Μηχανική - Ρευστομηχανική

Timeo hominem unius libri.

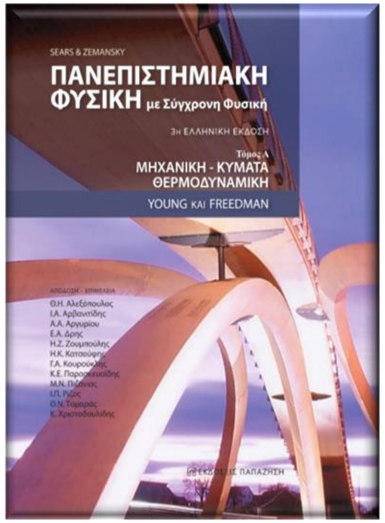
Thomas Acquinas

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

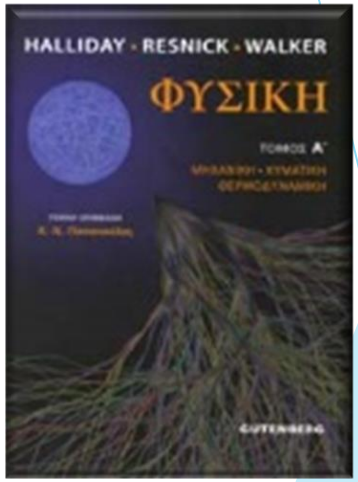
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Sears & Zemansky, Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, Τόμος Α, Μηχανική-Κύματα, Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

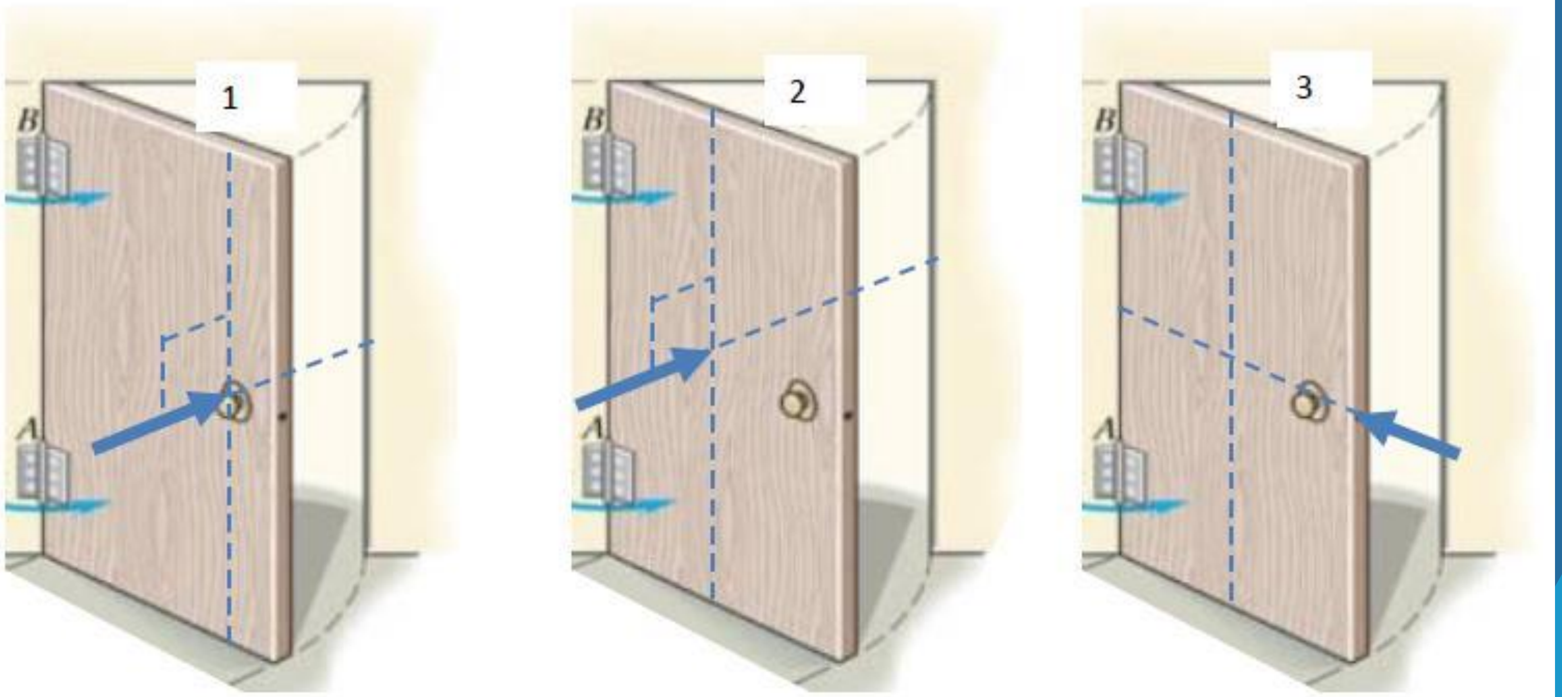
Η Έννοια της Μηχανικής ροπής $\vec{\tau}$

Ποιό είναι το αποτέλεσμα μιας δύναμης F:

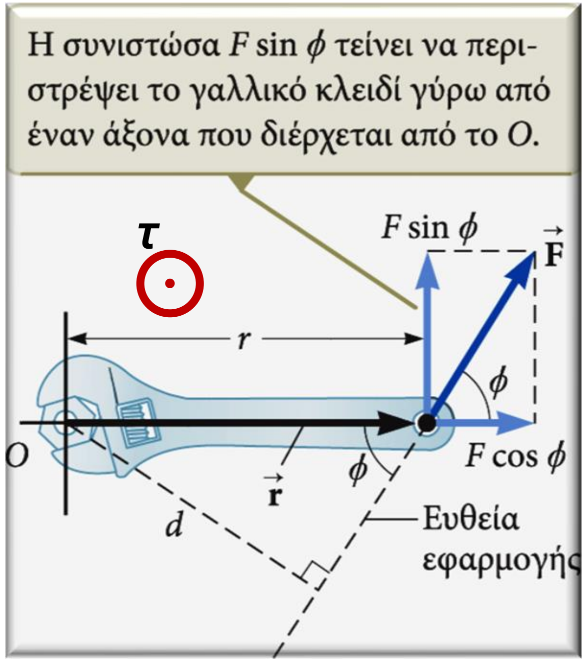
- *Ανάλογα με το μέτρο της δύναμης?*

- *Ανάλογα με την απόσταση από από τον άξονα περιστροφής?*

- *Ανάλογα με τη διεύθυνση της δύναμης ως προς τη διεύθυνση της απόστασης?*



Μηχανική Ροπή



- Η μηχανική ροπή ορίζεται ως ένα διάνυσμα.
- Η μηχανική ροπή που ασκείται σε ένα σώμα δεν έχει μοναδική τιμή. Η τιμή της εξαρτάται από την επιλογή του άξονα περιστροφής.
- Η συνιστώσα της δύναμης κατά τη διεύθυνση της καθέτου στον άξονα (*F* cos *ϕ*) δεν τείνει να προκαλέσει περιστροφή.

$$\vec{\tau} = \vec{r} x \vec{F}$$

Η μονάδα SI της ροπής είναι το N·m.

Η διεύθυνση και η φορά του διανύσματος της μηχανικής ροπής καθορίζονται από το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων. Επομένως βρίσκουμε τη διεύθυνση και τη φορά με την εφαρμογή του κανόνα του δεξιού χεριού.

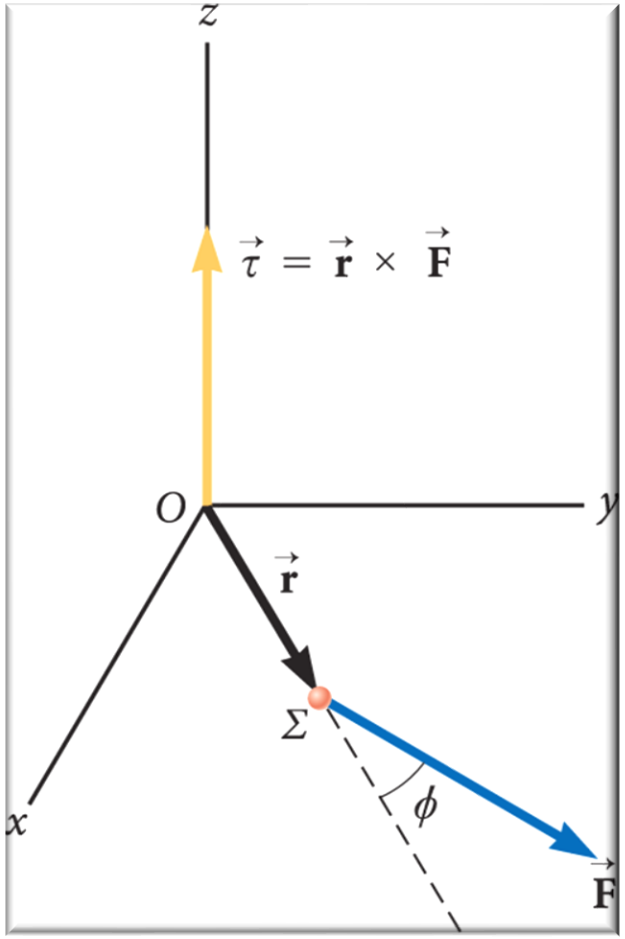
Ροπή *και* δύναμη

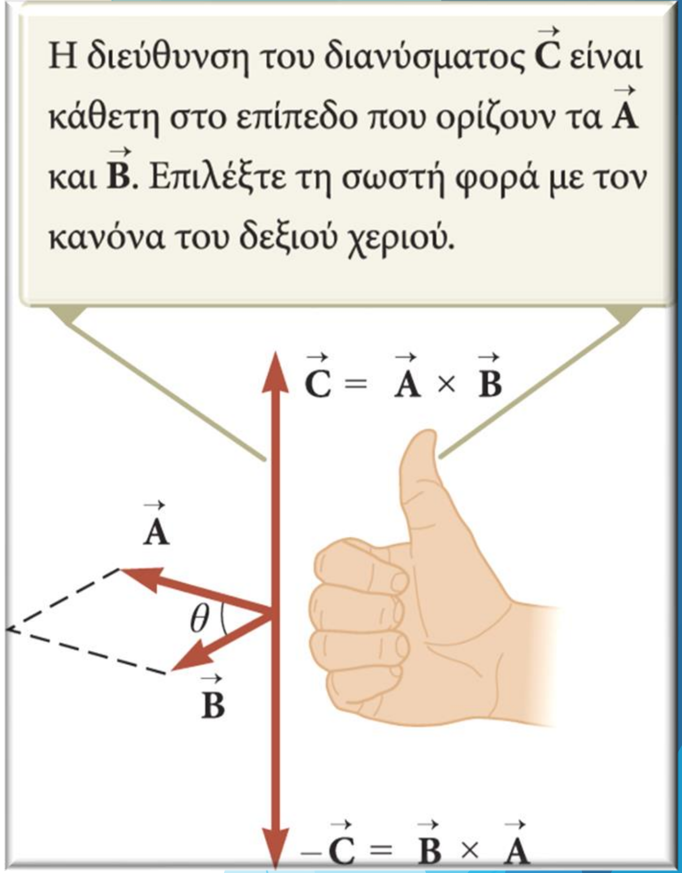
Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στη μεταφορική κίνηση. Η μεταβολή αυτή περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στην περιστροφική κίνηση. Η μεταβολή της περιστροφικής κίνησης εξαρτάται από τη μηχανική ροπή των δυνάμεων.

Μηχανική ροπή

- Η διεύθυνση του διανύσματος της μηχανικής ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα της θέσης και το διάνυσμα της δύναμης
- $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$
- Η μηχανική ροπή είναι το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων της θέσης και της δύναμης.
- Μέτρο τ=F r sinφ
- Διεύθυνση και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

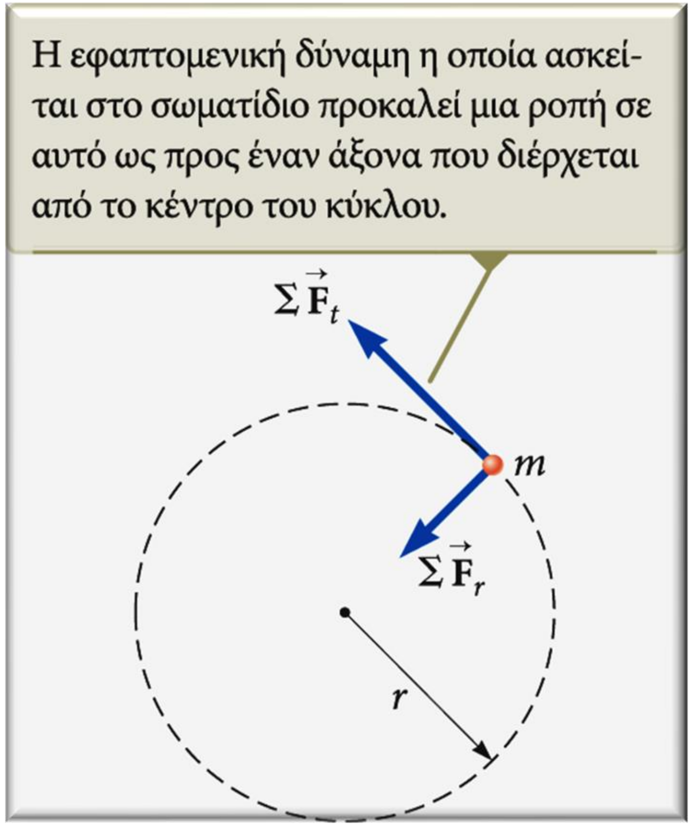




$$\vec{\mathbf{F}} = (2.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\,\hat{\mathbf{j}})\,N$$
$$\vec{\mathbf{r}} = (4.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00\,\hat{\mathbf{j}})\,m$$
$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0$$
$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$
$$\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\mathrm{N}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\mathrm{m}]$$
$$= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}$$
$$+(5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}$$
$$= 2.0\hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση



Σωματίδιο μάζας m διαγράφει κύκλο ακτίνας r υπό την επίδραση μιας εφαπτομενικής δύναμης.

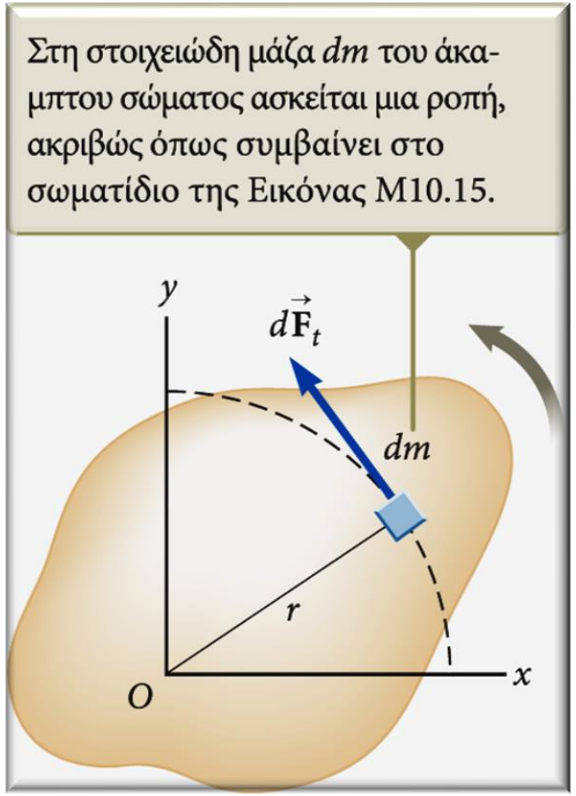
Η εφαπτομενική δύναμη προκαλεί εφαπτομενική επιτάχυνση:

$$F_t = ma_t$$

Η ακτινική δύναμη αναγκάζει το σωματίδιο να κινηθεί σε κυκλική τροχιά

- Το μέτρο της ροπής που προκαλεί η $\sum \vec{F}_t$ σε ένα σωματίδιο ως προς έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι
- $\Sigma\tau = \Sigma F_t\, r = (ma_t)r$
- Το μέτρο της εφαπτομενικής επιτάχυνσης συνδέεται με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης μέσω της σχέσης $\alpha_t = r\alpha_{\gamma\omega\nu.}$
  - $\Sigma\tau = (ma_t)r = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha_{\gamma\omega\nu.}$
- Εφόσον mr^2 είναι η ροπή αδράνειας του σωματιδίου,
  - $\boxed{\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu.}}$
- Το μέτρο της ροπής είναι ανάλογο προς το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης και η σταθερά αναλογίας είναι η ροπή αδράνειας.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση

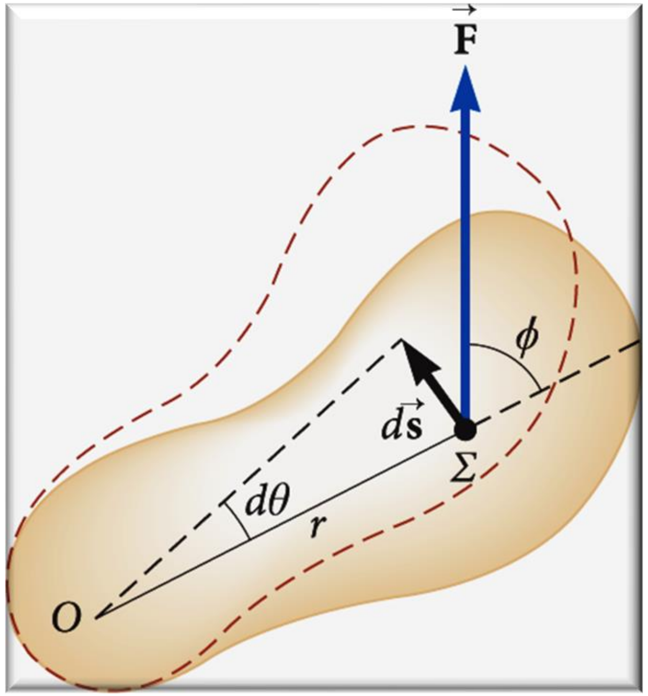


- Θεωρήστε ότι το σώμα αποτελείται από άπειρο πλήθος στοιχείων μάζας *dm* με απειροστό μέγεθος.
- Κάθε στοιχείο μάζας διαγράφει κύκλο γύρω από την αρχή των συντεταγμένων *O*.
- Κάθε στοιχείο μάζας έχει εφαπτομενική επιτάχυνση.
- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα
  - $dF_t = (dm)a_t$
- Από τη ροπή που προκαλεί η δύναμη και από τη γωνιακή επιτάχυνση, προκύπτει ότι
  - $d\tau_{εξωτ.} = rdF_t = a_t r dm = a_{γων.} r^2 dm$

Η συνολική ροπή είναι $\sum \tau_{εξωτ.} = \int \alpha_{γων.} r^2 dm = \alpha_{γων.} \int r^2 dm$

Άρα: $\boxed{\sum \tau = I a_{γων.}}$

Το έργο στην περιστροφική κίνηση



- Το έργο που παράγει στο σώμα το διάνυσμα $\vec{F}$ καθώς το σώμα περιστρέφεται κατά απειροστή απόσταση $ds = r\,d\theta$.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s}$$
$$= (F\sin\phi)r\,d\theta = \tau d\theta$$

- Η ακτινική συνιστώσα της δύναμης δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη προς τη μετατόπιση.

$$\sum W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathrm{I}\alpha_{\gamma\omega\nu.}\, d\theta$$

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu.} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2}$$

$$\text{Ισχύς} = P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για την περιστροφική κίνηση, το συνολικό έργο που παράγεται από εξωτερικές δυνάμεις κατά την περιστροφή ενός συμμετρικού άκαμπτου σώματος γύρω από έναν σταθερό άξονα ισούται με τη μεταβολή στην ενέργεια περιστροφής του σώματος.

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, γενικά

- Συνδυάζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για την περιστροφική κίνηση με το αντίστοιχο θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για τη μεταφορική κίνηση, συμπεραίνουμε ότι το συνολικό έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή στη συνολική κινητική ενέργεια του σώματος, η οποία είναι ίση με το άθροισμα της μεταφορικής και της περιστροφικής κινητικής ενέργειάς του.

- Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: Αν το σύστημα είναι απομονωμένο και δε δρούν μη συντηρητικές δυνάμεις χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.3 *Χρήσιμες σχέσεις στην περιστροφική και στη μεταφορική κίνηση*

Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα		**Μεταφορική κίνηση**	
Μέτρο γωνιακής ταχύτητας $\omega = d\theta/dt$		Μέτρο μεταφορικής ταχύτητας $v = dx/dt$	
Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha = d\omega/dt$		Μέτρο μεταφορικής επιτάχυνσης $a = dv/dt$	
Μέτρο συνισταμένης ροπής $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I\alpha$		Μέτρο συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = ma$	
Αν $\alpha =$ σταθερό	$\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Αν $a =$ σταθερό	$\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Έργο $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta$		Έργο $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$	
Κινητική ενέργεια $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$		Κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}mv^2$	
Ισχύς $P = \tau\omega$		Ισχύς $P = Fv$	
Στροφορμή $L = I\omega$		Ορμή $p = mv$	
Μέτρο συνισταμένης ροπής $\Sigma\tau = dL/dt$		Μέτρο συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = dp/dt$	

Παράδειγμα - 1 -

Να υπολογισθούν η γραμμική επιτάχυνση του αναρτημένου σώματος, η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και η τάση του νήματος.

Λύση

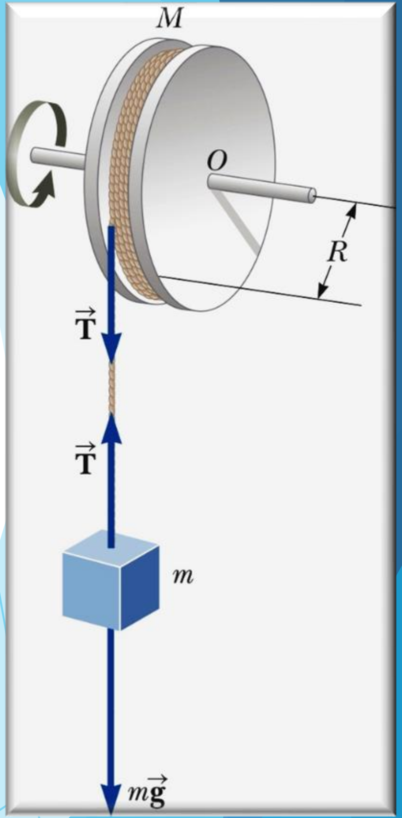
Εφόσον ο τροχός περιστρέφεται, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση

$$TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = I\frac{a}{R} \Rightarrow T = I\frac{a}{R^2}$$

Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη μάζα m.

$$mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma$$

$$I\frac{a}{R^2} = mg - ma \Rightarrow I\frac{a}{R^2} + ma = mg \Rightarrow a\left(\frac{I}{R^2} + m\right) = mg \Rightarrow a\left(\frac{I}{R^2} + m\right) = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + m} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g}{\frac{I}{mR^2} + 1}}$$



$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\frac{g}{\frac{I}{mR^2} + 1}}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g}{R + \frac{I}{mR}}}$$

$$T = I\frac{a}{R^2} \Rightarrow T = I\frac{\frac{g}{\frac{I}{mR^2} + 1}}{R^2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}}$$

Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ του σώματος όταν έχουν μετακινηθεί κατά h.

Παράδειγμα - 2 -

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 ($m_2>m_1$) είναι εξαρτημένα με αβαρές νήμα μέσω μιας τροχαλίας μάζας M και ακτίνας R. Να υπολογισθούν η γραμμική επιτάχυνση των σωμάτων, η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας καθώς και οι τάσεις T_1 κι T_2 στα δύο σκέλη του νήματος. Δίδεται η ροπή αδράνειας I της τροχαλίας.

Λύση

Μάζα m_1: $$m_1 g - T_1 = -m_1 \alpha$$

Μάζα m_2: $$m_2 g - T_2 = m_2 \alpha$$

Τροχαλία: $$(T_2 - T_1) R = I \alpha_{\gamma\omega\nu.}$$

Ισχύει επίσης: $$\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu.} R$$

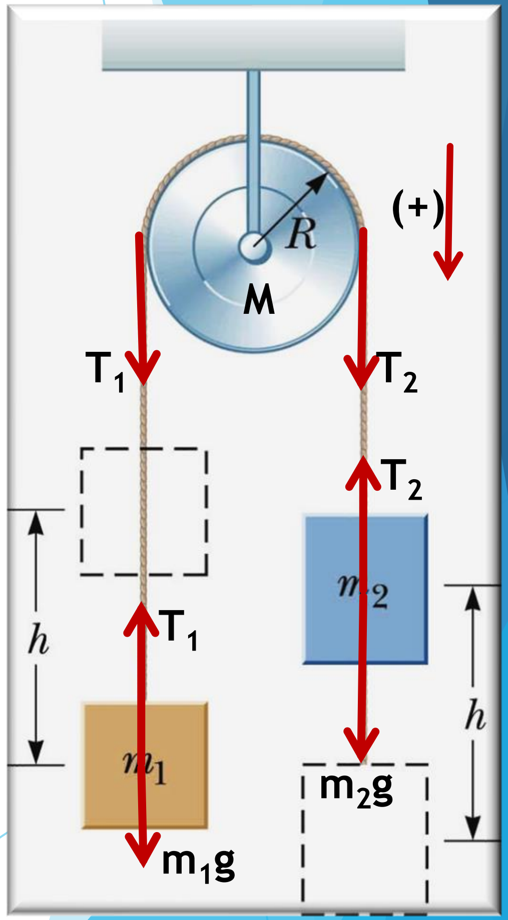
Επιλύουμε το σύστημα τεσσάρων εξισώσεων τεσσάρων αγνώστων.

$$\alpha = \frac{(m_2 - m_1) g R^2}{I + (m_1 + m_2) R^2}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{\alpha}{R} = \frac{(m_2 - m_1) g R}{I + (m_1 + m_2) R^2}$$

$$T_2 = m_2 (g - \alpha)$$

$$T_1 = m_1 (g + \alpha)$$



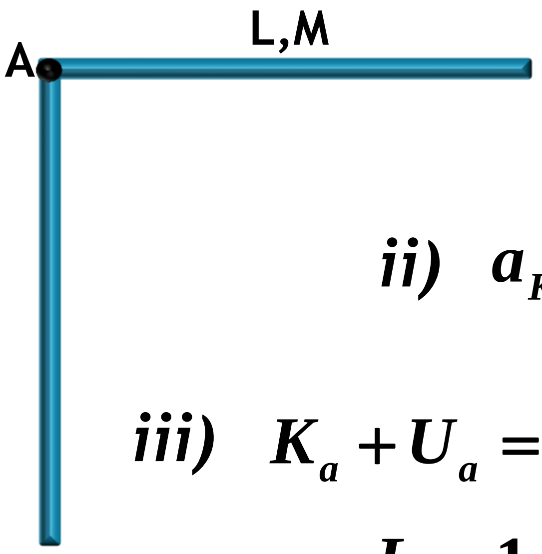
Τι συμβαίνει εάν η τροχαλία είναι ιδανική; (M=0 και I=0)

Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ των σωμάτων όταν έχουν μετακινηθεί κατά h.

Παράδειγμα - 3 -

Ευθύγραμμη ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας m βρίσκεται σε οριζόντια θέση όπως στο σχήμα. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη και περιστρέφεται κατακόρυφα γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Να υπολογίσετε: i) Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή που ξεκινάει την περιστροφή της, ii) Τη γραμμική επιτάχυνση του Κ.Μ της ράβδου και του δεξιού της άκρου την ίδια χρονική στιγμή, iii) τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου και τη γραμμική ταχύτητα του ΚΜ και του άκρου, όταν η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση και iv) τη γωνιακή επιτάχυνση και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία 45^o με την οριζόντια θέση. ($I_{ραβ.}=mL^2/3$).

Λύση



i) $$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L}}$$

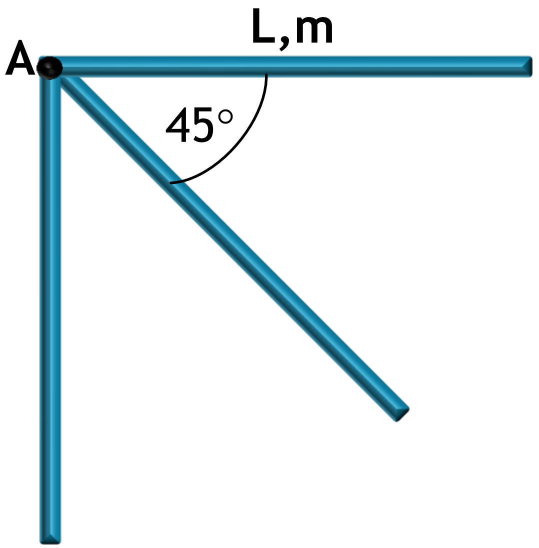
ii) $$a_{KM} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{L}{2} = \frac{3g}{4}, \quad a_A = \alpha_{\gamma\omega\nu}L = \frac{3g}{2}$$

iii) $$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \to mgL = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \to \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

$$\upsilon_{KM} = \omega\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}, \quad \upsilon_A = \omega L = \sqrt{3gL}$$

iv) τη γωνιακή επιτάχυνση και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία 45ᵒ με την οριζόντια θέση.



$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mg\cos\theta\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L}\cos 45°}$$

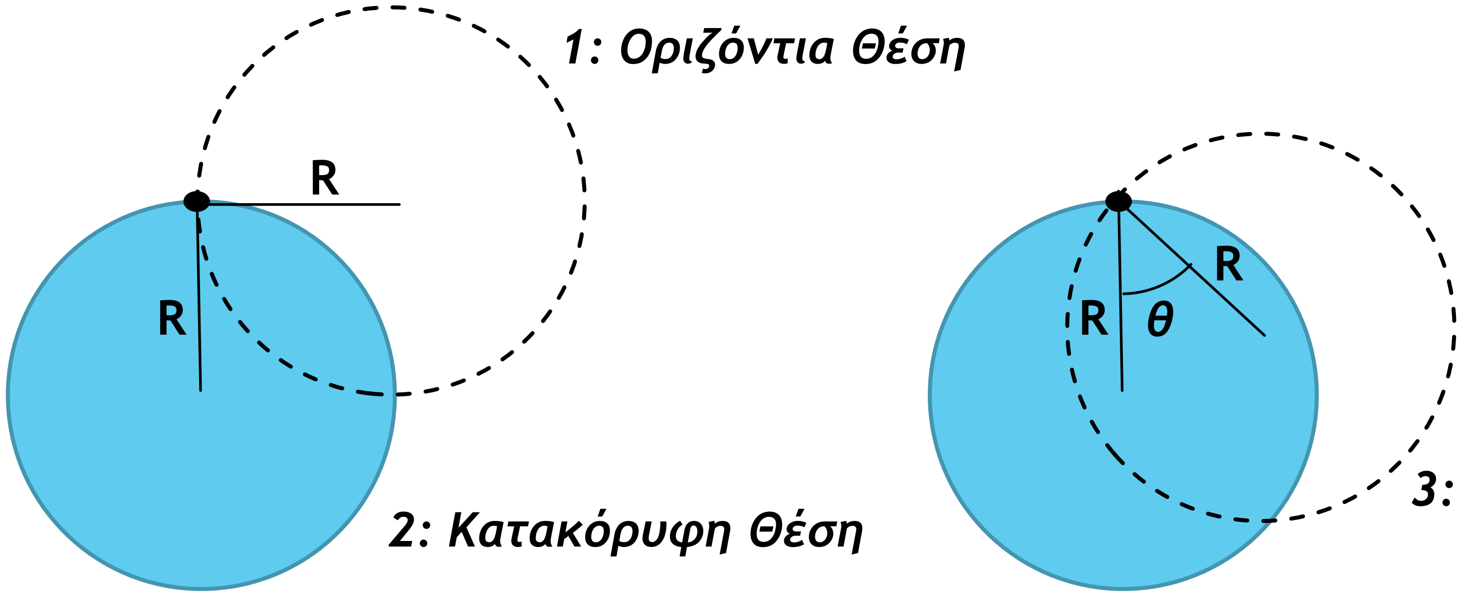
$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh \rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 + mg\frac{L}{2}(1-\sin\theta) \rightarrow$$

$$mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin 45°}}$$

Παράδειγμα - 4 -

Ομογενής κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας m βρίσκεται σε οριζόντια θέση όπως στο σχήμα. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη και περιστρέφεται κατακόρυφα γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο του. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση και τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν αυτός βρίσκεται στην τυχαία θέση. ($I_{KM}=MR^2/2$).



$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mg\sin\theta R = \frac{3}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g}{3R}\sin\theta$$

$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau$$

$$mgR = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh \rightarrow mgR = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\omega^2 + mgR(1-\cos\theta) \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}\cos\theta}$$

Ευχαριστώ

Καλό διάβασμα…