Μηχανική - Ρευστομηχανική

Timeo hominem unius libri.

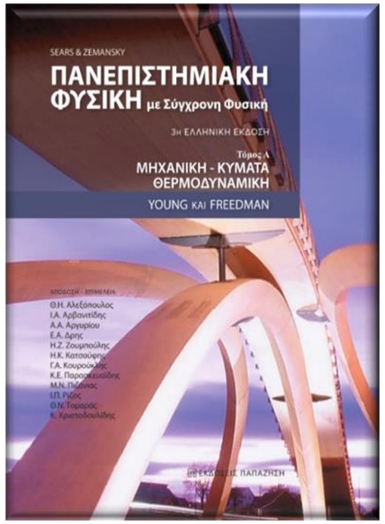
Thomas Acquinas

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

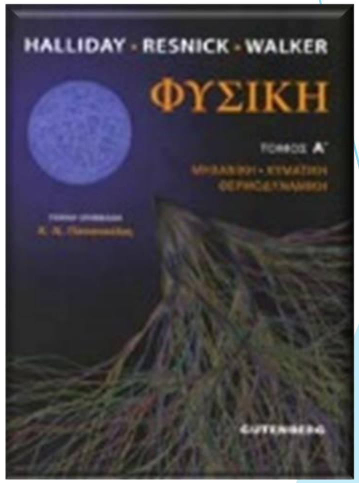
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



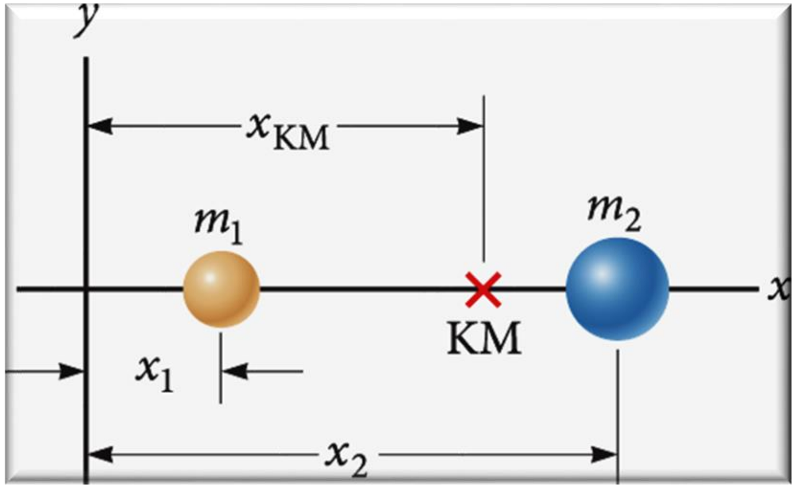
Sears & Zemansky, Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, Τόμος Α, Μηχανική-Κύματα, Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Η έννοια του Κέντρου Μάζας

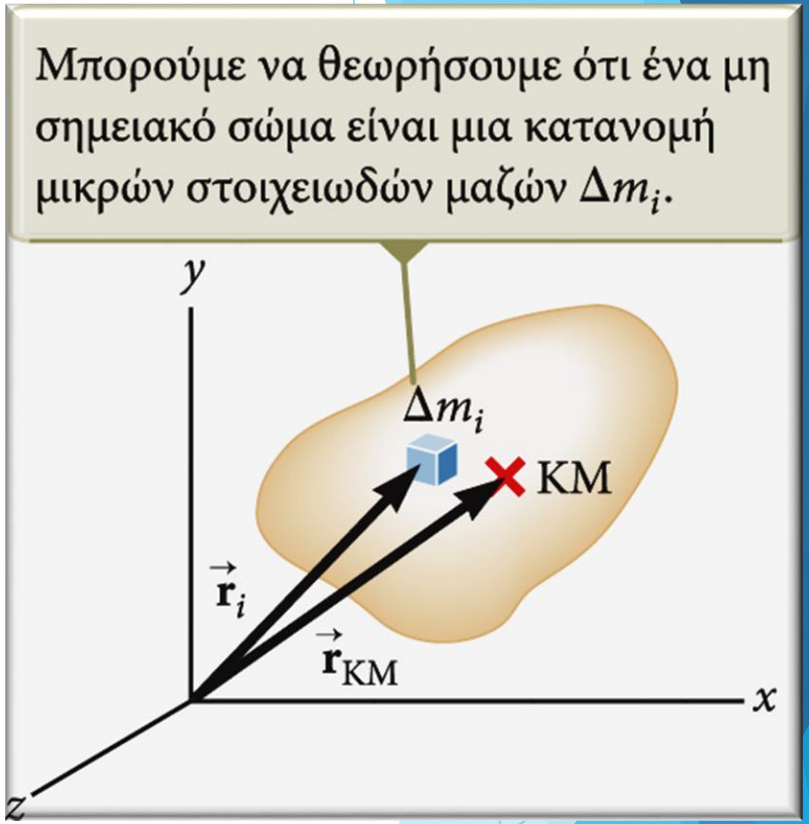
Κέντρο μάζας, συντεταγμένες



- Σε τρεις διαστάσεις, εντοπίζουμε το κέντρο μάζας με το διάνυσμα θέσης του, $\vec{\mathbf{r}}_{KM}$.

- Για ένα σύστημα σωματιδίων,

$$\vec{\mathbf{r}}_{KM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$



- Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι

$$x_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \qquad y_{KM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

$$z_{KM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

Το $\vec{\mathbf{r}}_i$ είναι η θέση του *i*-οστού σωματιδίου, που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

- Το *M* είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Για ένα μη σημειακό σώμα,

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{KM} &= \frac{1}{M}\int x\,dm \\ y_{KM} &= \frac{1}{M}\int y\,dm \\ z_{KM} &= \frac{1}{M}\int z\,dm \end{aligned} \right.$$

Κέντρο μάζας

$$\vec{\mathbf{r}}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm$$

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int x dm$$

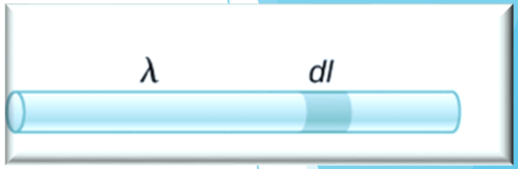
$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int y dm$$

$$z_{KM} = \frac{1}{M}\int z dm$$

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM}\hat{\mathbf{i}} + y_{KM}\hat{\mathbf{j}} + z_{KM}\hat{\mathbf{k}}$$

Γραμμική ομοιόμορφη κατανομή

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}}$$

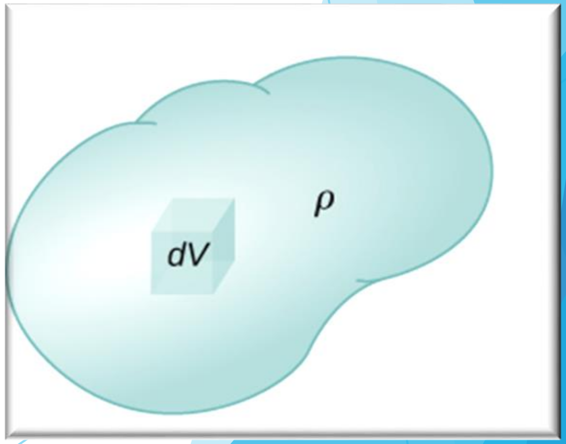


Επιφανειακή ομοιόμορφη κατανομή

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{S_{(\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o})}}$$

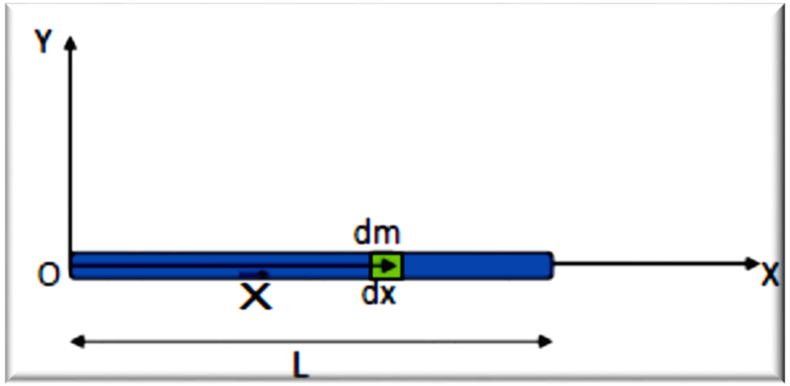
Χωρική ομοιόμορφη κατανομή

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V_{(\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma)}}$$



Παραδείγματα υπολογισμού Κέντρου Μάζας

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς λεπτής ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το ένα άκρο της.



$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$$

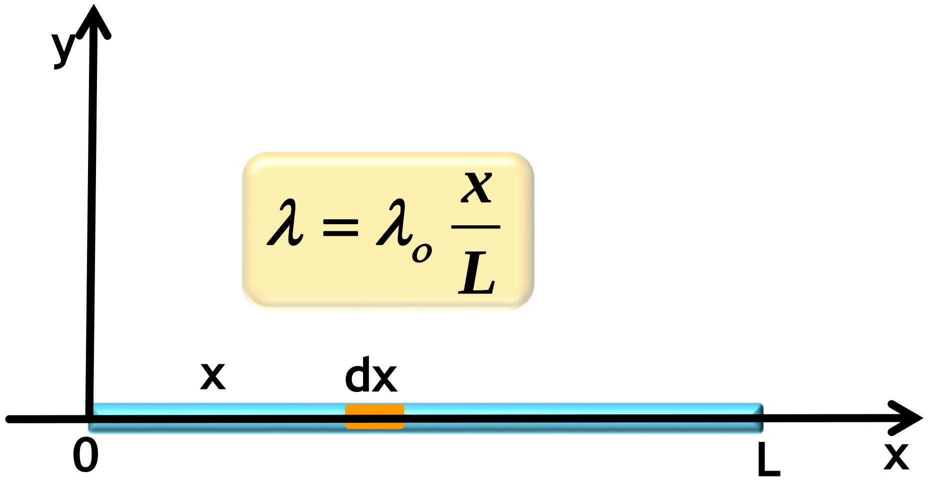
$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda x\,dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x\,dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L \Rightarrow X_{KM} = \frac{\lambda}{M}\frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

$$X_{KM} = \frac{\frac{M}{L}}{M}\frac{L^2}{2} \Rightarrow X_{KM} = \frac{M}{ML}\frac{L^2}{2} \Rightarrow X_{KM} = \frac{L}{2}$$

$$\vec{X}_{KM} = \frac{L}{2}\hat{i}$$

Τι θα αλλάξει εάν πρέπει να υπολογίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το μέσο της ράβδου;

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας μη ομογενούς λεπτής ράβδου γραμμικής πυκνότητας λ και μήκους L ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το ένα άκρο της.



$$\boxed{\lambda = \lambda_o \frac{x}{L}}$$

$$M = \int dm \Rightarrow M = \int \lambda dx \Rightarrow M = \int_0^L \lambda_o \frac{x}{L} dx \Rightarrow$$

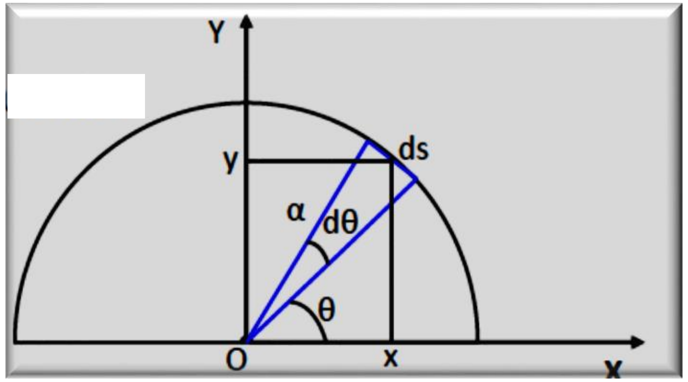
$$M = \frac{\lambda_o}{L}\int_0^L x dx \Rightarrow M = \frac{\lambda_o}{L}\frac{L^2}{2} \Rightarrow M = \frac{\lambda_0 L}{2}$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int x dm \Rightarrow X_{CM} = \frac{1}{M}\int x\lambda dx \Rightarrow X_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda_o \frac{x}{L} dx \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{LM}\int_0^L x^2 dx \Rightarrow$$

$$X_{CM} = \frac{\lambda_o}{LM}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{LM}\frac{L^3}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{M}\frac{L^2}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{\lambda_o}{\frac{\lambda_0 L}{2}}\frac{L^2}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{2\lambda_o}{\lambda_0 L}\frac{L^2}{3} \Rightarrow X_{CM} = \frac{2}{3}L$$

$$\boxed{\vec{X}_{KM} = \frac{2L}{3}\hat{i}}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς ημικυκλικού σύρματος ακτίνας α ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο Ο του ημικυκλίου.



$$\lambda = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi\alpha}$$

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int xdm \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M}\int x\lambda ds \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M}\int a\cos\theta\lambda ds \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha\lambda}{M}\int_0^{\pi}\cos\theta\alpha d\theta \Rightarrow$$

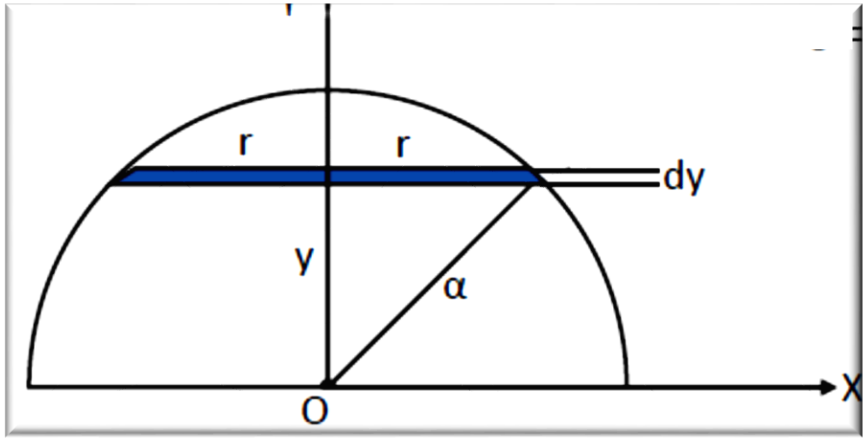
$$X_{KM} = \frac{\alpha^2\lambda}{M}\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha^2\lambda}{M}\sin\theta\Big|_0^{\pi} \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha^2\lambda}{M}\left(\sin\pi - \sin 0\right) \Rightarrow X_{KM} = 0$$

$$Y_{KM} = \frac{1}{M}\int ydm \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\lambda ds \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M}\int a\sin\theta\lambda ds \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\alpha\lambda}{M}\int_0^{\pi}\sin\theta\alpha d\theta \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = \frac{\alpha^2\lambda}{M}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\alpha^2\lambda}{M}\cos\theta\Big|_0^{\pi} \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\alpha^2\lambda}{M}\left(\cos\pi - \cos 0\right) \Rightarrow Y_{KM} = 2\frac{\alpha^2\lambda}{M} \Rightarrow Y_{KM} = 2\frac{\alpha^2\frac{M}{\pi\alpha}}{M} \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$\vec{r}_{KM} = \vec{X}_{KM} + \vec{Y}_{KM} \Rightarrow \vec{r}_{KM} = \frac{2\alpha}{\pi}\hat{j}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς ημικυκλικής πλάκας ακτίνας α ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο Ο της πλάκας.



Η ημικυκλική πλάκα μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία λεπτών οριζόντιων ράβδων όπως στο σχήμα.

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{\frac{\pi\alpha^2}{2}} = \frac{2M}{\pi\alpha^2}$$

Είναι προφανές ότι η θέση του Κέντρου Μάζας βρίσκεται στον άξονα y.

$$Y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\sigma\,dA \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\sigma 2r\,dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\sigma}{M}\int yr\,dy \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = \frac{2\sigma}{M}\int_0^{\alpha} y\left(\alpha^2 - y^2\right)^{1/2} dy$$

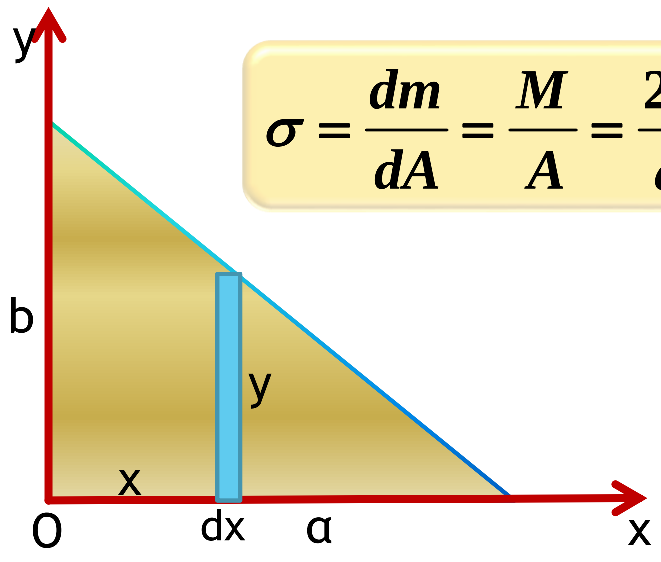
Θέτουμε: $\alpha^2 - y^2 = u \Rightarrow du = -2y\,dy$

$$Y_{KM} = \frac{2\sigma}{M}\int_0^{\alpha} y u^{1/2} dy \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M}\int_0^{\alpha} u^{1/2}(-2y)\,dy \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M}\int_{\alpha^2}^{0} u^{1/2} du \Rightarrow Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M}\left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_{\alpha^2}^{0} \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = -\frac{\sigma}{M}\left(-\frac{\alpha^3}{3/2}\right) \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\sigma}{3M}\alpha^3 \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2\frac{2M}{\pi\alpha^2}}{3M}\alpha^3 \Rightarrow Y_{KM} = \frac{4\alpha}{3\pi}$$

$$\vec{r}_{KM} = \vec{Y}_{KM} = \frac{4\alpha}{3\pi}\hat{j}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς τριγωνικής πλάκας πλευρών α και b ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο Ο (σχήμα).



$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} = \frac{2M}{\alpha b}$$

Το Κέντρο Μάζας της τριγωνικής πλάκας είναι ένα σημείο του επιπέδου της. Άρα το διάνυσμα θέσης του έχει δύο συνιστώσες. Μία στον άξονα x και μία στον άξονα y. Τις υπολογίζουμε ξεχωριστά.

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int x dm \Rightarrow X_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^a x\sigma y dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^a xydx$$

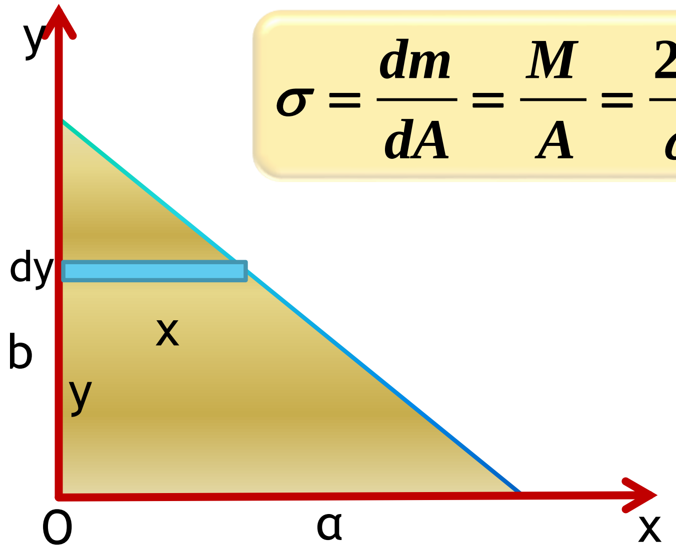
$$\frac{y}{b} = \frac{\alpha - x}{a} \Rightarrow y = \frac{\alpha - x}{a} b \Rightarrow y = \frac{b}{\alpha}(\alpha - x)$$

$$X_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^a xydx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^a x\frac{b}{\alpha}(\alpha - x)dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma b}{M\alpha}\int_0^a x(\alpha - x)dx \Rightarrow X_{KM} = \frac{\sigma b}{M\alpha}\left[\int_0^a \alpha x dx - \int_0^a x^2 dx\right] \Rightarrow$$

$$X_{KM} = \frac{2b}{\alpha b \alpha}\left[a\frac{x^2}{2}\Big|_0^a - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a\right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{2}{\alpha^2}\left[a\frac{a^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{2}{\alpha^2}\left[\frac{a^3}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{2}{\alpha^2}\left[\frac{a^3}{6}\right] \Rightarrow X_{KM} = \frac{\alpha}{3}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς τριγωνικής πλάκας πλευρών α και b ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο Ο (σχήμα).

Συνέχεια…



$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} = \frac{2M}{\alpha b}$$

$$Y_{KM} = \frac{1}{M}\int y dm \Rightarrow Y_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^b y\sigma x dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^b xydy$$

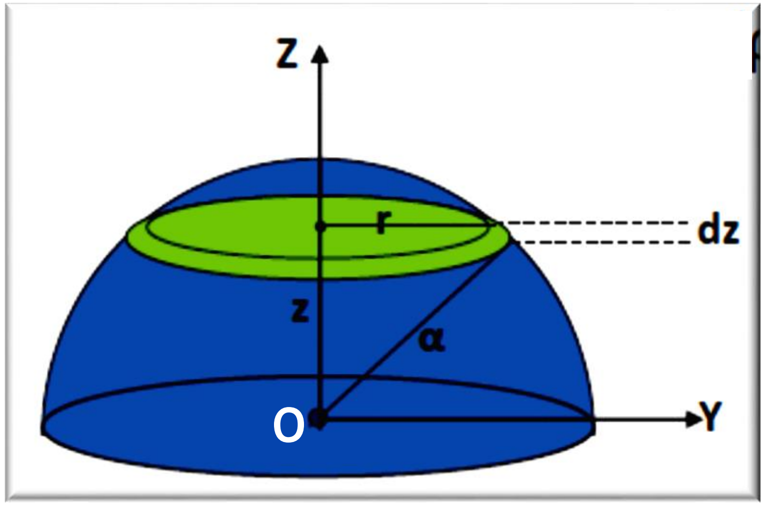
$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b} \Rightarrow x = \frac{b-y}{b}a \Rightarrow x = \frac{a}{b}(b-y)$$

$$Y_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^b xydy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^b y\frac{\alpha}{b}(b-y)dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma\alpha}{Mb}\int_0^b y(b-y)dy \Rightarrow Y_{KM} = \frac{\sigma\alpha}{Mb}\left[\int_0^b bydy - \int_0^b y^2dy\right] \Rightarrow$$

$$Y_{KM} = \frac{2\alpha}{\alpha bb}\left[b\frac{y^2}{2}\Big|_0^b - \frac{y^3}{3}\Big|_0^b\right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2}{b^2}\left[b\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}\right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2}{b^2}\left[\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3}\right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{2}{b^2}\left[\frac{b^3}{6}\right] \Rightarrow Y_{KM} = \frac{b}{3}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{\alpha}{3}\hat{i} + \frac{\beta}{3}\hat{j}$$

Να υπολογίσετε τη θέση του Κέντρου Μάζας ομογενούς συμπαγούς ημισφαιρίου ακτίνας α ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο Ο (σχήμα).



$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} = \frac{2M}{\frac{4\pi\alpha^3}{3}} \Rightarrow \rho = \frac{3M}{2\pi\alpha^3}$$

Το ημισφαίριο μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία πολύ λεπτών ομόκεντρων δίσκων ακτίνας r και πάχους dz.

Το Κέντρο Μάζας βρίσκεται επάνω στον άξονα z.

$$Z_{KM} = \frac{1}{M}\int z dm \Rightarrow Z_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^a z\rho\pi r^2 dz \Rightarrow Z_{KM} = \frac{\pi\rho}{M}\int_0^a zr^2 dz \Rightarrow Z_{KM} = \frac{\pi\rho}{M}\int_0^a z\left(\alpha^2 - z^2\right)dz \Rightarrow Z_{KM} = \frac{\pi\rho}{M}\int_0^a z\alpha^2 dz - \frac{\pi\rho}{M}\int_0^a z^3 dz$$

$$\Rightarrow Z_{KM} = \frac{\pi\rho\alpha^2}{M}\int_0^a zdz - \frac{\pi\rho}{M}\int_0^a z^3 dz \Rightarrow Z_{KM} = \frac{\pi\rho\alpha^2}{M}\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^\alpha - \frac{\pi\rho}{M}\left.\frac{z^4}{4}\right|_0^\alpha \Rightarrow Z_{KM} = \frac{\pi\rho\alpha^4}{2M} - \frac{\pi\rho\alpha^4}{4M} \Rightarrow Z_{KM} = \frac{2\pi\rho\alpha^4}{8M} \Rightarrow Z_{KM} = \frac{2\pi 3M\alpha^4}{8M\,2\pi\alpha^3} \Rightarrow$$

$$Z_{KM} = \frac{3\alpha}{8}$$

$$\vec{r}_{KM} = Z_{KM}\hat{k} = \frac{3\alpha}{8}\hat{k}$$

Τι θα άλλαζε εάν ήταν ομογενής συμπαγής σφαίρα ακτίνας α;

Ευχαριστώ

Καλό διάβασμα…