Μηχανική - Ρευστομηχανική

Timeo hominem unius libri.

Thomas Acquinas

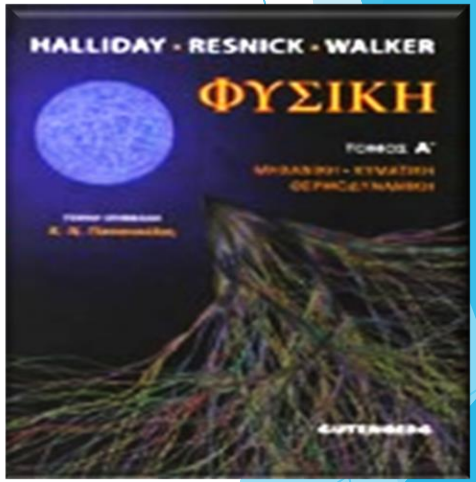
Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

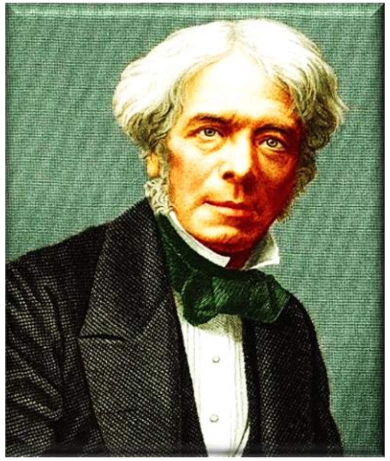
Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ

Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση

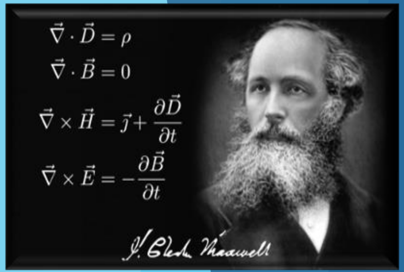


ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg



M. Faraday

Η έννοια του Πεδίου



J. C. Maxwell

In physics, a field is a physical quantity, represented by a scalar, vector, or tensor, that has a value for each point in space and time.

Στη φυσική, πεδίο είναι μια φυσική οντότητα, που περιγράφεται από ένα βαθμωτό μέγεθος, διάνυσμα ή τανυστή, που έχει μια τιμή για κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου.

Η Έννοια του Πεδίου στη Φυσική

ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ**

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Πηγές παραγωγής των πεδίων :

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ⟶ ΜΑΖΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ⟶ ΑΚΙΝΗΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ⟶ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

ΜΑΖΑ : m (Kg)
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ : Q (Cb)

Η Έννοια της Έντασης πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Ένταση $\vec{g}$ σε ένα σημείο Α ενός βαρυτικού πεδίου καλείται το πηλίκο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί το πεδίο σε μια μάζα m , που φέρουμε στο σημείο αυτό, προς τη μάζα αυτή.

$G = 6{,}673 \times 10^{-11} \quad m^3 kg^{-1} s^{-2}$

$$\vec{g} = \lim_{m \to o} \frac{\vec{F}}{m}$$

Διανυσματικό μέγεθος

$$F = G \frac{M m}{r^2}$$

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

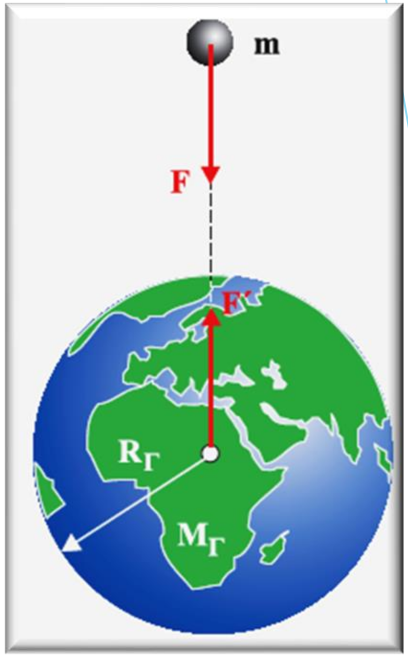
Προϋπόθεση: Η μάζα m που φέρουμε στο σημείο Α να είναι πολύ μικρή.

$G = 6.673 \times 10^{-11}\ m^3 Kg^{-1} s^{-2}$

Το Βαρυτικό πεδίο της Γης μας

Βάρος Σώματος

$$F = G\frac{M_\Gamma \cdot m}{r^2} = B$$



Έντaση **g** βαρυτικού πεδίου Γης

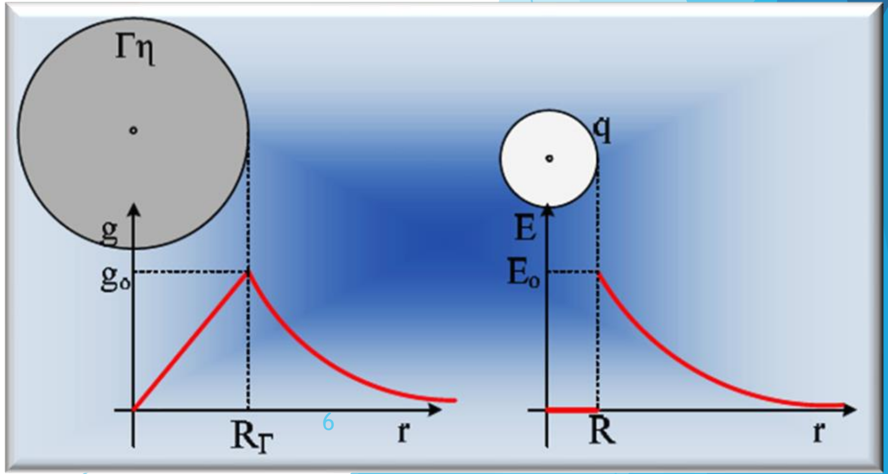
$$g = G\frac{M_\Gamma}{r^2}$$ ή $$g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$$

Μέτρο της έντασης **g** στην επιφάνεια της Γης

$$g = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} = 9.81\frac{m}{s^2}$$

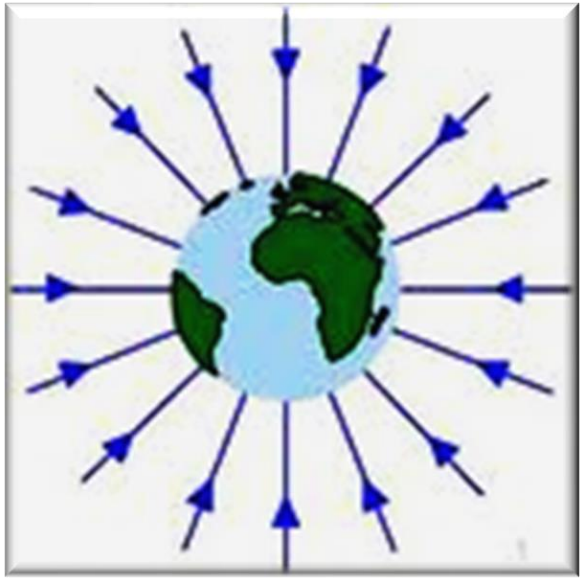
……και στο εσωτερικό της Γης

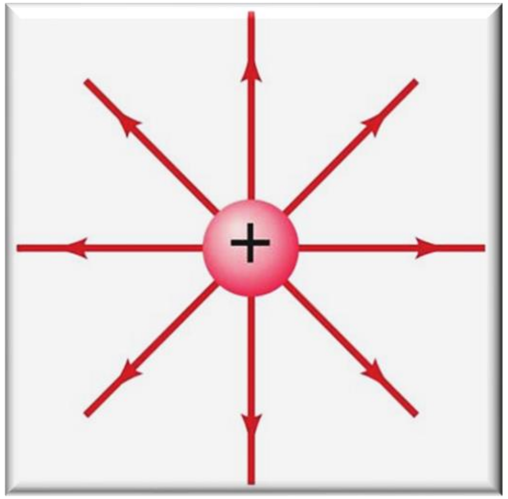
$$g = g_o\frac{r}{R_\Gamma}$$

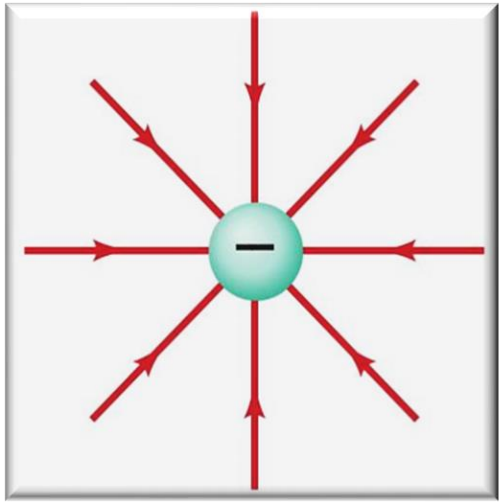


Η έννοια των γραμμών του Πεδίου

Η Έννοια των Γραμμών του Πεδίου



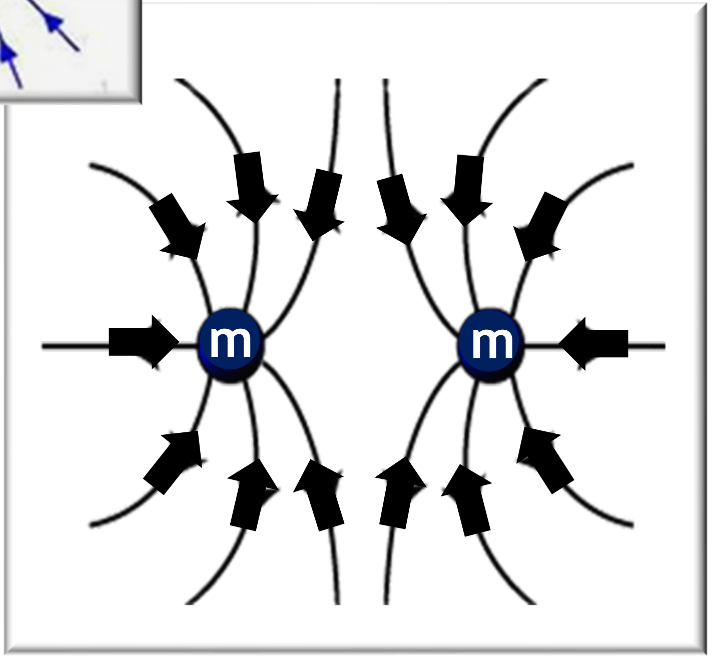


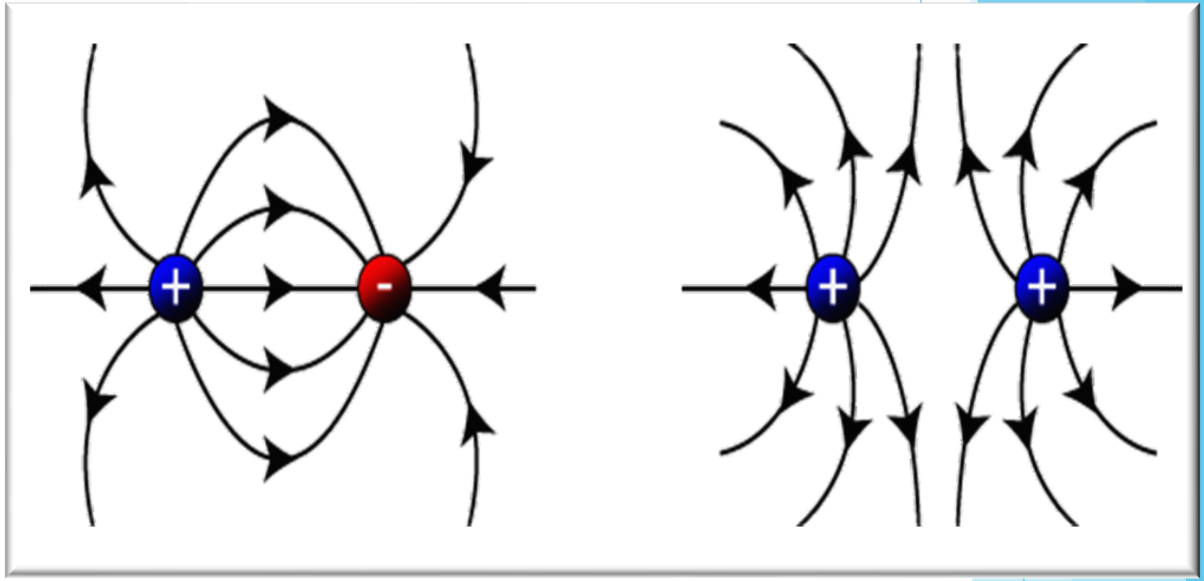


Ομογενές Πεδίο

- ✓ **Οι γραμμές ενός πεδίου έχουν αρχή (ή τέλος) την πηγή παραγωγής του πεδίου.**
- ✓ **Το διάνυσμα της έντασης του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της γραμμής.**
- ✓ **Οι γραμμές δεν τέμνονται.**
- ✓ **Είναι ανοικτές (υπάρχουν και κλειστές;).**
- ✓ **Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου στο χώρο αυτό.**

Η Έννοια των Γραμμών του Πεδίου





- ✓ Οι γραμμές ενός πεδίου έχουν αρχή (ή τέλος) την πηγή παραγωγής του πεδίου.
- ✓ Το διάνυσμα της έντασης του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της γραμμής.
- ✓ Οι γραμμές δεν τέμνονται.
- ✓ Είναι ανοικτές **(υπάρχουν και κλειστές;)**.
- ✓ Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου στο χώρο αυτό.

Προβλήματα υπολογισμού έντασης Πεδίου από διακριτές πηγές

Διακριτές πηγές του πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Μία Πηγή

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Δύο ή περισσότερες Πηγές

$$g_1 = G\frac{M_1}{r_1^2}$$

$$g_2 = G\frac{M_2}{r_2^2}$$

Διανυσματικό άθροισμα

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots$$

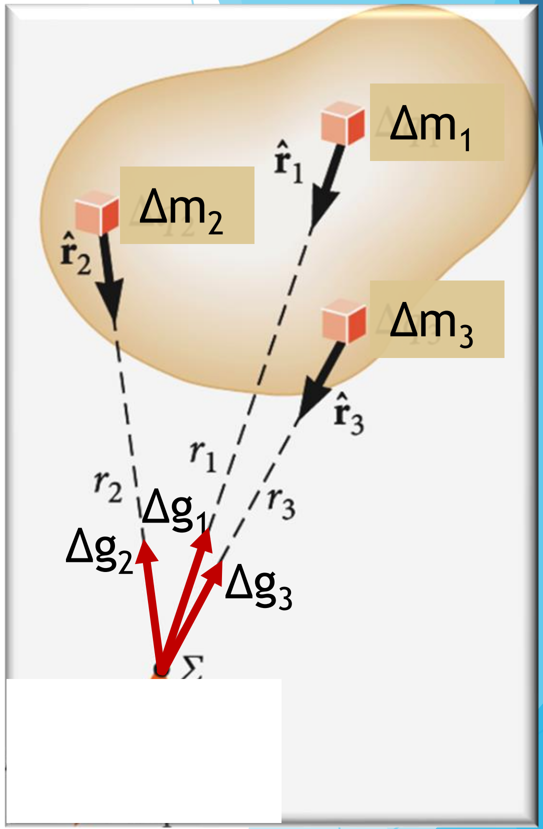
G = 6.673x10^{-11} m^{3}Kg^{-1}s^{-2}

Συνεχείς κατανομές πηγών του πεδίου

Συνεχείς Κατανομές πηγών του πεδίου

Μεθοδολογία:

- Διαιρούμε την κατανομή μάζας σε στοιχειώδεις μάζες, κάθε μια από τις οποίες έχει μάζα dm.
- Υπολογίζουμε το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί κάθε μια από αυτές τις στοιχειώδεις μάζες στο σημείο Σ.
- Υπολογίζουμε το συνολικό πεδίο αθροίζοντας τις συνεισφορές όλων των στοιχειωδών μαζών.



Βαρυτικό Πεδίο

Πάρα πολλές….
(Συνεχής Κατανομή)

$$\vec{g} = G\int \frac{dm}{r^2}\hat{r}$$

G = 6.673x10^{-11} m^{3}Kg^{-1}s^{-2}

Συνεχείς Κατανομές πηγών του πεδίου

Βαρυτικό Πεδίο

Γραμμική ομοιόμορφη κατανομή

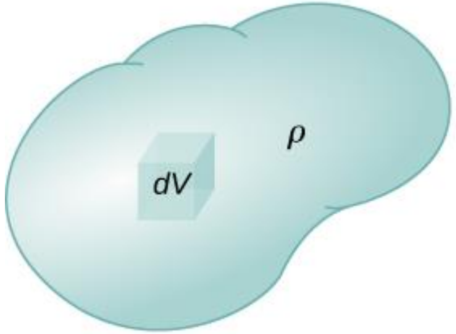
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}}$$

Επιφανειακή ομοιόμορφη κατανομή

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{S_{(\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o})}}$$

Χωρική ομοιόμορφη κατανομή

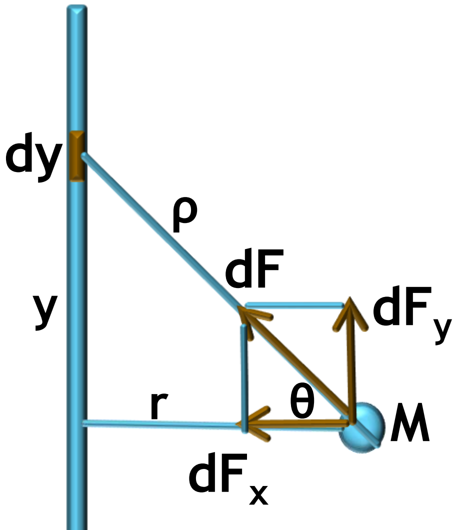
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V_{(\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma)}}$$

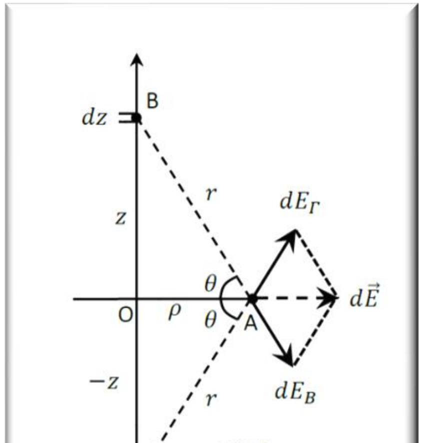


Μη ομοιόμορφη κατανομή:

ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΜΑΖΑΣ

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου - Συνεχείς Κατανομές Πηγών





β) Σύστημα συντεταγμένων σε πλάγια όψη

Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί λεπτή ομογενής ευθύγραμμη ράβδος με σταθερή γραμμική πυκνότητα μάζας, λ, σε σωμάτιο μάζας M που βρίσκεται σε απόσταση r από τη ράβδο. Η ράβδος εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δυο της κατευθύνσεις.

Λύση

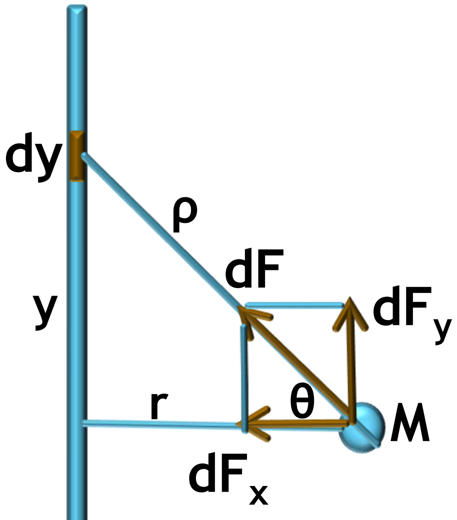
Η δύναμη είναι ελκτική και για λόγους συμμετρίας κατευθύνεται κάθετα προς τη ράβδο. Η στοιχειώδης μάζα $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}y$ ασκεί στη μάζα M τη στοιχειώδη δύναμη $\mathrm{d}\vec{F}$. Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

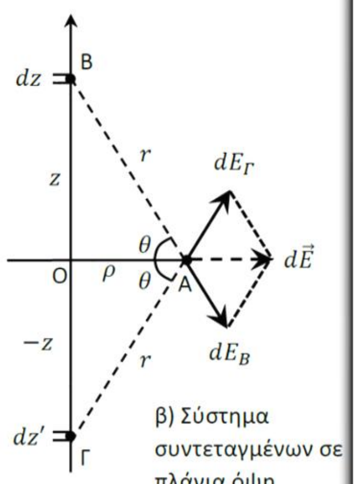
$$\mathrm{d}F = GM\frac{\mathrm{d}m}{\rho^2} = GM\frac{\lambda\, dy}{\rho^2}.$$

Επειδή δεν υπάρχει συνιστώσα δύναμης παράλληλη στη ράβδο, για τις απόλυτες τιμές ισχύει $F = F_x$. Επομένως θα υπολογίσομε το μέτρο (απόλυτη τιμή) της προβολής της δύναμης.

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου - Συνεχείς Κατανομές Πηγών

Συνέχεια…..





β) Σύστημα συντεταγμένων σε πλάγια όψη

Για τη στοιχειώδη προβολή ισχύει

$$dF_x = dF\cos\theta = GM\lambda\frac{dy}{\rho^2}\cos\theta\ ,\ \text{όμως}\ \tan\theta = \frac{y}{r},\ \ dy = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta,\ \ \rho = r/\cos\theta\,.$$

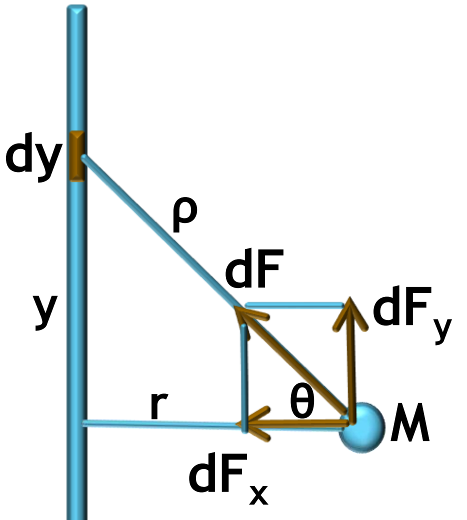
$dF_x = \dfrac{GM\lambda}{r}\cos\theta d\theta$. Επειδή υπάρχει συμμετρία, η δύναμη που ασκεί το κάτω μισό της ράβδου είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το πάνω μισό, έτσι ολοκληρώνομε από $\theta = 0$ μέχρι $\theta = \pi/2$ και έχομε

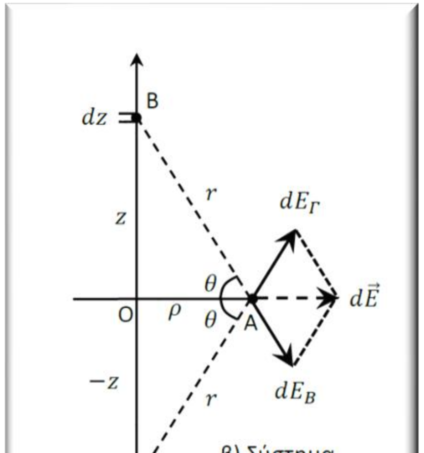
$$F = F_x = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^1 d(\sin\theta)$$

άρα $F = 2\dfrac{GM\lambda}{r}$.

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου - Συνεχείς Κατανομές Πηγών

Συνέχεια…..





β) Σύστημα συντεταγμένων σε πλάγια όψη

Για τη στοιχειώδη προβολή ισχύει

$$dF_x = dF\cos\theta = GM\lambda\frac{dy}{\rho^2}\cos\theta\text{, όμως } \tan\theta = \frac{y}{r},\quad dy = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta,\ \rho = r/\cos\theta.$$

$dF_x = \dfrac{GM\lambda}{r}\cos\theta d\theta$. Επειδή υπάρχει συμμετρία, η δύναμη που ασκεί το κάτω μισό της ράβδου είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το πάνω μισό, έτσι ολοκληρώνομε από $\theta = 0$ μέχρι $\theta = \pi/2$ και έχομε

$$F = F_x = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^1 d(\sin\theta)$$

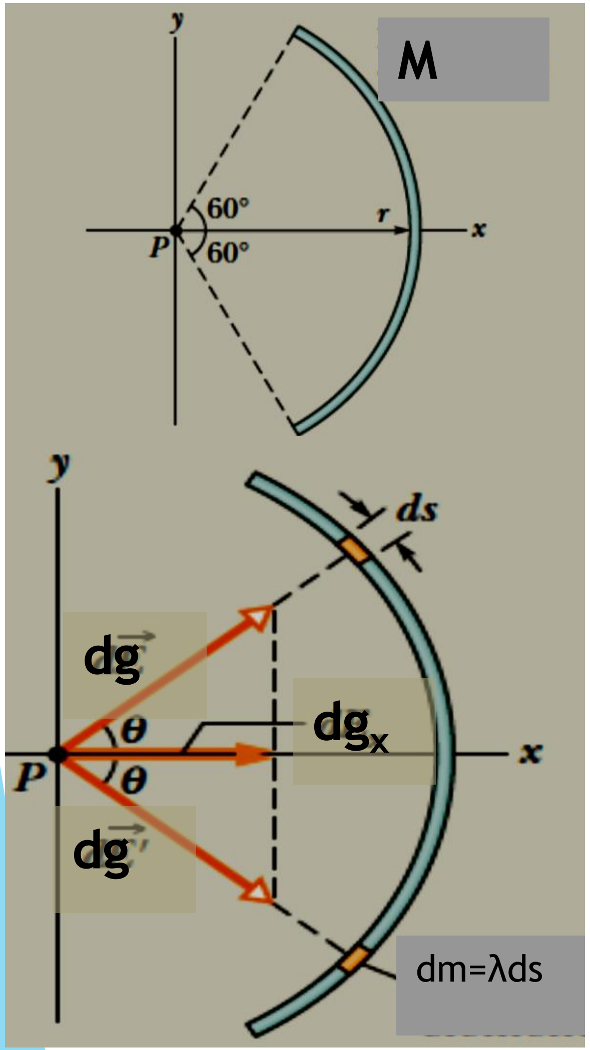
άρα $F = 2\dfrac{GM\lambda}{r}$.

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης-Πεδίου Συνεχείς Κατανομές

Δίνεται η ομοιόμορφη γραμμική κατανομή μάζας M και ακτίνας R όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου στο σημείο P.

Λύση



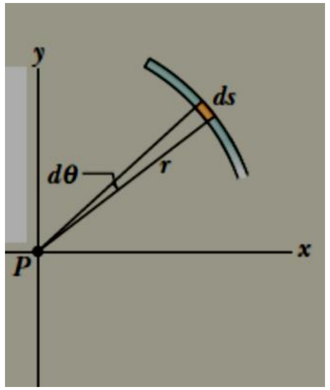
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{2\pi R/3} = \frac{3M}{2\pi R}$$

$$dg = G\frac{dm}{r^2}$$

$$dg_x = G\frac{dm}{R^2}\cos\vartheta \Rightarrow dg_x = G\frac{\lambda ds}{R^2}\cos\theta \Rightarrow dg_x = G\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\cos\theta \Rightarrow dg_x = G\frac{\lambda}{R}\cos\theta d\theta$$

$$\int dg_x = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} G\frac{\lambda}{R}\cos\theta d\theta \Rightarrow g_x = G\frac{\lambda}{R}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\theta d\theta \Rightarrow g_x = G\frac{\lambda}{R}\sin\theta\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} \Rightarrow g_x = G\frac{\lambda}{R}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow$$

$$g_x = G\frac{\lambda}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow g_x = \sqrt{3}G\frac{\lambda}{R} \Rightarrow g_x = \sqrt{3}G\frac{1}{R}\frac{3M}{2\pi R} \Rightarrow g_x = \frac{3\sqrt{3}GM}{2\pi R^2}$$



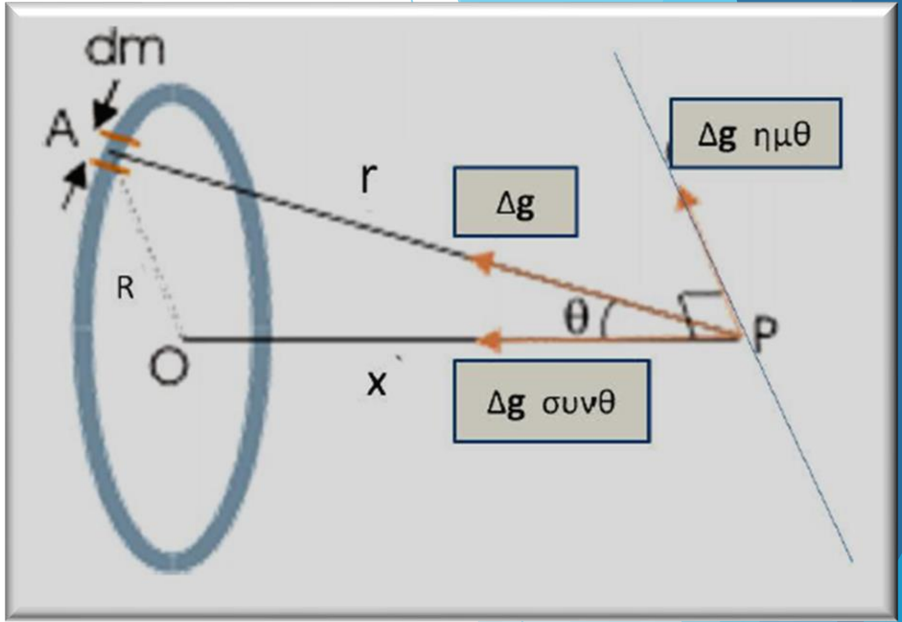
$$\boxed{\vec{g} = g_x\hat{i} = \frac{3\sqrt{3}GM}{2\pi R^2}\hat{i}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομοιόμορφη κατανομή μάζας Μ σε σχήμα δακτυλίου ακτίνας α. Να υπολογίσετε την ένταση του Βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δακτυλίου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση

$$g = G\int \frac{dm}{r^2}$$



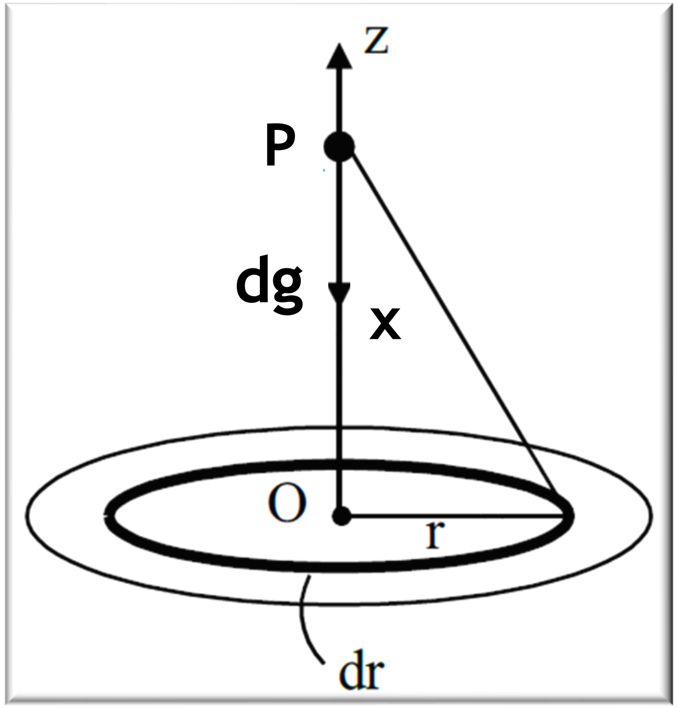
$$g = G\int \frac{dm}{r^2} \Rightarrow g_x = G\int \frac{dm}{r^2}\cos\theta \Rightarrow g_x = G\int \frac{dm}{R^2 + x^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$g_x = \frac{G}{R^2 + x^2}\frac{x}{r}\int dm \Rightarrow g_x = \frac{G}{R^2 + x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\int dm \Rightarrow g_x = \frac{MGx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση



$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$

Ο δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως μία **επαλληλία** από δακτυλίους ακτίνας r. Αλλά για το δακτύλιο έχουμε ήδη υπολογίσει την ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί στο σημείο P.

$$g = \frac{GMx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Άρα κάθε δακτύλιος συνεισφέρει στην ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί ο δίσκος κατά:

$$dg = \frac{Gdmx}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow dg = \frac{G\sigma 2\pi rxdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

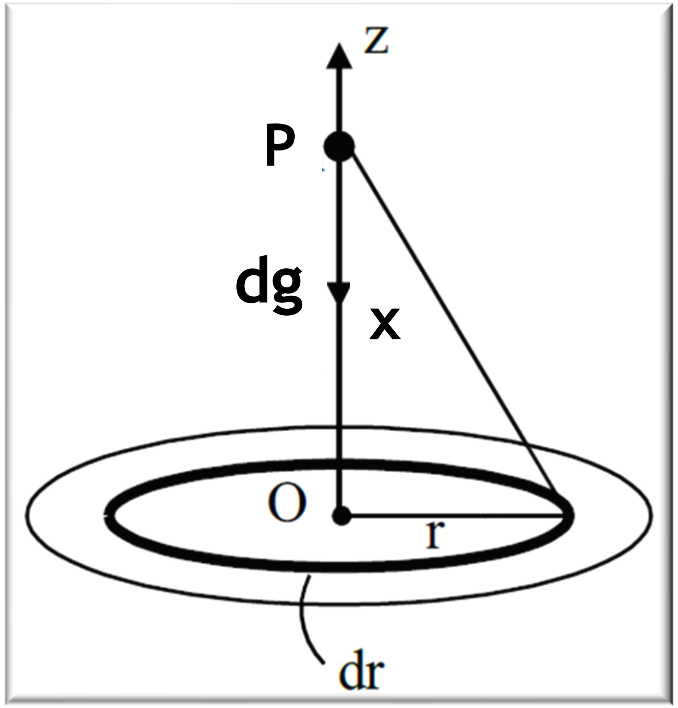
Επομένως:

$$g = \int dg = \int_0^R \frac{G\sigma 2\pi rxdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow g = \pi G\sigma x \int_0^R \frac{2rdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση-Συνέχεια…



$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$g = \int dg = \int_0^R \frac{G\sigma 2\pi r x dr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow g = \pi G\sigma x \int_0^R \frac{2rdr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Θέτουμε: $z = r^2 + x^2 \Rightarrow dz = 2rdr$

$$g = \pi G\sigma x \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{dz}{(z)^{3/2}} \Rightarrow g = \pi G\sigma x \int_{x^2}^{x^2+R^2} z^{-3/2} dz \Rightarrow g = \pi G\sigma x \left. \frac{z^{-1/2}}{-1/2} \right|_{x^2}^{x^2+R^2} \Rightarrow$$

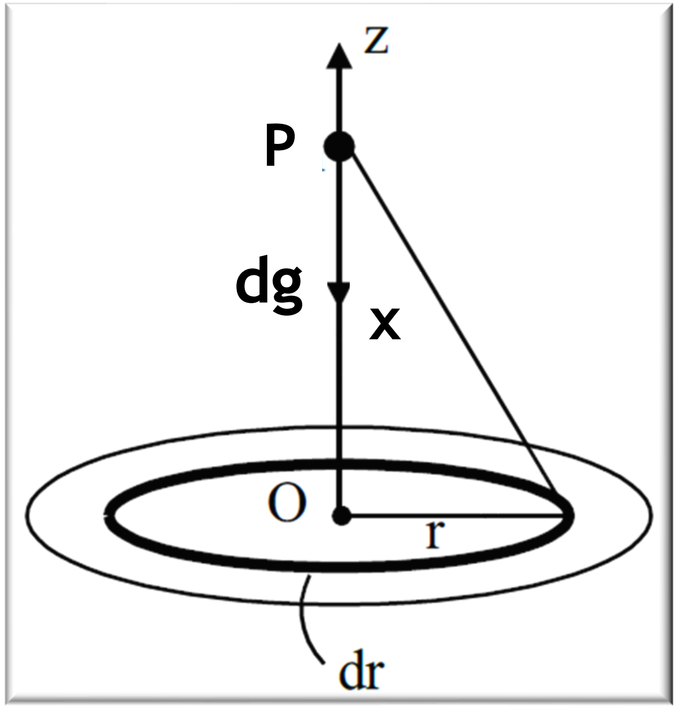
$$g = -2\pi G\sigma x \left. z^{-1/2} \right|_{x^2}^{x^2+R^2} \Rightarrow g = -2\pi G\sigma x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) \Rightarrow$$

$$g = 2\pi G \frac{M}{\pi R^2} x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \Rightarrow \boxed{g = \frac{2GM}{R^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Έντασης Πεδίου

Δίδεται ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M. Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου g σε σημείο P επάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από αυτόν.

Λύση-Συνέχεια…



$$g = \frac{2GM}{R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα R του δίσκου είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση x . Αυτό σημαίνει ότι η επιφάνεια του δίσκου εκτείνεται στο άπειρο. Τότε:

$$g = \frac{2GM}{R^2}\left(1 - \cancelto{0}{\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}}\right) \quad g = \frac{2G\sigma\pi R^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{g = 2G\pi\sigma}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$

Επομένως το πεδίο είναι ομογενές.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ομογενής επιφανειακή κατανομή μάζας απείρων διαστάσεων δημιουργεί ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΕΔΙΟ.

Ευχαριστώ

Καλό διάβασμα…