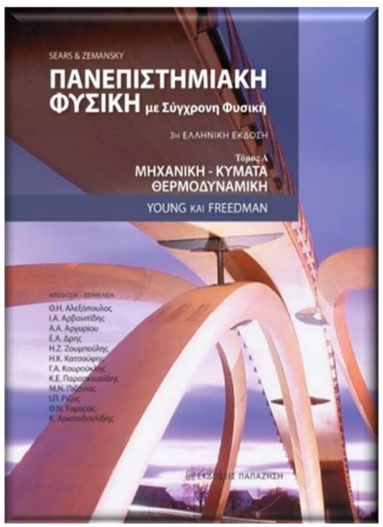
Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση

ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

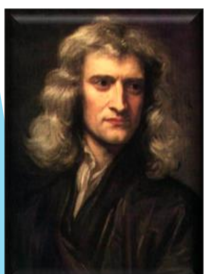
Φυσική (Κορωνίδα των Επιστημών)

Θεμελιώδης επιστήμη

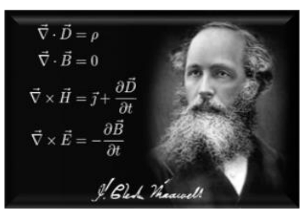
- Ασχολείται με τις βασικές αρχές του σύμπαντος.
- Αποτελεί τη βάση γι’ άλλες επιστήμες.
- Οι βασικές αρχές της είναι απλές.

Χωρίζεται σε πέντε βασικούς κλάδους

- Κλασική μηχανική
- Θερμοδυναμική
- Ηλεκτρομαγνητισμός
- Σχετικότητα
- Κβαντική μηχανική

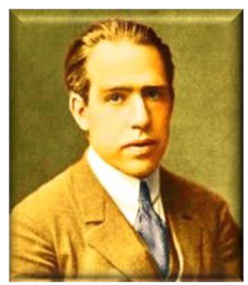


I. Newton
(1643 –1727)

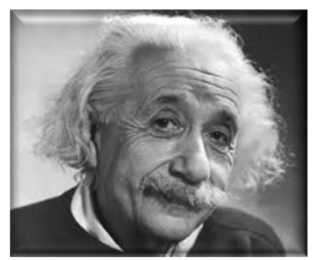


J. C. Maxwell
(1831 –1879)

M. Planck
(1858 –1947)
Nobel 1918



N. Bohr
(1885 –1962)
Nobel 1922



A. Einstein
(1879 –1955)
Nobel 1921

E. Schrödinger
(1887 –1961)
Nobel 1933

W. Heisenberg
(1901 –1976)
Nobel 1932

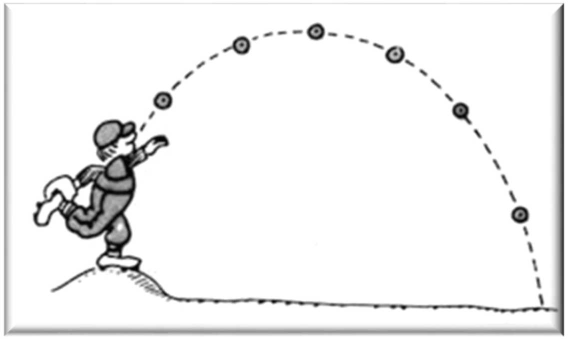
Κίνηση Υλικού σημείου

- **Προσέγγιση του υλικού σημείου.**

- **Ένα σώμα κινείται όταν αλλάζει θέσεις στο χώρο ως προς ένα σημείο αναφοράς το οποίο θεωρούμε ακίνητο.**

- **Ο γεωμετρικός τόπος των διαδοχικών θέσεων που καταλαμβάνει το κινητό ονομάζεται τροχιά του κινητού. (ευθύγραμμη, καμπυλόγραμμη).**

- **Η έννοια της κίνησης είναι πάντα σχετική.**



Ορίζουμε δύο νέα διανυσματικά μεγέθη για τη μελέτη της κίνησης.

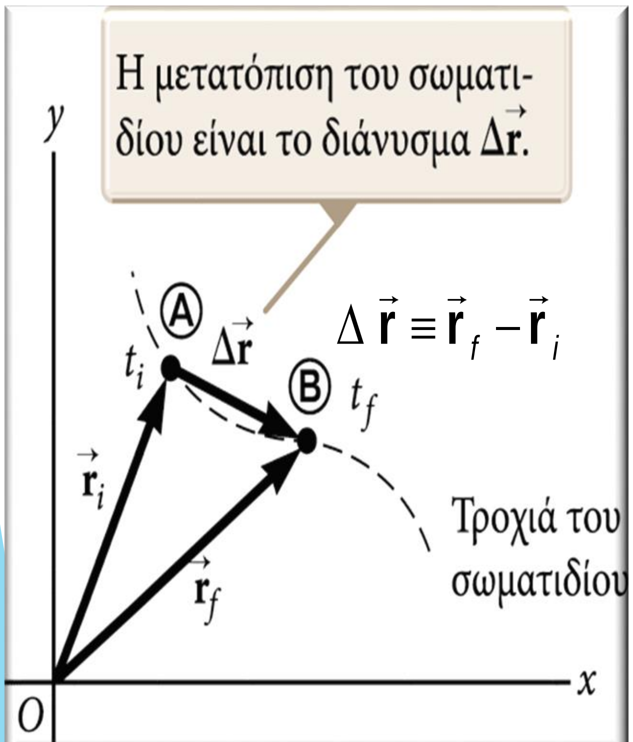
- ✓ **Ταχύτητα** $\vec{u}$ **(m/s)**
- ✓ **Επιτάχυνση** $\vec{a}$ **(m/s^2)**

Κίνηση Υλικού σημείου

Θέση και μετατόπιση

▶Η θέση ενός σώματος περιγράφεται με το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}$.

▶Η μετατόπιση του σώματος ορίζεται ως η *μεταβολή της θέσης του*.



Μέση και στιγμιαία ταχύτητα

▶Η μέση ταχύτητα είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μετατόπιση.

$$\vec{v}_{μέση} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

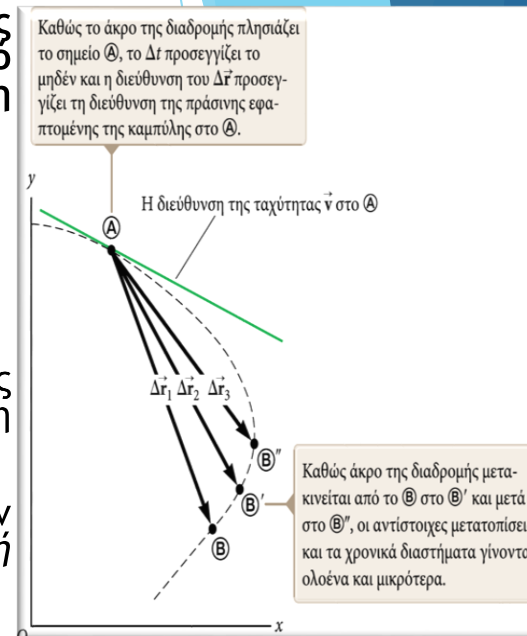
▶Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης ταχύτητας είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης.

▶Η μέση ταχύτητα μεταξύ σημείων είναι *ανεξάρτητη από τη διαδρομή* που ακολουθείται.

▶ Η στιγμιαία ταχύτητα είναι το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το Δ*t* τείνει στο μηδέν.

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \quad \textbf{(m/s)}$$

▶Το μέτρο του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας (speed) του σωματιδίου είναι βαθμωτό μέγεθος.

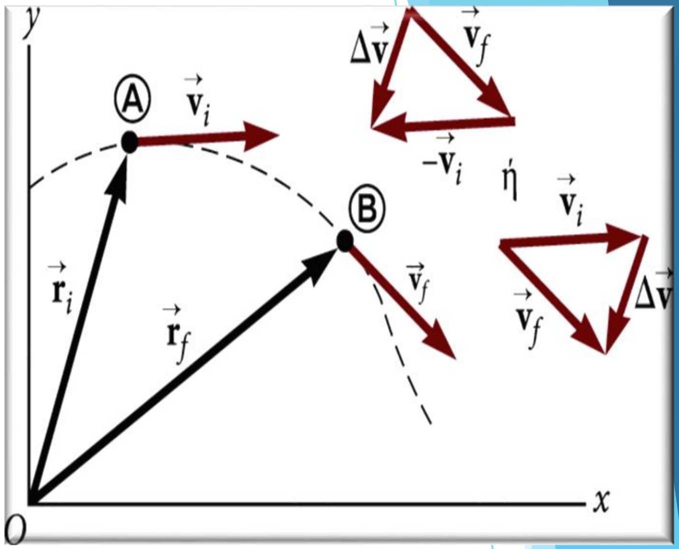


Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο και φορά ίδια με αυτή της κίνησης.

Κίνηση Υλικού σημείου

Μέση και στιγμιαία επιτάχυνση

- Η μέση επιτάχυνση ενός σωματιδίου ορίζεται ως η μεταβολή του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή αυτή.



$$\vec{a}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

- Η μέση επιτάχυνση είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει την κατεύθυνση της μεταβολής $\Delta \vec{v}$.

▶Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι το όριο του λόγου $\Delta \vec{v}/\Delta t$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν.

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \mathbf{(m/s^2)}$$

- Η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την παράγωγο του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο.

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

Έστω ένα μέγεθος y που εξαρτάται (μεταβάλλεται) συναρτήσει ενός άλλου μεγέθους x

$$y = f(x)$$

Ταχύτητα: $v = f(t)$

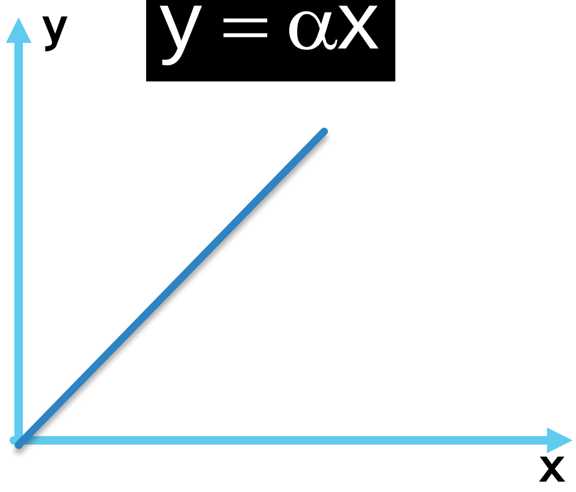
Επιτάχυνση: $\alpha = f(t)$

Βαρυτική δύναμη: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow F = f(r)$

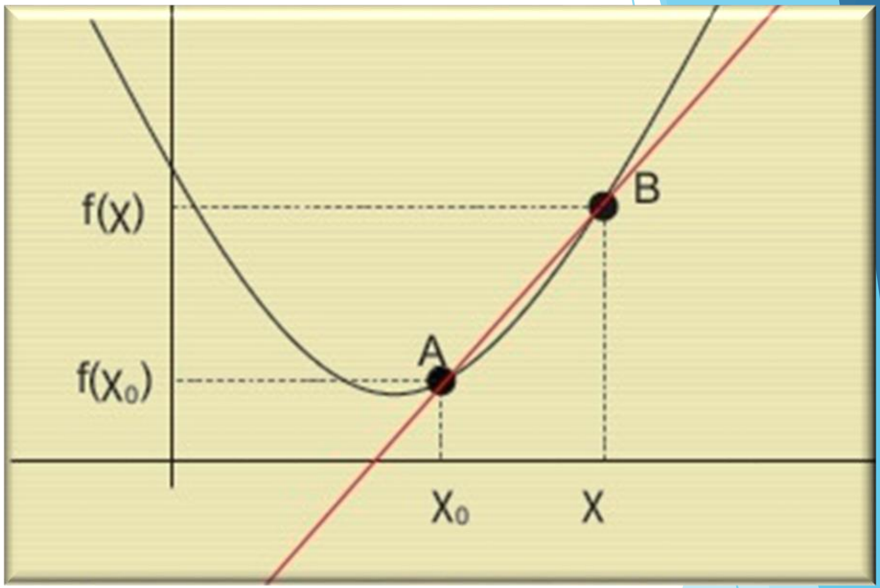
Δύναμη Laplace: $\vec{F}_L = I\vec{\ell} \times \vec{B}$

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός

Η έννοια της παραγώγου (derivative)



$$y = \alpha x$$

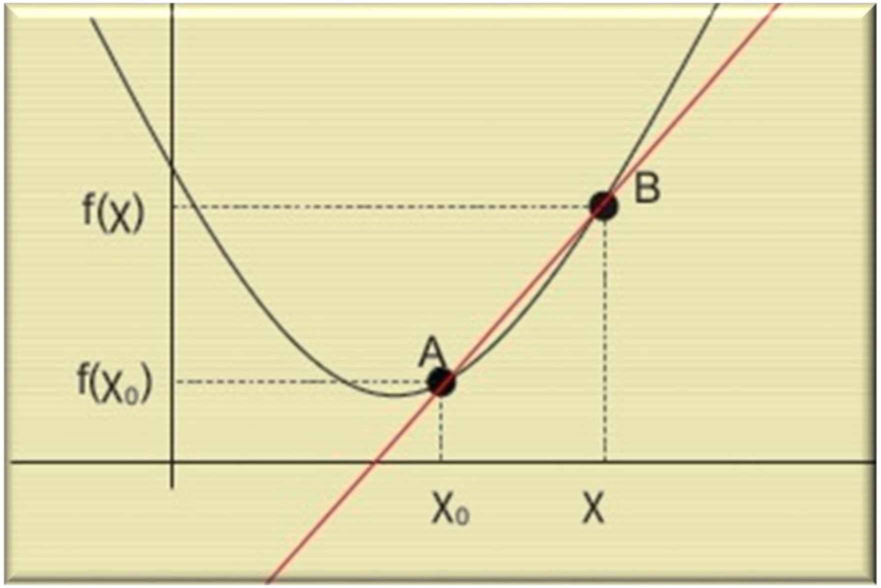


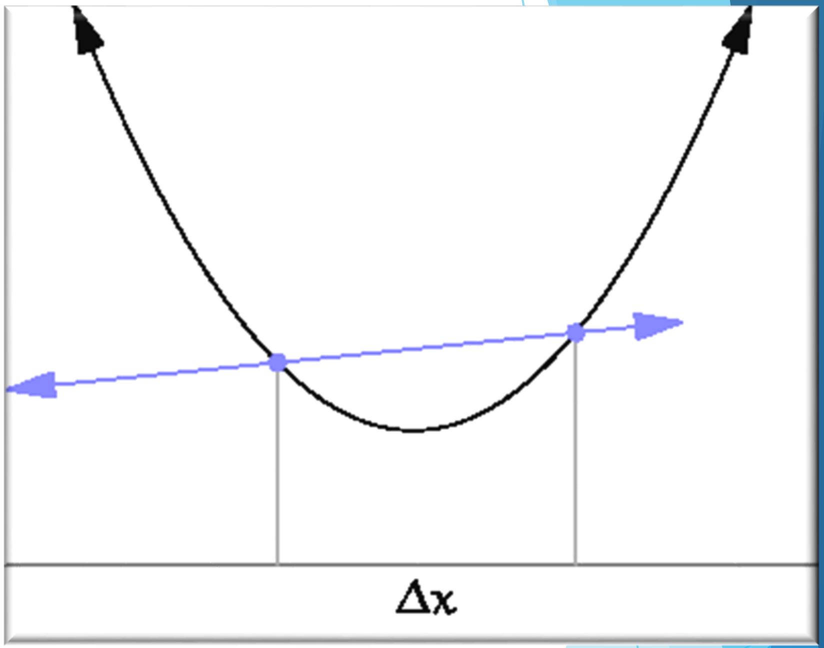
$$\text{Κλίση}: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$$

$$\text{Κλίση}: \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Η κλίση της ευθείας ΑΒ

Η έννοια της παραγώγου (derivative)





$$\text{Κλίση}: \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Η κλίση της ευθείας ΑΒ

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} = \frac{dy}{dx}$$

Η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

$\frac{dy}{dx}$ Παράγωγος της συνάρτησης y(x) ως προς x

Τί εκφράζει:

- Την κλίση της καμπύλης f(x) συναρτήσει του x σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο της

- Πόσο γρήγορα (ή αργά) μεταβάλλεται το μέγεθος y συναρτήσει του μεγέθους x

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	**Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων**
$(c)' = 0$	
$(x)' = 1$	
$(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}, \quad \nu \in N^*$	$([f(x)]^{\nu})' = \nu\,[f(x)]^{\nu-1}.f'(x)$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (για κάθε $x > 0$)	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) \quad f(x)>0$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\,\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\,\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x), \quad f(x) > 0$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$(\ln\lvert f(x)\rvert)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$
$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\varepsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$(\sigma\phi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln\alpha$	$\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x)$
	$\left([f(x)]^t\right)' = t[f(x)]^{t-1} \cdot f'(x)$

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

Κανόνες παραγώγισης

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x) \qquad (f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$g(f(x)) \quad = g'(f(x))\,f'(x)$$

$(sin3x)'=\cos 3x\,(3x)'=3\cos 3x$ **Σύνθετη συνάρτηση**

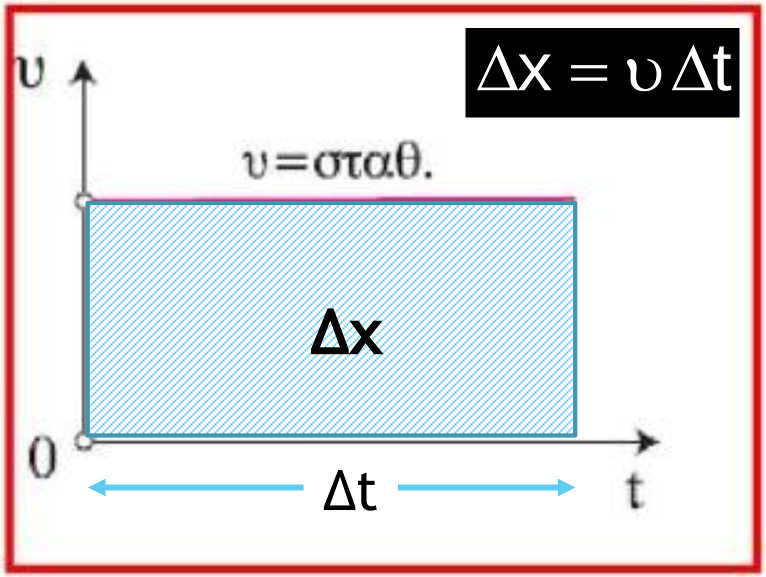
$(x^2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$ **Παραγώγιση Γινομένου**

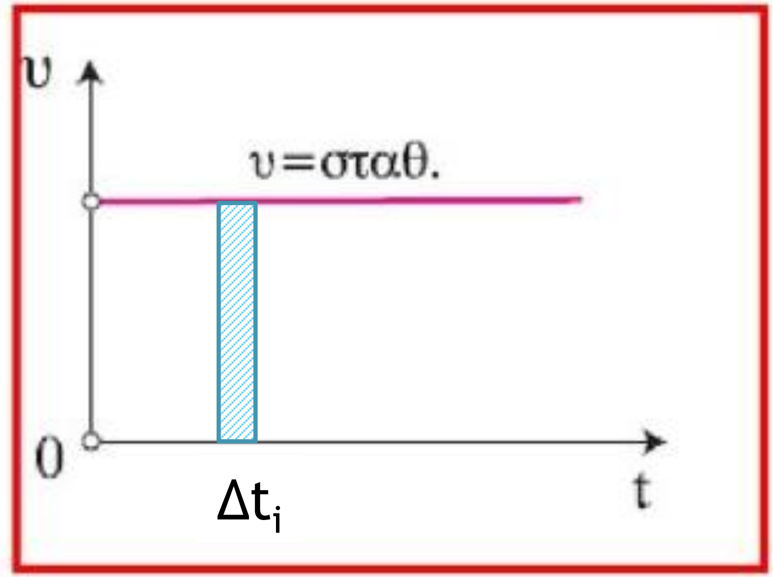
$$\left(\frac{sin\theta}{cos\theta}\right)'=\frac{(sin\theta)'cos\theta-sin\theta(cos\theta)'}{cos^2\theta}=$$

$$\frac{cos\theta * cos\theta + sin\theta * sin\theta}{cos^2\theta}=\frac{1}{cos^2\theta}$$

Παραγώγιση Πηλίκου

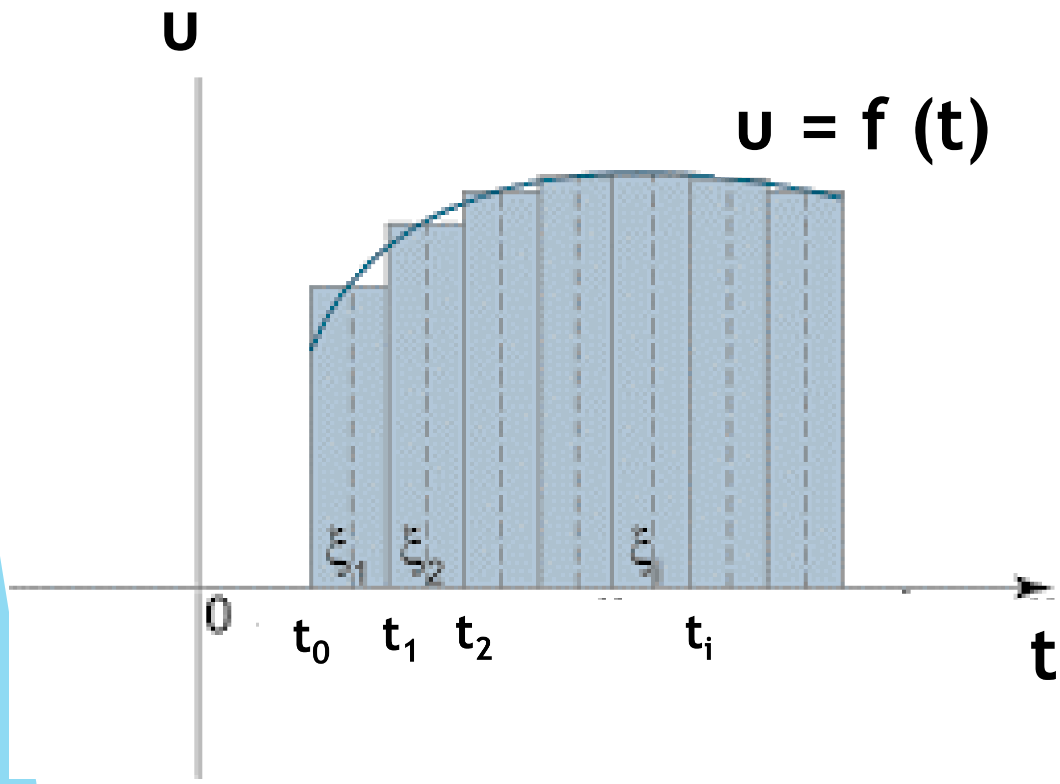
Η έννοια του ολοκληρώματος





$$\Delta x = \sum_i \upsilon \, \Delta t_i$$

Η έννοια του ολοκληρώματος



$$\Delta x = \sum_i \upsilon(t)\,\Delta t_i = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \upsilon(t)\,dt$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Βασικά Ολοκληρώματα

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

5. $\int e^{ax}\, dx = \dfrac{1}{a} e^{ax} + c$

6. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int x e^{ax}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + c$

8. $\int x^2 e^{ax}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) + c$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

$$\int e^x dx = e^x + \text{c}$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \text{c}$$

Βασικά Ολοκληρώματα

$\int sinxdx = -cosx$+c

$\int sin3xdx = -\frac{1}{3}cosx$+c

$\int cosxdx = sinx$+c

$\int cos3xdx = \frac{1}{3}sinx$+c

10. $$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c$$

11. $$\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c$$

12. $$\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\sin kx + c$$

13. $$\int \tan kx\, dx = -\frac{1}{k}\ln \cos kx + c$$

14. $$\int \cot kx\, dx = \frac{1}{k}\ln \sin kx + c$$

Κίνηση Υλικού σημείου

Ισχυρίζομαι ότι οποιοδήποτε πρόβλημα κίνησης ενός υλικού σημείου είναι πρόβλημα δύο εξισώσεων ορισμού.....

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

και… ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

- ✓ Που βρίσκεται το κινητό;
- ✓ Έχει ή δεν έχει αρχική ταχύτητα και εάν ναι πόση;
- ✓ Έχει ή δεν έχει επιτάχυνση α και εάν ναι πόση;

Μόνο με αυτές τις δύο εξισώσεις ορισμού και τις αρχικές συνθήκες μπορούμε να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα κίνησης όσο απλό ή όσο σύνθετο και να είναι… Χρειαζόμαστε μόνο λίγα μαθηματικά…

Κίνηση Υλικού σημείου

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Προβλήματα κίνησης σε μία διάσταση

- Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
- Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα
- Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα
- Ευθύγραμμη ομαλά “επιβραδυνόμενη” κίνηση
- Κατακόρυφη βολή προς τα επάνω
- Ελεύθερη πτώση
- Κατακόρυφη βολή προς τα κάτω
- Κίνηση με χρονικά μεταβαλλόμενη επιτάχυνση

Προβλήματα κίνησης σε δύο διαστάσεις

- Πλάγια βολή
- Ένα μυρμήγκι επάνω στο γραφείο σας…
- Κυκλική κίνηση

Προβλήματα κίνησης σε τρεις διαστάσεις

- Ένα κουνούπι στον αέρα…

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{t=0} = u_o \hat{\imath} \\ \vec{a} = 0 \end{cases}$$

Πρόκειται για κίνηση σε **μία διάσταση.** Επομένως:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = adt \Rightarrow \int_{u_o}^{V} du = \int_0^t adt \Rightarrow u|_{u_o}^{V} = 0 \Rightarrow V - u_o = 0 \Rightarrow$$

$V = u_o$ $\qquad$ $\vec{V} = u_0 \hat{\imath}$

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow u_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u_0\, dt \Rightarrow \int_0^X dx = \int_0^t u_0 dt \Rightarrow x|_0^X = u_0 t \Rightarrow X = u_0 t$$

$X = u_o t$ $\qquad$ $\vec{X} = u_0 t \hat{\imath}$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα

$$\boxed{\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}}$$

ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{t=0} = u_o\hat{\imath} \\ \vec{a} = \alpha\hat{\imath} \end{cases}$$

Πρόκειται για κίνηση σε **μία διάσταση** (**άξονας x**). Επομένως:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = adt \Rightarrow \int_{u_o}^{V} du = a\int_0^t dt \Rightarrow u|_{u_o}^{V} = at \Rightarrow$$

$$V - u_0 = \mathrm{at} \Rightarrow V = u_0 + \mathrm{at}$$

$$\boxed{V = u_o + at}$$

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow u_0 + \mathrm{at} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = (u_0 + at)\ dt \Rightarrow$$

$$\int_0^X dx = \int_0^t (u_0 + at)dt \Rightarrow x\Big|_0^X = \int_0^t (u_0 + at)dt \Rightarrow$$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα Συνέχεια…

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{t=0} = u_o\hat{\imath} \\ \vec{a} = \alpha\hat{\imath} \end{cases}$$

Πρόκειται για κίνηση σε **μία διάσταση** (**άξονας x**). Επομένως:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = adt \Rightarrow \int_{u_o}^{V} du = a\int_0^t dt \Rightarrow u|_{u_o}^{V} = at \Rightarrow$$

$$V - u_0 = \mathrm{at} \Rightarrow V = u_0 + \mathrm{at}$$

$$\boxed{\mathrm{V} = \mathrm{u_o} + \alpha\mathrm{t}}$$

$$\boxed{\vec{V} = (u_0 + at)\hat{\imath}}$$

$$\ldots x|_0^X = \int_0^t (u_0 + at)dt \Rightarrow X = \int_0^t u_0 dt + \int_0^t atdt \Rightarrow X = u_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\boxed{\mathrm{X} = u_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

$$\boxed{\vec{X} = \left(u_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)\hat{\imath}}$$

Κατακόρυφη βολή προς τα επάνω

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{t=0} = u_o\hat{j} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$

Πρόκειται για κίνηση σε **μία διάσταση** (άξονας y). Επομένως:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = -gdt \Rightarrow \int_{u_o}^{V} du = -g\int_0^t dt \Rightarrow u|_{u_o}^{V} = -gt \Rightarrow$$

$$V - u_0 = \text{-gt} \Rightarrow V = u_0 \text{ -gt}$$

$$\boxed{\mathrm{V = u_o - gt}}$$ και $$\boxed{\vec{V} = (u_0 - gt)\hat{j}}$$

$$u = \frac{dy}{dt} \Rightarrow V = \frac{dy}{dt} \Rightarrow u_0 - \text{gt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = (u_0 - gt)\ dt \Rightarrow$$

$$\int_0^Y dy = \int_0^t (u_0 - gt)dt \Rightarrow y\Big|_0^Y = \int_0^t (u_0 - gt)dt \Rightarrow$$

Κατακόρυφη βολή προς τα επάνω

Συνέχεια…

ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{t=0} = u_o\hat{j} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Πρόκειται για κίνηση σε **μία διάσταση** (άξονας y). Επομένως:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = -gdt \Rightarrow \int_{u_o}^{V} du = -g\int_0^t dt \Rightarrow u|_{u_o}^{V} = -gt \Rightarrow$$

$$V - u_0 = \text{-gt} \Rightarrow V = u_0 \text{ -gt}$$

$$\boxed{\mathrm{V = u_o - gt}} \quad \text{και} \quad \boxed{\vec{V} = (u_0 - gt)\hat{j}}$$

$$\ldots y|_0^Y = \int_0^t (u_0 - gt)dt \Rightarrow Y = \int_0^t u_0 dt - \int_0^t gtdt \Rightarrow Y = u_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\boxed{Y = u_0 t - \frac{1}{2}gt^2} \quad \text{και} \quad \boxed{\vec{Y} = \left(u_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}}$$

Κατακόρυφη βολή προς τα επάνω

Συνέχεια…

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Πρόκειται για κίνηση σε **μία διάσταση** (άξονας y). Επομένως:

$V = u_o - gt$ και $\vec{V} = (u_0 - gt)\hat{j}$

$Y = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ και $\vec{Y} = \left(u_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{j}$

Για να υπολογίσουμε το h_{max} θέτουμε V = 0

$$V = u_0 - gt = 0 \Rightarrow u_0 - gt = 0 \Rightarrow u_0 - gt = 0 \Rightarrow u_0 = gt \Rightarrow t_{ανοδου} = \frac{u_0}{g} \Rightarrow h_{max} = \frac{u_0^2}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{u_0^2}{2g}$$

Για να υπολογίσουμε το $t_{ολ.}$ θέτουμε Y = 0

$$Y = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow u_0 t_{ολ.} - \frac{1}{2} g t_{ολ.}^2 = 0 \Rightarrow t_{ολ.} = \frac{2u_0}{g}$$

$$t_{ολ.} = \frac{2u_0}{g}$$

Ευθύγραμμη κίνηση με χρονικά μεταβαλλόμενη επιτάχυνση

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Τη χρονική στιγμή t = 0s

$$x_{t=0} = 0$$

$$\vec{u}_{t=0} = u_0\hat{i}$$

$$\vec{a} = a(t)\hat{i}$$

Πρόκειται για κίνηση σε έναν άξονα αλλά…. Η ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ α δεν είναι σταθερή, ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Υπολογίζουμε την εξίσωση της ταχύτητας

$$a(t) = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a(t)dt \Rightarrow \int_{u_0}^{V} du = \int_0^t a(t)dt \Rightarrow V - u_0 = \int_0^t a(t)dt$$

Για να συνεχίσουμε πρέπει να μας δίδεται η συνάρτηση α(t)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι α(t) = (2t + 3) (m/s^2)

Ευθύγραμμη κίνηση με χρονικά μεταβαλλόμενη επιτάχυνση
Συνέχεια…

$$a(t)=\frac{du}{dt}\Rightarrow du=a(t)dt\Rightarrow\int_{u_0}^{V}du=\int_0^t a(t)dt\Rightarrow V-u_0=\int_0^t a(t)dt\Rightarrow$$

$$V-u_0=\int_0^t(2t+3)dt\Rightarrow V-u_0=\int_0^t 2tdt+\int_0^t 3dt\Rightarrow V-u_0=t^2+3t\Rightarrow$$

$$V=\left(u_0+t^2+3t\right)\frac{m}{s}\quad ή\quad \vec{V}=\left(u_0+t^2+3t\right)\hat{\imath}\quad\frac{m}{s}$$

Υπολογίζουμε την εξίσωση της θέσης του κινητού

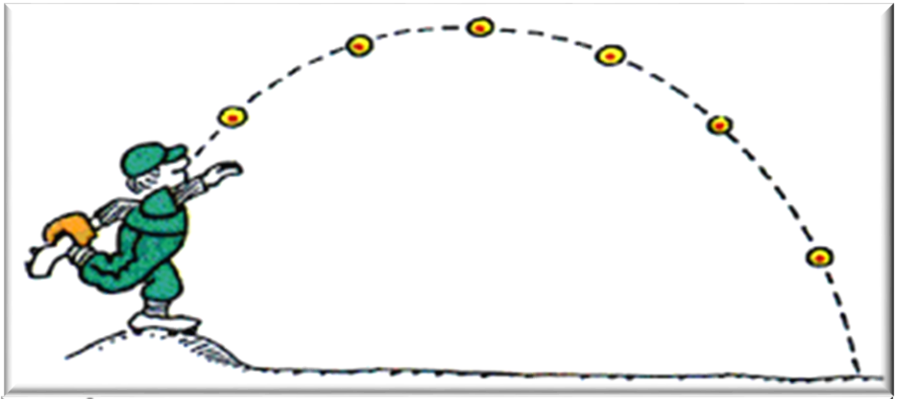
$$u=\frac{dx}{dt}\Rightarrow V=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=Vdt\Rightarrow\int_0^X dx=\int_0^t\left(u_0+t^2+3t\right)dt\Rightarrow X-0=\int_0^t u_0dt+\int_0^t t^2dt+\int_0^t 3tdt$$

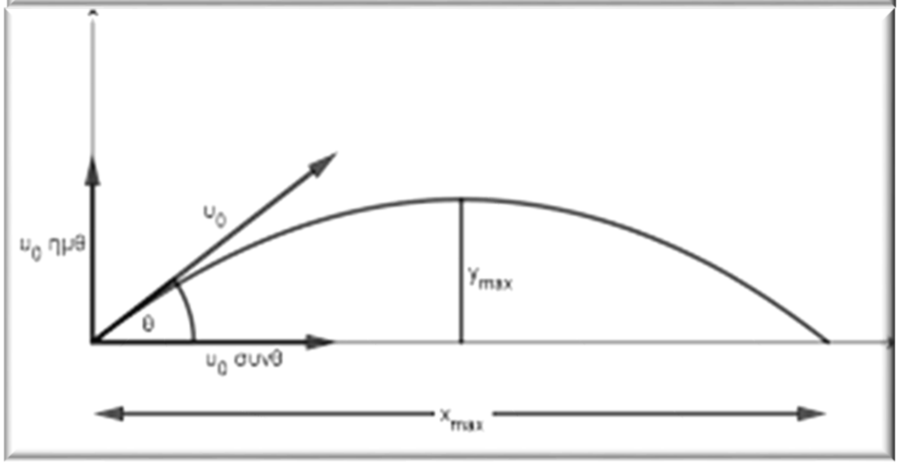
$$\Rightarrow X=u_0t+\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\Rightarrow X=\left(u_0t+\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)m\quad ή\quad \vec{X}=\left(u_0t+\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\hat{\imath}\quad m$$

Επιταχυνόμενη κίνηση αλλά ΌΧΙ ομαλά επιταχυνόμενη.

Πλάγια Βολή

Πρόκειται για κίνηση στο επίπεδο xy: Κίνηση σε δύο διαστάσεις





ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t = 0s

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0, y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{t=0} = u_o \ cos\theta\hat{\imath} + u_o \ sin\theta\hat{\jmath} \\ \vec{a} = -g\hat{\jmath} \end{cases}$$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Αυτό σημαίνει ότι εργαζόμαστε σε κάθε άξονα ξεχωριστά και ανεξάρτητα από τον άλλο.

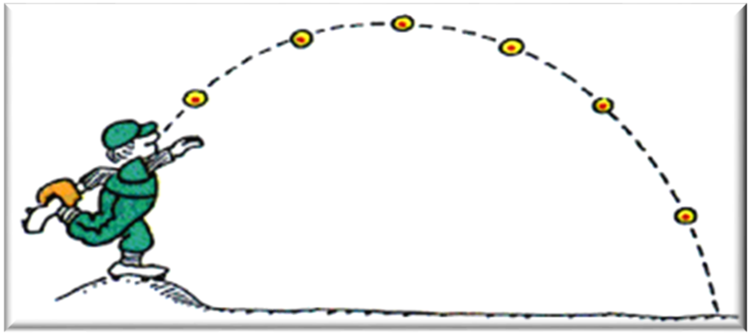
Άξονας x

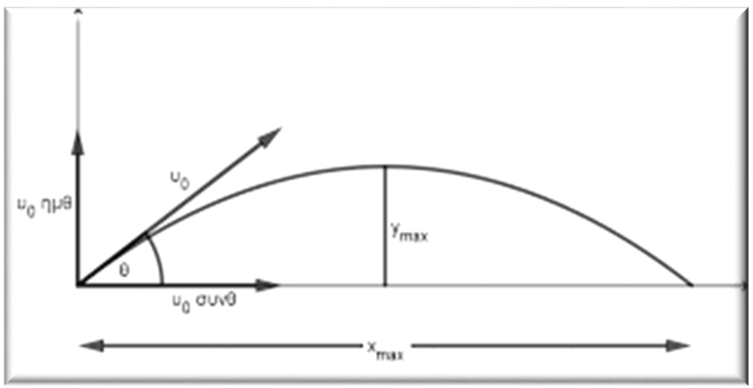
$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{x,t=0} = u_o \ cos\theta\hat{\imath} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

Επομένως πρόκειται για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $u_o \ cos\theta$ την οποία έχουμε ήδη μελετήσει και γνωρίζουμε τις εξισώσεις κίνησης.

Πλάγια Βολή

Συνέχεια…





Άξονας x

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{x,t=0} = u_o\ cos\theta\hat{\imath} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

$$V_x = u_o\ cos\theta \qquad \vec{V_x} = u_o\ cos\theta\ \hat{\imath}$$

$$X = u_o\ cos\theta t \qquad \vec{X} = u_o\ cos\theta t\hat{\imath}$$

Επαναλαμβάνουμε για τον άξονα y

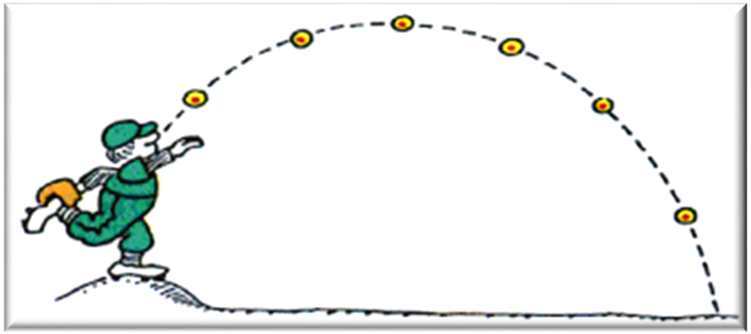
Άξονας y

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{y,t=0} = u_o\ sin\theta\hat{\jmath} \\ \vec{a} = -g\hat{\jmath} \end{cases}$$

Επομένως πρόκειται για κατακόρυφη βολή προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $u_o\ sin\theta$ την οποία και έχουμε μελετήσει.

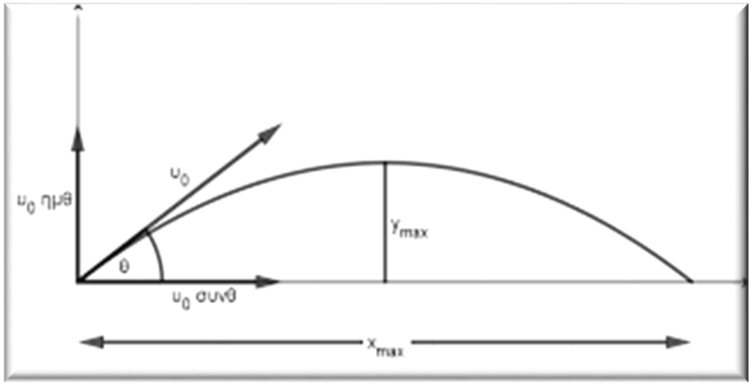
Πλάγια Βολή

Συνέχεια…



Άξονας y

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{y,t=0} = u_o\ sin\theta\hat{j} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$



Επομένως πρόκειται για κατακόρυφη βολή προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $u_o\ sin\theta$ την οποία και έχουμε μελετήσει.

$$V_y = u_o\ sin\theta\text{- gt}$$

$$\vec{V_y} = (u_o\ sin\theta - gt)\hat{j}$$

$$\text{Y} = u_o\ sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\vec{Y} = \left(u_o\ sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$$

Πλάγια Βολή

Συνέχεια…

Άξονας x

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{x,t=0} = u_o \cos\theta \hat{i} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

$$V_x = u_o \cos\theta$$

$$X = u_o \cos\theta t$$

Άξονας y

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{y,t=0} = u_o \sin\theta \hat{j} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$

$$V_y = u_o \sin\theta - gt$$

$$Y = u_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Υπολογίζουμε το χρόνο ανόδου $t_{αν.}$ θέτοντας $V_y = 0$. Προκύπτει:

$$t_{αν.} = \frac{u_0 \sin\theta}{g}$$

Υπολογίζουμε τον ολικό χρόνο $t_{ολ.}$ θέτοντας Y = 0. Προκύπτει:

$$t_{αν.} = \frac{2u_0 \sin\theta}{g}$$

Πλάγια Βολή

Συνέχεια...

Άξονας x

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{x,t=0} = u_o \cos\theta \hat{\imath} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

V_x = u_o $\cos\theta$

X = u_o $\cos\theta t$

Άξονας y

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{y,t=0} = u_o \sin\theta \hat{\jmath} \\ \vec{a} = -g\hat{\jmath} \end{cases}$$

$V_y = u_o$ $\sin\theta$- gt

Y $= u_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$

Υπολογίζουμε το μέγιστο ύψος αντικαθιστώντας το χρόνο ανόδου $t_{αν.}$ στην εξίσωση Y. Προκύπτει:

$$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Πλάγια Βολή

Συνέχεια...

Άξονας x

$$\begin{cases} x_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{x,t=0} = u_o \cos\theta \hat{i} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

$$V_x = u_o \cos\theta$$

$$X = u_o \cos\theta t$$

Άξονας y

$$\begin{cases} y_{t=0} = 0 \\ \vec{u}_{y,t=0} = u_o \sin\theta \hat{j} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$

$$V_y = u_o \sin\theta - \mathrm{gt}$$

$$Y = u_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Υπολογίζουμε το Βεληνεκές S, δηλαδή τη μέγιστη απόσταση που διανύει το κινητό μέχρι να επιστρέψει στο έδαφος. Θέτουμε τον ολικό χρόνο στην εξίσωση του X.

$$S = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

Πλάγια Βολή

Συνέχεια…

$V_x = u_o \cos\theta$

$X = u_o \cos\theta t$

$V_y = u_o \sin\theta - gt$

$Y = u_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$

Προφανώς η ταχύτητα του κινητού μια τυχαία χρονική στιγμή t θα δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} = u_o \cos\theta \hat{i} + (u_o \sin\theta - gt)\hat{j}$$

$$\cos\theta = \frac{V_x}{V} = \frac{u_o \cos\theta}{V}$$

Ομοίως για το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{r} = X\hat{i} + Y\hat{j} = (u_o \cos\theta t)\hat{i} + \left(u_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{j}$$

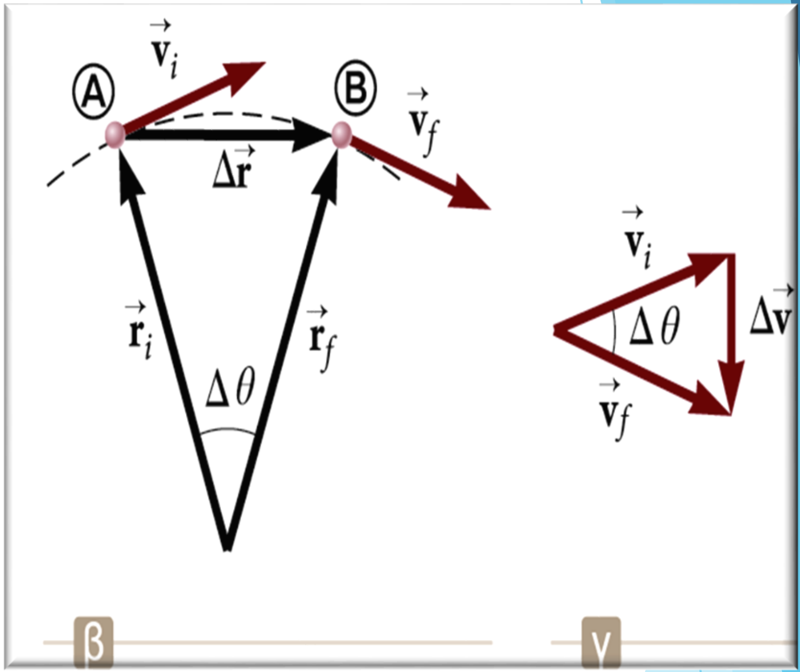
$$\cos\theta = \frac{r_x}{r} = \frac{u_o \cos\theta\ t}{r}$$

Ελεύθερη πτώση σωμάτων

- Ένα **σώμα σε ελεύθερη πτώση** είναι κάθε σώμα το οποίο κινείται ελεύθερα μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας.
- Δεν εξαρτάται από την αρχική κίνηση του σώματος:
  - Απελευθέρωση του σώματος από κατάσταση ηρεμίας
  - Ρίψη του σώματος προς τα κάτω (κατακόρυφη βολή προς τα κάτω)
  - Ρίψη του σώματος προς τα πάνω (κατακόρυφη βολή προς τα πάνω)
- Ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση υφίσταται μια επιτάχυνση με κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω, ανεξάρτητα από την αρχική κίνησή του.
- Το μέτρο της επιτάχυνσης ελεύθερης πτώσης, ή απλώς η επιτάχυνση της βαρύτητας, είναι $\boldsymbol{g} = \mathbf{9.80\ m/s^2}$.
  - Η τιμή του g μειώνεται όσο αυξάνεται το ύψος.
  - Η τιμή του g μεταβάλλεται με το γεωγραφικό πλάτος.
  - Στην επιφάνεια της Γης, η μέση τιμή του είναι $9.80\ m/s^2$

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Ένα σώμα το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, εκτελεί ***ομαλή κυκλική κίνηση***.
- Υπάρχει επιτάχυνση εφόσον μεταβάλλεται η *κατεύθυνση* της κίνησης.
- Το διάνυσμα της ταχύτητας σταθερού μέτρου εφάπτεται πάντα στην τροχιά του σώματος.
- Η επιτάχυνση έχει πάντα κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου της κίνησης.
- Η επιτάχυνση αυτού του είδους ονομάζεται ***κεντρομόλος επιτάχυνση***.

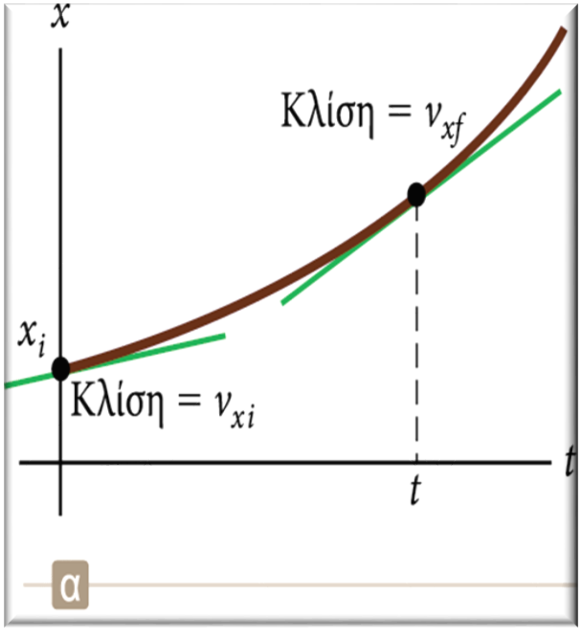


$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$$

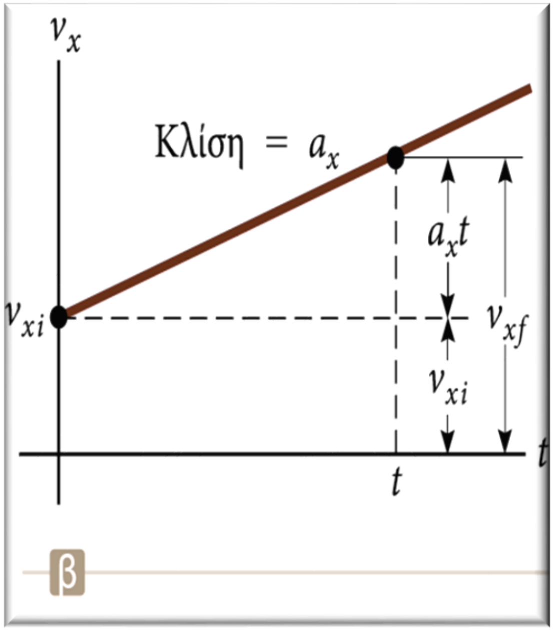
$$a_C = \frac{v^2}{r} \qquad T \equiv \frac{2\pi r}{v}$$

Γραφήματα κίνησης

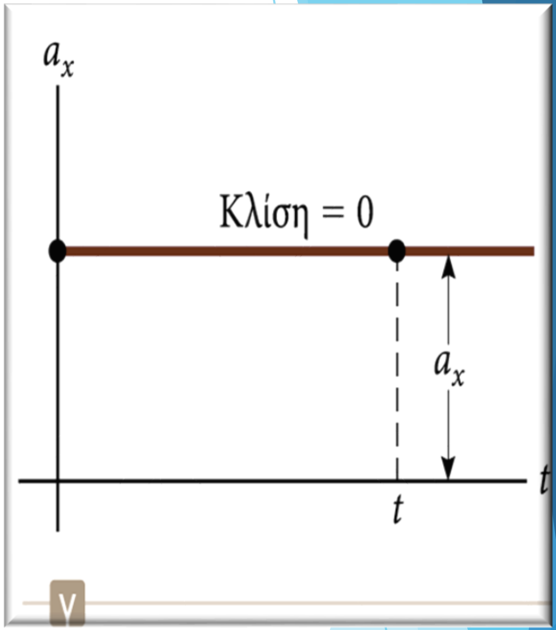
Καμπύλη μετατόπισης-χρόνου



Καμπύλη ταχύτητας-χρόνου



Καμπύλη επιτάχυνσης-χρόνου

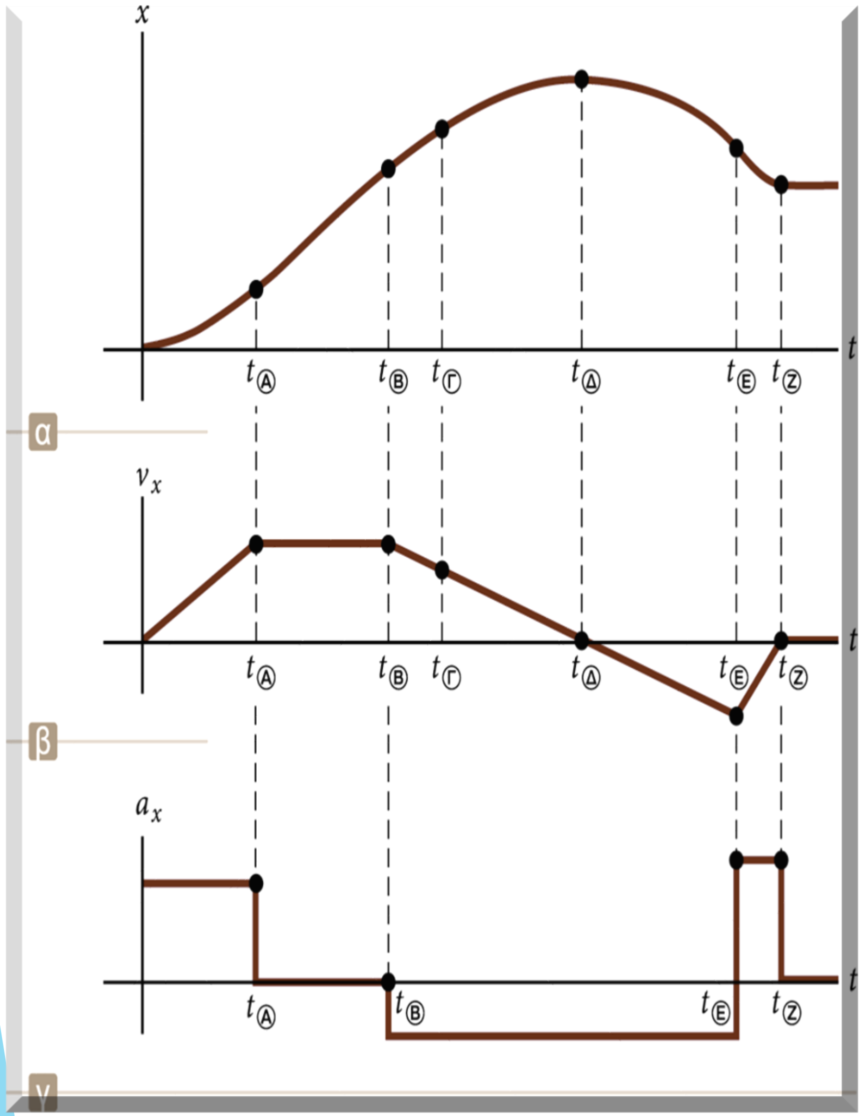


- *Η κλίση της καμπύλης ισούται με την ταχύτητα.*
- *Η καμπύλη γραμμή δείχνει ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται.*

- *Η κλίση δίνει την επιτάχυνση.*
- *Η ευθεία υποδεικνύει ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή.*

Η μηδενική κλίση δείχνει ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή.

Γραφήματα κίνησης



Με δεδομένο το γράφημα μετατόπισης-χρόνου:

- Βρίσκουμε το γράφημα ταχύτητας-χρόνου μετρώντας την κλίση του γραφήματος θέσης-χρόνου σε κάθε χρονική στιγμή.
- Βρίσκουμε το γράφημα επιτάχυνσης-χρόνου μετρώντας την κλίση του γραφήματος ταχύτητας-χρόνου σε κάθε χρονική στιγμή.

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 1

Σώμα μάζας m εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με τη θέση του να δίνεται από τη σχέση $x(t) = At^2 + Bt + 2$, όπου A και B σταθερές. Να βρεθούν: α) οι διαστάσεις των σταθερών A, B, β) η ταχύτητα του σώματος, υ(t), και γ) η επιτάχυνση του α(t).

ΛΥΣΗ

α) Η διάσταση της θέσης x(t) είναι [x(t)]=L επομένως όλοι οι όροι του αθροίσματος στη σχέση $x(t) = At^2 + Bt + 2$ θα έχουν διάσταση μήκους L. Έχουμε ότι:

$[At^2] = [A][t^2] = [A]T^2$ και $[At^2] = L \Rightarrow [A]T^2 = L \Rightarrow [A] = LT^{-2}$ που στο διεθνές σύστημα μονάδων S.I. αντιστοιχεί στη μονάδα ms^{-2}.

$[Bt] = [B][t] = [B]T$ και $[Bt] = L \Rightarrow [B]T = L \Rightarrow [B] = LT^{-1}$ που στο διεθνές σύστημα μονάδων S.I. αντιστοιχεί στη μονάδα ms^{-1}.

β) $$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{d}{dt}\left(At^2 + Bt + 2\right) \Rightarrow \upsilon(t) = 2At + B$$

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 2

Σώμα μάζας m εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με τη θέση του να δίνεται από τη σχέση $x(t) = At^2 + Bt + 2$, όπου A και B σταθερές. Να βρεθούν: α) οι διαστάσεις των σταθερών A, B, β) η ταχύτητα του σώματος, υ(t), και γ) η επιτάχυνση του α(t).

ΛΥΣΗ

γ) $\alpha(t) = \dfrac{d\upsilon(t)}{dt} \Rightarrow \alpha(t) = \dfrac{d}{dt}(2At + B) \Rightarrow \alpha(t) = 2A$

Επομένως, η επιτάχυνση είναι σταθερή και το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 3

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy διαγράφοντας καμπύλη τροχιά, η οποία περιγράφεται από την σχέση:

$$y = A\eta\mu\omega x$$

όπου A, ω σταθερές και θετικές ποσότητες. Εάν το υλικό σημείο κατά τον άξονα x κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_0, να εκφράσετε σε συνάρτηση με τον χρόνο την επιτάχυνσή του.

ΛΥΣΗ: Εάν $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου ως πρός την αρχή O των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων Oxy, θα ισχύει:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = v_0 t\vec{i} + A\eta\mu(\omega v_0 t)\vec{j} \qquad (1)$$

όπου $\vec{i}$, $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox και Oy αντιστοίχως και x, y οι συντεταγμένες του κατά την χρονική στιγμή t που το εξετάζουμε. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο δύο φορές την (1), παίρνουμε:

$$d\vec{r}/dt = v_0\vec{i} + A\omega v_0 \sigma\upsilon\nu(\omega v_0 t)\vec{j} \;\; \Rightarrow$$

$$d^2\vec{r}/dt^2 = - A\omega^2 v_0^2 \eta\mu(\omega v_0 t)\vec{j} \;\; \Rightarrow \;\; \vec{a} = - A\omega^2 v_0^2 \eta\mu(\omega v_0 t)\vec{j} \qquad (2)$$

Από την (2) παρατηρούμε ότι, η επιτάχυνση $\vec{a}$ του υλικού σημείου διευθύνεται παράλληλα προς τον άξονα Oy και η αλγεβρική της τιμή μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο.

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 4

Το διάνυσμα θέσεως σωματιδίου ως προς την αρχή των αξόνων, δίνεται από την σχέση:

$$\vec{r} = kt\vec{i} + \lambda t^2\vec{j} \qquad (\alpha)$$

όπου k, λ θετικές και σταθερές ποσότητες και $\vec{i}$, $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox και Oy αντιστοίχως.

i) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

ΛΥΣΗ: i) Εάν x, y είναι οι συντεταγμένες του σωματιδίου κατά την χρονική στιγμή t, τότε συμφωνα με την δοδείσα σχέση (α) θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x &= kt \\ y &= \lambda t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 &= k^2t^2 \\ y &= \lambda t^2 \end{aligned}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{y} = \frac{k^2t^2}{\lambda t^2} \Rightarrow y = \frac{\lambda x^2}{k^2} \qquad (1)$$

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 5

Συνέχεια…….

ii) Να εκφράσετε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σωματιδίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t και να βρείτε κατά ποιά χρονική στιγμή η γωνία των διανυσμάτων τους γίνεται ίση με π/3.

ΛΥΣΗ

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \vec{v} = k\vec{i} + 2\lambda t\vec{j} \qquad (2)$$

και

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \vec{a} = 0\vec{i} + 2\lambda\vec{j} \qquad (3)$$

Εξάλλου για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{a}$ έχουμε τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}(\vec{v}\cdot\vec{a}) &= |\vec{v}||\vec{a}|\,\sigma\upsilon\nu\varphi \\ (\vec{v}\cdot\vec{a}) &= 4\lambda^2 t\end{aligned}\right\} \Rightarrow |\vec{v}||\vec{a}|\,\sigma\upsilon\nu\varphi = 4\lambda^2 t \Rightarrow$$

$$2\lambda\sqrt{k^2 + 4\lambda^2t^2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi = 4\lambda^2 t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{2\lambda t}{\sqrt{k^2 + 4\lambda^2 t^2}} \qquad (4)$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων αυτών. Εάν t_* είναι η χρονική στιγμή για την οποία ισχύει φ=π/3, θα έχουμε με βάση την (4) ότι:

$$\frac{1}{2} = \frac{2\lambda t_*}{\sqrt{k^2 + 4\lambda^2 t_*^2}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4\lambda^2 t_*^2}{k^2 + 4\lambda^2 t_*^2} \Rightarrow k^2 + 4\lambda^2 t_*^2 = 16\lambda^2 t_*^2 \Rightarrow t_* = \frac{k}{2\sqrt{3}\lambda} = \frac{\sqrt{3}k}{12\lambda}$$

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 6

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy το δε διάνυσμα θέσεώς του $\vec{r}$ ως προς την αρχή O των αξόνων μεταβάλλεται με τον χρόνο t σύμφωνα με την σχέση:

$$\vec{r} = x_0 \eta\mu\omega t\,\vec{i} + y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi)\,\vec{j} \qquad (\alpha)$$

όπου x_0, y_0, ω θετικές και σταθερές ποσότητες, $\varphi \le \pi/2$ και $\vec{i}$, $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox και Oy αντιστοίχως. Να καθορισθούν οι συνθήκες, ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας του υλικού σημείου να είναι διαρκώς κάθετο στο διάνυσμα της επιτάχυνσής του. Ποιά είναι η μορφή της τροχιάς στην περίπτωση αυτή;

ΛΥΣΗ: Εάν $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου θα ισχύει:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \vec{v} = \omega x_0 \sigma\upsilon\nu\omega t\,\vec{i} + \omega y_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)\,\vec{j} \qquad (1)$$

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ του υλικού σημείου είναι:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{a} = -\omega^2 x_0 \eta\mu\omega t\,\vec{i} - \omega^2 y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi)\,\vec{j} \qquad (2)$$

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 7

Συνέχεια…….

Για να είναι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ διαρκώς κάθετα μεταξύ τους πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι μηδέν για κάθε t, δηλαδή πρέπει να ισχύει;

$$(\vec{a}\cdot\vec{v}) = 0 \xRightarrow{(1),(2)} -\omega^3 x_0^2 \sigma\upsilon\nu\omega t\, \eta\mu\omega t - \omega^3 \psi_0^2 \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)\eta\mu(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$x_0^2 \eta\mu 2\omega t + y_0^2 \eta\mu(2\omega t + 2\varphi) = 0 \qquad (3)$$

Η (3) την χρονική στιγμή t=0 δίνει:

$$y_0^2 \eta\mu 2\varphi = 0 \Rightarrow \eta\mu 2\varphi = 0$$

διότι $y_0 \neq 0$. Από την ημ2φ=0 προκύπτει φ=0 ή φ=π/2. Η περίπτωση φ=0 απορρίπτεται, διότι τότε η εξίσωση της τροχιάς αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη κίνηση του υλικού σημείου, γεγονός που απορρίπτει την περίπτωση $(\vec{a}\perp\vec{v})$, οπότε

Οπότε πρέπει **φ=π/2** Τότε η σχέση (3) γράφεται:

$$x_0^2 \eta\mu 2\omega t + y_0^2 \eta\mu(2\omega t + \pi) = 0 \Rightarrow (x_0^2 - y_0^2)\eta\mu 2\omega t = 0 \qquad (4)$$

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 8

Συνέχεια……..

$$x_0^2 \eta\mu 2\omega t + y_0^2 \eta\mu(2\omega t + \pi) = 0 \;\Rightarrow\; (x_0^2 - y_0^2)\eta\mu 2\omega t = 0 \qquad (4)$$

Για να ισχύει η (4) για κάθε t, πρέπει:

$$x_0^2 - y_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = y_0$$

Άρα οι συνθήκες που εξασφαλίζουν $(\vec{a} \perp \vec{v})$ είναι φ=π/2 και $x_0=y_0$. Τότε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του υλικού σημείου θα περιγράφεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t από την σχέση:

$$\vec{r} = x_0 \eta\mu\omega t\, \vec{i} + y_0 \eta\mu(\omega t + \pi/2)\, \vec{j} \;\Rightarrow\; \vec{r} = x_0 \eta\mu\omega t\, \vec{i} + y_0 \sigma\upsilon\nu\omega t\, \vec{j} \;\Rightarrow$$

$$|\vec{r}|^2 = x_0^2(\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t) \;\Rightarrow\; |\vec{r}|^2 = x_0^2 \;\Rightarrow\; |\vec{r}| = x_0$$

δηλαδή το μέτρο του $\vec{r}$ είναι σταθερό, που σημαίνει ότι η τροχιά είναι περιφέρεια κέντρου Ο και ακτίνας x_0.

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 9

Ένα υλικό σημείο μετατοπίζεται κατά μήκος του άξονα x'x με επιτάχυνση, της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με την μετατόπισή του x σύμφωνα με την σχέση:

$$\mathbf{a = a_0 e^{-\kappa x}}$$

όπου a, κ θετικές και σταθερές ποσότητες. Εάν κατά την χρονική στιγμή t=0 το υλικό σημείο βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα x'x και έχει μηδενική ταχύτητα, να βρείτε την σχέση v=f(x) που δίνει το μέτρο της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με την μετατόπισή του x.

<u>**ΛΥΣΗ**</u>: Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του υλικού σημείου κατά την χρονική στιγμή t που η μετατόπισή του είναι x. Τότε θα ισχύει:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = a_0 e^{-\kappa x} \Rightarrow v\,dv = a_0 e^{-\kappa x}\,dx \qquad (1)$$

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{a_0}{\kappa} e^{-\kappa x}\, d(-\kappa x) \Rightarrow d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{a_0}{\kappa} d(e^{-\kappa x}) \qquad (2)$$

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 10

Συνέχεια……..

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{a_0}{\kappa} e^{-\kappa x} d(-\kappa x) \;\Rightarrow\; d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{a_0}{\kappa} d(e^{-\kappa x}) \qquad (2)$$

Η σχέση (2) με ολοκλήρωση δίνει:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{a_0}{\kappa} e^{-\kappa x} + C \qquad (3)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης C θα προκύψει από την αρχική συνθήκη ότι για t-0 είναι v=0 και x=0, οπότε η (3) δίνει:

$$0 = -\frac{a_0}{\kappa} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{a_0}{\kappa} \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε την σχέση:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{a_0}{\kappa} e^{-\kappa x} + \frac{a_0}{\kappa} \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{2a_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa x}\right) \qquad (5)$$

Η (5) αποτελεί την ζητούμενη συνάρτηση.

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 11

Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Λύση

$$\vec{u} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} \Rightarrow \vec{u} = \frac{d}{dt}(2 + 3t + 4e^{-5t})\hat{\imath} \Rightarrow \vec{u} = (3 - 20e^{-5t})\hat{\imath}$$

$$\vec{a} = \frac{du}{dt}\hat{\imath} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(3 - 20e^{-5t})\hat{\imath} \Rightarrow \vec{a} = 100e^{-5t}\hat{\imath}$$

Είναι φανερό από την εξίσωση της ταχύτητας ότι για $t=\infty$ η ταχύτητα τείνει προς την σταθερή τιμή των 3m/s.

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 11

___ Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t)=3\sin 5t$, $y(t)=4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Λύση

$\vec{r}$=3sin5$t\hat{\imath}$ + 4cos5$t\hat{\jmath}$

(α) $\vec{u}=\frac{dx}{dt}\hat{\imath}+\frac{dy}{dt}\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{u}=\frac{d}{dt}(3sin5t)\hat{\imath}+\frac{d}{dt}(4cos5t)\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{u}=15cos5t\hat{\imath}-20sin5t\hat{\jmath}$

$\vec{a}=\frac{du_x}{dt}\hat{\imath}+\frac{du_y}{dt}\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{a}=\frac{d}{dt}(15cos5t)\hat{\imath}+\frac{d}{dt}(-20sin5t)\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{a}=-75sin5t\hat{\imath}-100cos5t\hat{\jmath}$

(β) $u=\sqrt{(15cos5t)^2+(-20sin5t)^2}=25\ m/s$

$a=\sqrt{(=-75sin5t)^2+(-100cos5t)^2}=125\ m/s^2$

(γ) $\begin{cases} x=3\sin5t \\ y=4\cos5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}=3\sin5t \\ \frac{y}{4}=\cos5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9}=3\sin^2 5t \\ \frac{y^2}{16}=\cos^2 5t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ **έλλειψη**

Ενδεικτικές Ασκήσεις - 11

Για το σπίτι…….. Καλή δουλειά……..

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy και τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα που έχει συνιστώσα στον άξονα x ίση με 20m/s και συνιστώσα στον άξονα y ίση με -15m/s. Το σωματίδιο δέχεται επιτάχυνση κατά τον άξονα x με τιμή α_x=4m/s^2.
α) Προσδιορίστε το διάνυσμα $\vec{u}$ της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή.
β) Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t=5,0s καθώς και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x.

Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των X δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 3\sin 5t$, $y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Καλή Μελέτη