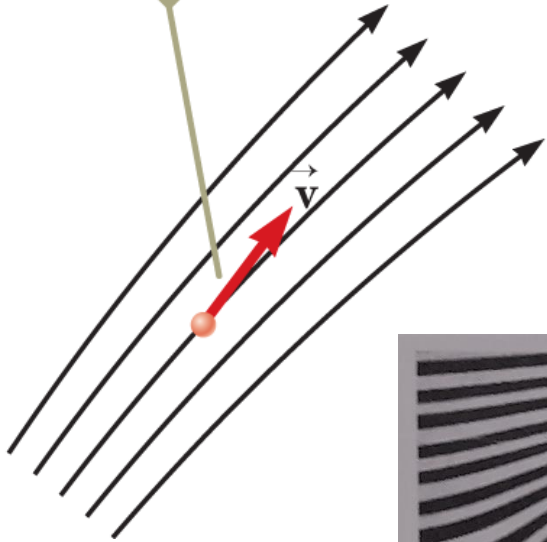
- ▶ **Η ροή είναι μόνιμη** - όλα τα σωματίδια που διέρχονται από ένα σημείο έχουν την ίδια ταχύτητα.

- ▶ **Το ρευστό είναι ασυμπίεστο** - η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή.

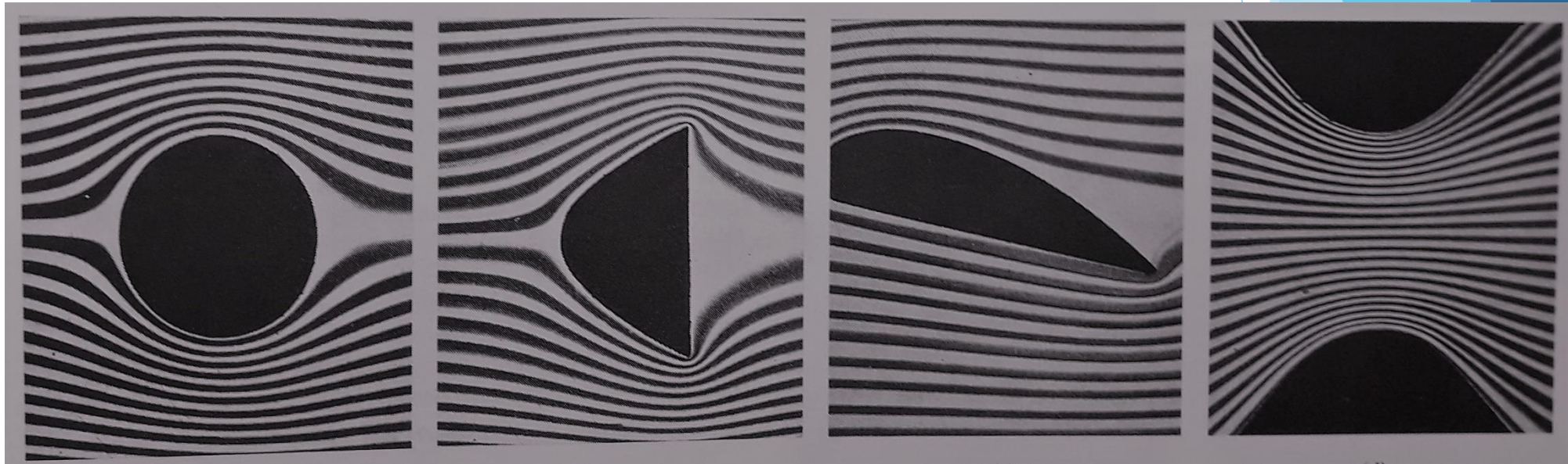
- ▶ **Η ροή είναι αστρόβιλη** - το ρευστό έχει μηδενική στροφορμή γύρω από οποιοδήποτε σημείο του.

Γραμμές ροής

Σε κάθε σημείο της τροχιάς του σωματιδίου, η ταχύτητά του εφάπτεται στη γραμμή ροής.



- ▶ Η τροχιά που ακολουθεί ένα σωματίδιο όταν η ροή είναι μόνιμη ονομάζεται **γραμμή ροής**.
- ▶ Η ταχύτητα του σωματιδίου εφάπτεται πάντα στη γραμμή ροής.
- ▶ Μια ομάδα γραμμών ροής σχηματίζει έναν *σωλήνα ροής*.
- ▶ Τα σωματίδια του ρευστού δεν μπορούν να διαπεράσουν έναν σωλήνα ροής. Διαφορετικά, οι γραμμές ροής θα τέμνονταν μεταξύ τους.



Εξίσωση Συνέχειας

- ▶ Ας θεωρήσουμε ένα ρευστό που ρέει μέσα σε έναν σωλήνα ανομοιόμορφης διατομής.
- ▶ Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το μπλε τμήμα ρέει μέσα από διατομή εμβαδού A_1 με ταχύτητα μέτρου v_1 .
- ▶ Στο τέλος του χρονικού διαστήματος Δt , το μπλε τμήμα ρέει μέσα από διατομή εμβαδού A_2 με ταχύτητα μέτρου v_2 .
- ▶ Η μάζα που διέρχεται από το A_1 σε ένα χρονικό διάστημα ισούται με τη μάζα που περνάει από το A_2 στο ίδιο χρονικό διάστημα.

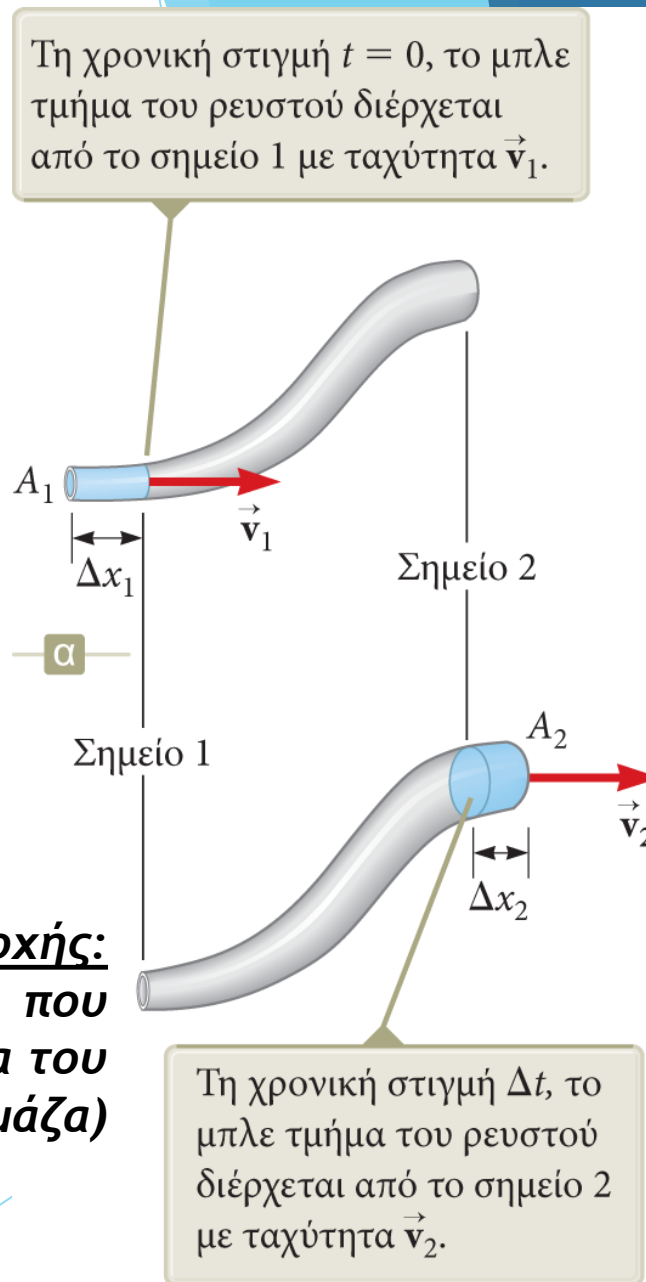
$$m_1 = m_2$$

$$\rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_2 \Delta x_2$$

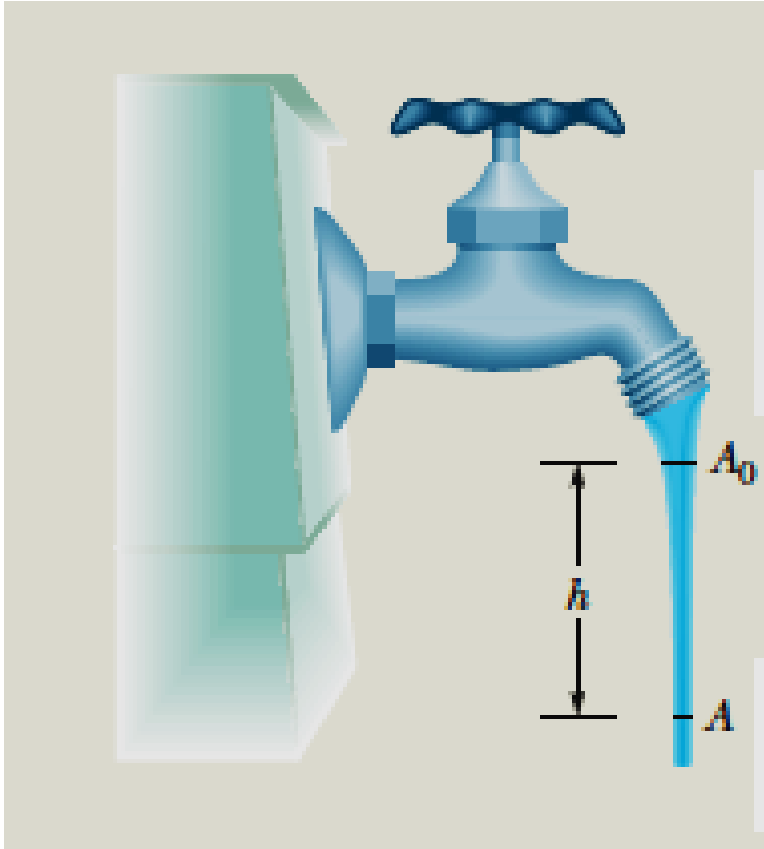
$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{σταθερό}$$

Νόμος συνέχειας ή Νόμος της Παροχής:
Ο όγκος (μάζα) του ρευστού που εισέρχεται στο σωλήνα στη μονάδα του χρόνου είναι ίσος με τον όγκο (μάζα) που εξέρχεται από αυτόν.



Εξίσωση Συνέχειας - Παροχή



Να υπολογισθεί η παροχή όγκου της διπλανής βρύσης

Νόμος της Συνέχειας:

$$A_0 v_0 = A v$$

Το νερό κάνει ελεύθερη πτώση:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Άρα:

$$A_0^2 v_0^2 = A^2 v^2 = A^2 (v_0^2 + 2gh) \rightarrow v_0^2 (A_0^2 - A^2) = 2ghA^2 \rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}}$$

Παροχή:

$$\Pi = A_0 v_0 = A_0 A \sqrt{\frac{2gh}{A_0^2 - A^2}}$$

Η εξίσωση του Bernoulli

Όταν ένα ρευστό διέρχεται από μια περιοχή όπου μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητάς του ή η ύψος του από την επιφάνεια της Γης, τότε μεταβάλλεται και η πίεσή του.

- ▶ Έστω τα δύο σκιασμένα τμήματα. Οι όγκοι των δύο τμημάτων είναι ίσοι.
- ▶ Το συνολικό έργο που παράγεται στο τμήμα είναι $W = (P_1 - P_2) V$.
- ▶ Ένα μέρος του έργου μεταβάλλει την κινητική ενέργεια και ένα μέρος μεταβάλλει τη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

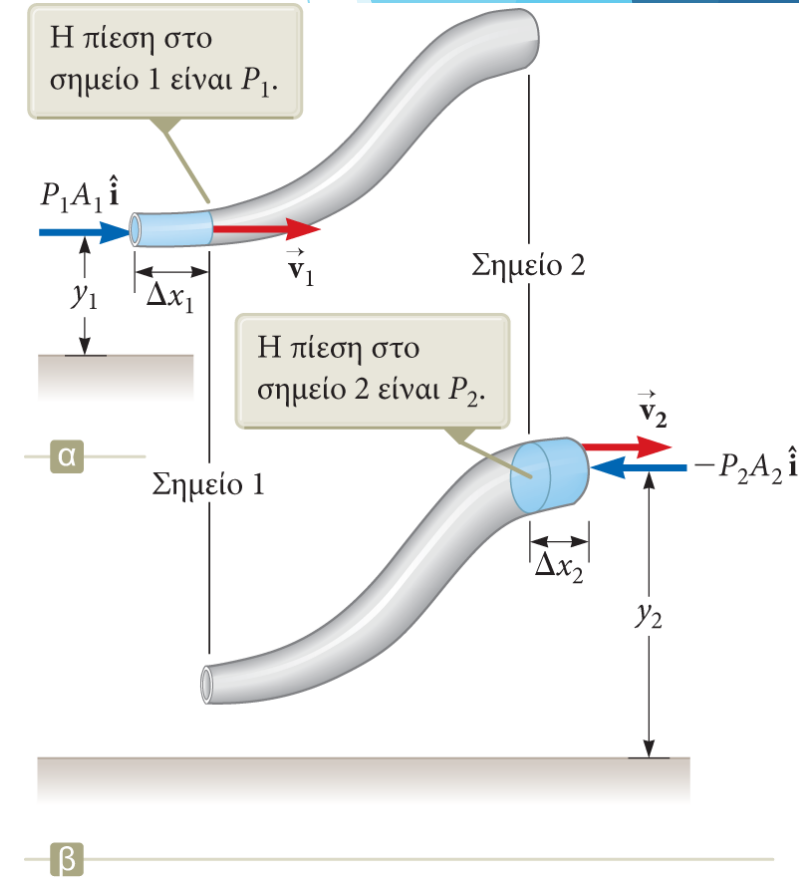
$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Delta U = mgy_2 - mgy_1$$

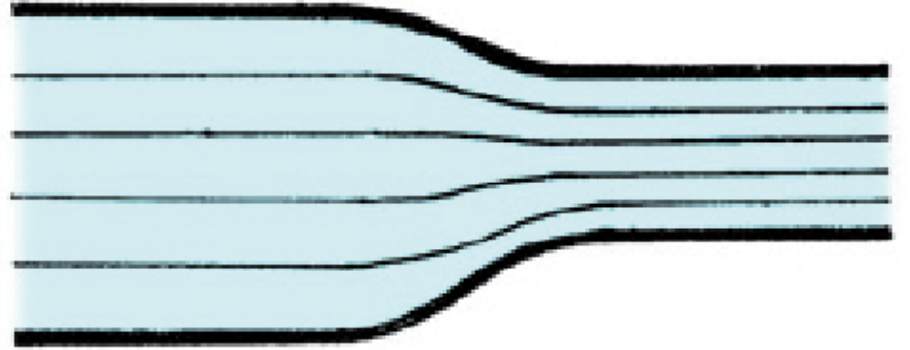
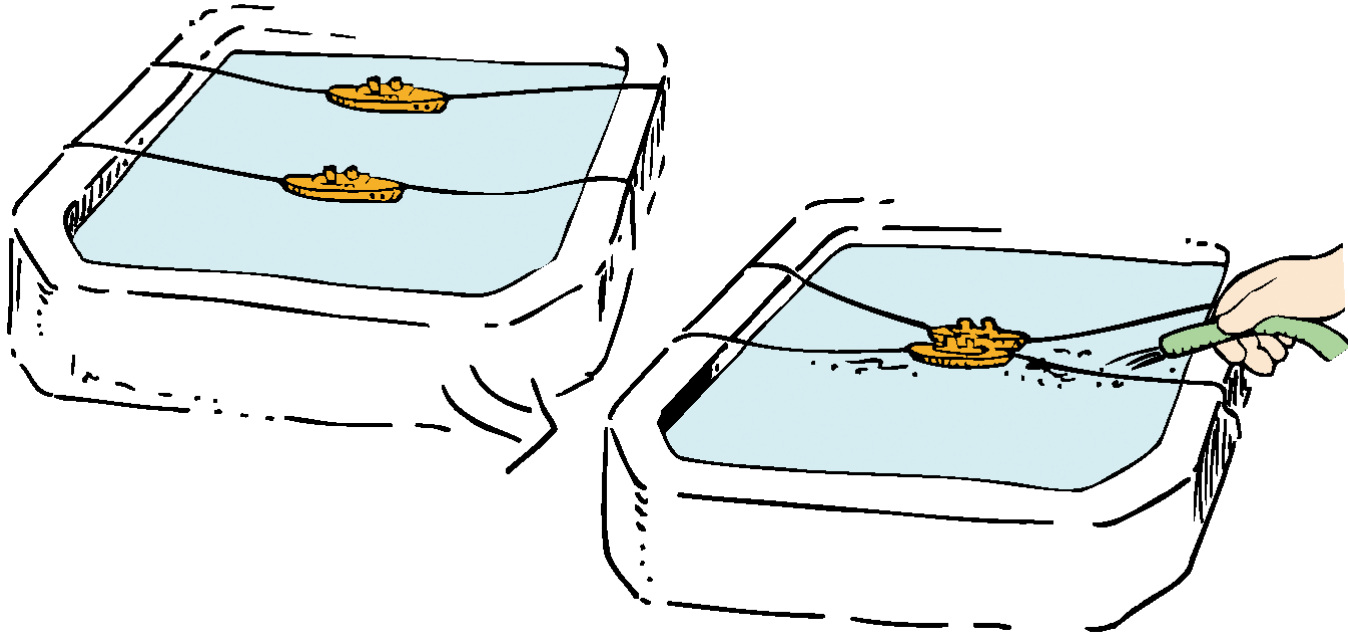
$$\text{Άρα } (P_1 - P_2)V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{σταθερό}$$



Η εξίσωση του Bernoulli



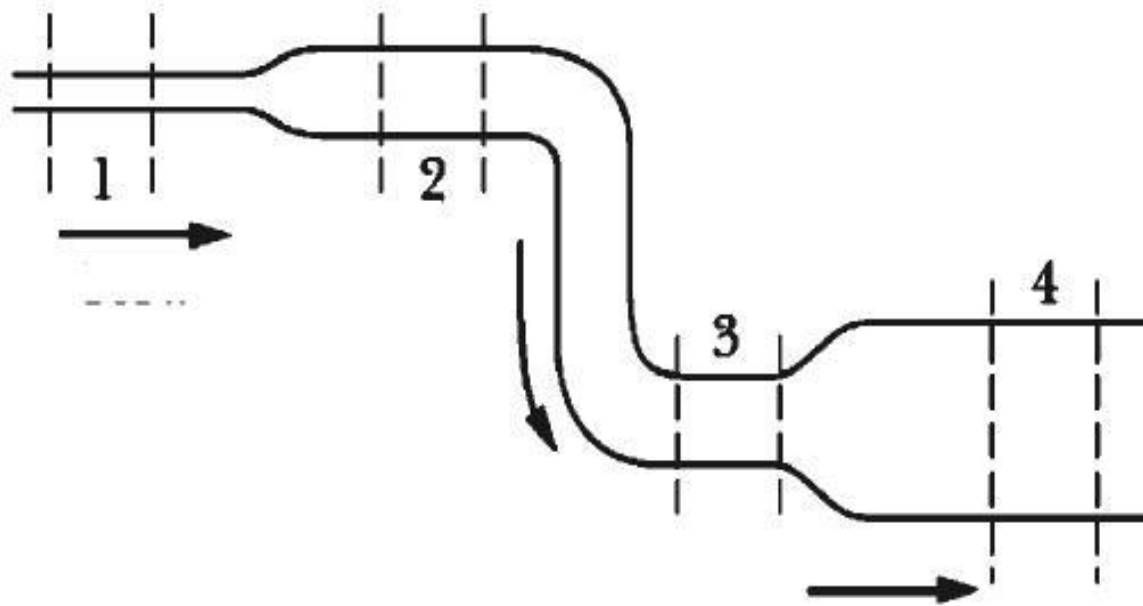
EIKONA 14.17 Όταν το νερό εισέρχεται στο στενότερο μέρος του σωλήνα, η ταχύτητά του αυξάνεται. Η πύκνωση των γραμμών ροής υποδηλώνει αύξηση της ταχύτητας και μείωση της εσωτερικής πίεσης.

EIKONA 14.19 Όταν ο Τιμ φυσά αέρα κατά μήκος της επάνω όψης του χαρτιού, το χαρτί ανυψώνεται.



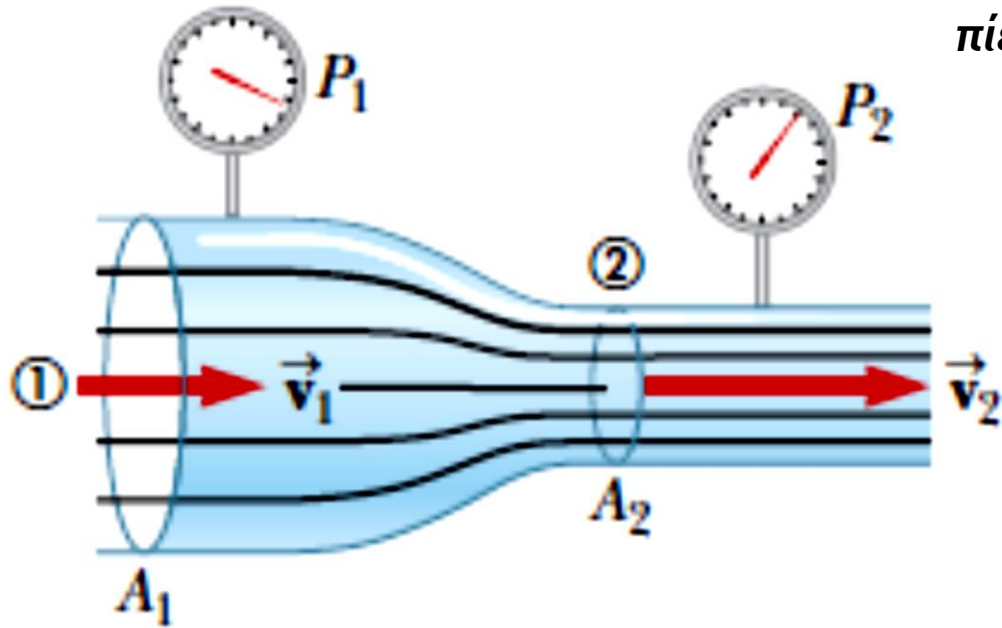
Η εξίσωση του Bernoulli

Να κατατάξετε τις ταχύτητες και της πιέσεις από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη



Σωλήνας Ventouri

Να υπολογισθεί η ταχύτητα v_2 αν είναι γνωστή η διαφορά πίεσης $|P_1 - P_2|$



Εξίσωση Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Νόμος της Συνέχειας:

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

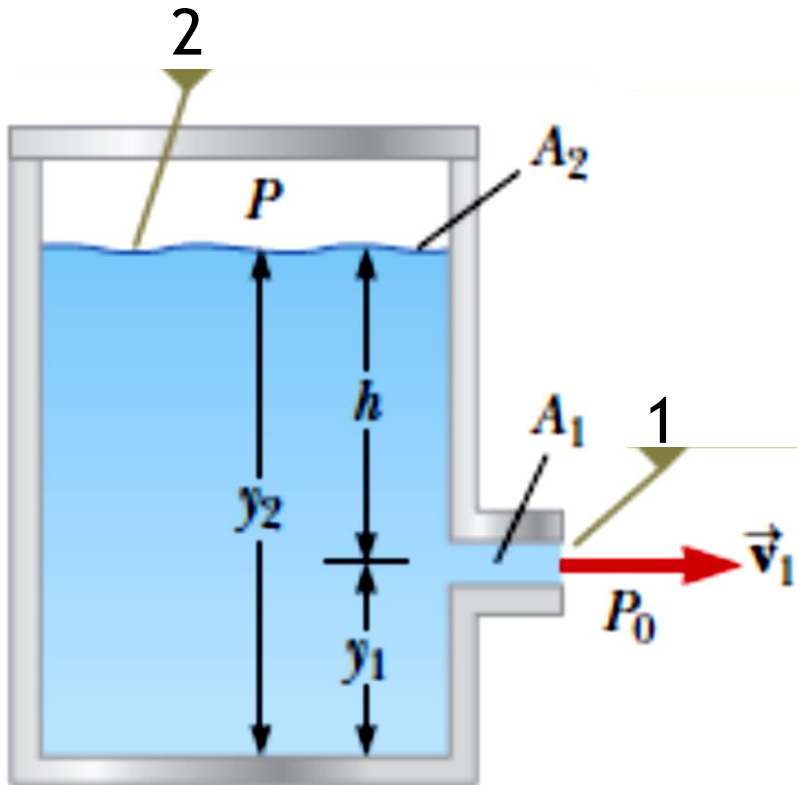
Υπολογισμός ταχύτητας:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Νόμος του Torricelli

$$A_2 \gg A_1$$



Εξίσωση Bernoulli:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$