

1. Παρούσα Αξία Ράντας
2. Τοκοχρεολύσιο
3. Τελική Αξία Ράντας
4. Προκαταβλητέα Ράντα
5. Μέλλουσα Ράντα
6. Ομόλογα και ομολογίες με εξαμηνιαία καταβολή τόκου
7. Διηνεκής Ράντα
8. Διηνεκής Ράντα με γεωμετρική αύξηση των όρων
9. Αποτίμηση Μετοχών

ΡΑΝΤΕΣ

- Ράντα είναι μια **σειρά κεφαλαίων** που καταβάλλονται ή λήγουν ανά **ίσα χρονικά διαστήματα**
- Όρος της ράντας λέγεται καθένα από τα ποσά που αποτελούν τη σειρά και παριστάνεται με το σύμβολο R

PANTEΣ

- Αν **οι όροι είναι ίσοι** μεταξύ τους, **η ράντα λέγεται σταθερή**, ενώ αν είναι **άνισοι**, λέγεται **μεταβλητή**.
- Το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών όρων της ράντα λέγεται **περίοδος ράντας**.
- **Ληξιπρόθεσμη** λέγεται μια ράντα όταν ο κάθε όρος της καταβάλλεται **στο τέλος κάθε περιόδου**
- **Προκαταβλητέα** λέγεται η ράντα, όταν κάθε όρος της καταβάλλεται **στην αρχή κάθε περιόδου**

PANTEΣ

- **Παρούσα Αξία** της ράντας λέγεται το ποσό που είναι ίσο με τη συνολική αξία όλων των όρων της σε μια ορισμένη στιγμή
 - Αν η χρονική στιγμή συμπίπτει με την **αρχή της ράντας**, η παρούσα αξία της λέγεται και **Αρχική Αξία**
 - **Τελική Αξία** λέγεται η αξία της ράντας στο **τέλος της τελευταίας περιόδου**

PANTEΣ

- **Εποχή Υπολογισμού** λέγεται η χρονική στιγμή που βρισκόμαστε
- **Άμεσος** λέγεται η ράντα, αν η εποχή υπολογισμού συμπίπτει με την αρχή της ράντας
- **Μέλλουσα** λέγεται η ράντα, αν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται λ περιόδους, πριν από το σημείο της αρχής της

PANTEΣ

- **Αρξάμενη** λέγεται η ράντα, αν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται λ περιόδους μετά το σημείο της αρχής της
- **Πρόσκαιρη** λέγεται η ράντα όταν το πλήθος των όρων της είναι ορισμένο
- **Διηνεκής** λέγεται η ράντα όταν το πλήθος των όρων της είναι άπειρο

Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Παρούσα Αξία – Άμεσης, Ληξιπρόθεσμης,
Πρόσκαιρης Ράντας

$a_{n|}^i$ – Αρχική αξία μιας νομισματικής
μονάδας με επιτόκιο i και n περιόδους

$A_{n|} = R a_{n|}^i$ – Αν ο κάθε όρος είναι R
νομισματικές μονάδες

n	0.01	0.05	0.06	0.07	0.08
1	0.9901	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259
2	1.9704	1.8594	1.8334	1.8080	1.7833
8	7.6517	6.4632	6.2098	5.9713	5.7466
9	8.5660	7.1078	6.8017	6.5152	6.2469
10	9.4713	7.7217	7.3601	7.0236	6.7101
11	10.3676	8.3064	7.8869	7.4987	7.1390

Ληξιπρόθεσμη Ράντα

1. Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 7 %, για να έχουμε δικαίωμα να αποσύρουμε 10.000 στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη.

Λύση

$$a_{\overline{n}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$A_{n1} = R a_{\overline{n1}}^i = 10.000 * 7,023581 = 70.231,8$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 10 & 10 & & & & & & & & & 10 \end{array}$$

Προβλήματα

- Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί κάθε χρόνο μία υποτροφία 10.000 Ευρώ και επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα χορηγηθεί μετά ένα χρόνο. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια τράπεζα, με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 4 % για να μπορεί να δίνει τις 10.000 Ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου;

-

- Λύση

$$a_n^i = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1 - \frac{1}{(1+0,04)^{10}}}{0.04} = 8,11$$

- $A_{nl} = R \alpha_n^i = 10.000 * 8,11 = 81.100$ Ευρώ θα πρέπει να καταθέσει σήμερα

- Τι ποσό πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 10 %, έτσι ώστε να μπορούμε να εισπράττουμε 90.000 στο τέλος κάθε έτους για 8 έτη.
- Λύση
- $$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 6 & 7 & 8 \\ \hline 90\chi & 90\chi & \dots & & & & \end{array}$$

ΡΑΝΤΕΣ

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

- Όταν θα αναφερόμαστε στο χρόνο 1 θα εννοούμε το τέλος του χρόνου ένα
- Η αρχή του χρόνου 3 είναι το τέλος του χρόνου 2
- Η δόση που καταβλήθηκε στο τέλος του χρόνου 3 θα πρέπει να προεξοφληθεί για τρία χρόνια
 - Ενώ η δόση που καταβλήθηκε στην αρχή του χρόνου 3 θα πρέπει να προεξοφληθεί για δυο έτη
- 0__1__2__3__4__5__6



- **Άσκηση:** Ποια η τοκοχρεολυτική δόση ενός δανείου 20.000 ευρώ για 8 έτη με επιτόκιο 14 %.
- **Τοκοχρεολύσιο ή τοκοχρεωλύσιο** ονομάζουμε τη δόση για την τμηματική αποπληρωμή ενός εντόκου δανείου. Περιλαμβάνει μέρος του κεφαλαίου αποπληρωμής (χρεολύσιο) και τον αναλογούντα τόκο.
- Στη **Μέθοδο του σταθερού τοκοχρεολυσίου** η δόση του παραμένει σταθερή, καθώς αποτελείται από σταθερό (ισόποσο) χρεολύσιο και σταθερό τόκο. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συνηθέστερα σε μακροχρόνιο δανεισμό και ειδικότερα σε μεγάλες επενδύσεις.

- **Άσκηση:** Ποια η τοκοχρεολυτική δόση ενός δανείου 20.000 ευρώ για 8 έτη με επιτόκιο 14 %.

- $$A_{\hat{n}} = R \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i} \Leftrightarrow 20.000 = R \frac{1 - \left(\frac{1}{1,14}\right)^8}{0,14} \Leftrightarrow$$

$$20.000 = R * 4,6389$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{20.000}{4,6389} = R = 4.311,4$$

- **Άσκηση:** Να βρεθεί η τοκοχρεολυτική δόση με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου για δανείου €15.000, διάρκειας 5 ετών, με επιτόκιο 9%.

- $$A_{\hat{n}} = R \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i} \Leftrightarrow 15.000 = R \frac{1 - \left(\frac{1}{1,09}\right)^5}{0,09} \Leftrightarrow$$

$$15.000 = R * 3,8896$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{15.000}{3,8896} = R = 3.856,4$$

- **ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΡΑΝΤΑΣ**
- Υπολογίζεται σε δυο φάσεις
- 1. Υπολογίζουμε την αρχική αξία της Ράντας

$$A_{\hat{n}} = R \frac{1 - (\frac{1}{1+i})^n}{i}$$

- 2. Υπολογίζουμε την Τελική Αξία με τον τύπο του ανατοκισμού

$$K_n = K_0(1 + i)^n \quad \text{όπου } K_0 \text{ θέτουμε την αρχική αξία } A_{\hat{n}}$$

K_n είναι η τελική αξία της ράντας

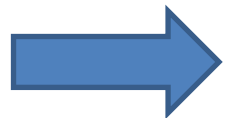
- **Άσκηση Τελική Αξία Ράντας :** Ο εισοδηματίας Γεωργίου καταθέτει στην Τράπεζα , στη αρχή κάθε χρόνου, 100.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6 %. Αυτό γίνεται επί 10 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στον λογαριασμό του Γεωργίου στο τέλος των ετών.

$$a_{\overline{n}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1 - \frac{1}{(1,06)^{10}}}{0,06} = 7,36$$

- Επειδή ο πρώτος όρος προκαταβάλλεται θα πολλαπλασιάσουμε όλοι τη σειρά των όρων με $(1+i)$ μετατρέποντας την σε ληξιπρόθεσμη
- $A_{n1} = (1+i)R a_{\overline{n1}}^i = 1,06 * 100.000 * 7,36 =$
- $= 780.160$
- $K = K_0 (1+i)^n = 780.160 (1,06)^{10} = 1.397.147,7$

Άσκηση Μέλλουσα Ράντα

1. Ένας επιχειρηματίας δανείζεται σήμερα 1.000.000 Ευρώ προς 8 % θα εξοφλήσει το δάνειο σε 10 ετήσιες δόσεις αλλά η πρώτη δόση θα δοθεί μετά 3 έτη(στο τέλος του χρόνου 3). Να βρεθεί η αξία κάθε δόσης.



Λύση

$$\lambda / A_{n1} = R * a_{n1}^i * 1/(1+i)^\lambda \Leftrightarrow$$

$$2 / A_{101} = R * a_{101}^{0,08} * 1/(1+0,08)^2 \Leftrightarrow$$

$$1.000.000 = R * 6,71008 * 0,8573$$



R = 173.836

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			R	R	R	R	R R	R	R	R	R	R

PANΤΕΣ

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

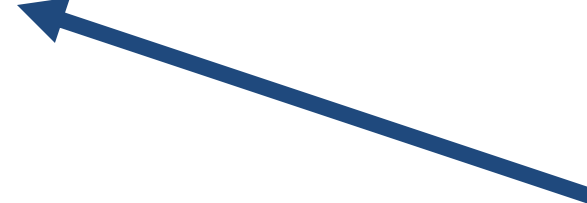
- Όταν θα αναφερόμαστε στο χρόνο 1 θα εννοούμε το τέλος του χρόνου ένα
- Η αρχή του χρόνου 3 είναι το τέλος του χρόνου 2
- Η δόση που καταβλήθηκε στο τέλος του χρόνου 3 θα πρέπει να προεξοφληθεί για τρία χρόνια
 - Ενώ η δόση που καταβλήθηκε στην αρχή του χρόνου 3 θα πρέπει να προεξοφληθεί για δυο έτη
- 0__1__2__3__4__5__6



Άσκηση Μέλλουσα Ράντα

- Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 5 %, για έχουμε δικαίωμα να αποσύρουμε (στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη) 10.000 Ευρώ. αρχής γενομένης μετά 5 έτη από σήμερα (στο τέλος του 5^{ου} έτους).

• 0__1__2__3__4__5__6__7__8__9...14



Αρχή του 5^{ου} έτους

Τέλος του 5^{ου} έτους

• Λύση

$$\bullet \lambda / A_{n1} = R * a_{n1}^i * 1/(1+i)^\lambda \Leftrightarrow$$

$$\bullet 4 / A_{101} = 10.000 * 7,7217 * 1/(1,05)^4$$

$$\bullet 4 / A_{101} = 10.000 * 7,7217 * 0,8227$$

$$\bullet 4 / A_{101} = 63526,71$$

$$a_{\bar{n}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1 - \frac{1}{(1,05)^{10}}}{0,05} = 7,7217$$

- **Άσκηση:** Ποια η αξία ασφαλιστηρίου συμβολαίου που θα μας δίνει μετά 4 έτη 100.000 ευρώ κάθε χρόνο για 10 χρόνια. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 5 % και οι καταβολές θα γίνονται στο τέλος κάθε χρόνου .

- Λύση

- $$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . \\ \hline \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccccccc} & & & & A_{10} & 100.000 & \\ \hline \end{array}$$

- $$\lambda / A_n = R * \alpha_n^i * 1/(1+i)\lambda \Leftrightarrow$$

$$3/ A_{10} = 100.000 \alpha_{10}^{0,05} \frac{1}{(1,05)^3} = 100.000 * 7,7 * 0,864 = 665.280$$

- $$3/ A_{10} = 665.280$$

Άσκηση: Ένας επενδυτής αγόρασε δεκαετή ομόλογα ονομαστικής αξίας 100.000 ευρώ πριν ένα χρόνο, όταν το επιτόκιο ήταν 10 % και το τοκομερίδιο έτους ή αλλιώς το επιτόκιο έκδοσης 10 %. Σήμερα μετά την είσπραξη του τόκου αποφάσισε να πουλήσει τα ομόλογα. Το επιτόκιο, όμως, της αγοράς είναι 7 %. Ποια η αποτίμηση του ομολόγου;

Λύση

Η αξία του ομολόγου σήμερα θα είναι ίση με την προεξοφλημένη αξία των εναπομεινάντων εννέα τοκομεριδίων και της ονομαστικής αξίας.

Τα τοκομερίδια θα αποδίδουν τόκο $0,10 \cdot 100.000 = 10.000$ ευρώ κάθε έτος.

Η παρούσα αξία αυτών των τοκομεριδίων μπορεί να υπολογιστεί με βάση τη χρήση της κατάλληλης ράντας,

$$a_i^n = a_{0,07}^9 = 6,5152$$



Τοκομερίδιο ή Κουπόνι ή Επιτόκιο έκδοσης (Coupon)

Είναι το επιτόκιο με βάση το οποίο υπολογίζονται οι τόκοι του ομολόγου σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο και εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις 100 (%) επί της ονομαστικής αξίας του ομολόγου.

Το κουπόνι, το οποίο ορίζεται κατά την έκδοση του ομολόγου μπορεί να είναι σταθερό ή κυμαινόμενο.

Ονομαστική Αξία (Face Value)

Είναι το αρχικό ποσό έκδοσης του χρεογράφου το οποίο ο εκδότης υπόσχεται να αποπληρώσει στην ημερομηνία λήξης του ομολόγου.

Τιμή Ομολόγου (Bond Price)

Η τιμή του ομολόγου ορίζεται με βάση το εκατό (100), το οποίο αντιστοιχεί στην ονομαστική του αξία.

Από τον τύπο της ράντας

$$A_{0,06}^{15} = Ra_{0,07}^9 = 10.000 * 6,5152 = 65.152 \text{ ευρώ η αξία των τοκομεριδίων}$$

n/i	0,05	0,06	0,07
1	0,952381	0,943396	0,934579
6	5,075692	4,917324	4,766540
7	5,786373	5,582381	5,389289
8	6,463213	6,209794	5,971299
9	7,107822	6,801692	6,515232

$$A_{\hat{n}} = R \frac{1 - (\frac{1}{1+i})^n}{i} = 10.000 \frac{1 - (\frac{1}{1,07})^9}{0,07} = 65.152$$

Επομένως, η αξία των ομολόγων θα είναι,

$P = \text{παρούσα αξία τοκομεριδίων} + \text{παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας}$

$$P = Ra_{0,07}^9 + \frac{100.000}{(1,07)^9} = 65.152 + 54.393 = 119,545$$

Άσκηση: Ένας επενδυτής αγοράζει εικοσαετές ομόλογο ονομαστικής αξίας 1.000 ευρώ και επιτοκίου έκδοσης (επιτόκιο τοκομεριδίου) 7 %. Να υπολογισθεί η παρούσα αξία του ομολόγου όταν το απαιτούμενο επιτόκιο για τη συγκεκριμένη έκδοση ανέρχεται στο 10 %

Λύση

Το τοκομερίδιο ή αλλιώς κουπόνι του ομολόγου θα είναι $0,07 * 1.000 = 70$ ευρώ.

Η παρούσα αξία του ομολόγου θα είναι ίση με

- την προεξόφληση της ράντας που αφορά στα τοκομερίδια καθώς επίσης και
- την προεξόφληση της ονομαστικής αξίας των 1.000 που θα ληφθούν μετά 20 έτη, στη λήξη του ομολόγου.

$P = \text{παρούσα αξία τοκομεριδίων} + \text{παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας}$



$$P = R \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} + \frac{K}{(1+i)^n} = 70 * \frac{1 - \frac{1}{(1+0,10)^{20}}}{0,10} + \frac{1.000}{(1,10)^{20}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 70 * \frac{1 - \frac{1}{1,7275}}{0,10} + 148,64 \Leftrightarrow P = 70 * \frac{1 - 0,148644}{0,10} + 148,64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 70 * \frac{0,851356}{0,10} + 148,64 \Leftrightarrow P = 70 * 8,51 + 148,64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 595,7 + 148,64 = 744,34 \text{ ευρώ}$$

Δυο ομολογίες A και B με ετήσια τοκομερίδια 10 % έχουν ονομαστικές αξίες 10.000 ευρώ αντίστοιχα. Εάν το πρώτο είναι δεκαετές και το δεύτερο εικοσαετές, να βρείτε την τιμή των ομολογιών αν το επιτόκιο της αγοράς είναι α) 10% β) 5% και γ) 15 % δ) 15% με τοκομερίδια 5 %. Ποια είναι τα συμπεράσματα;

Λύση

α) Οι παρούσες αξίες των δυο ομολογιών θα ισούνται με τις αντίστοιχες προεξοφλημένες εισροές τους.

Τα τοκομερίδια θα αποδίδουν τόκο $0,10 \cdot 10.000 = 1.000$ ευρώ κάθε έτος. Η παρούσα αξία αυτών των τοκομεριδίων μπορεί να υπολογιστεί στην κάθε περίπτωση με τη χρήση των κατάλληλων ραντών, δηλαδή

Συντελεστής ράντας για την ομολογία A = $a_j^n = a_{0,10}^{10} = 6,1445$

Συντελεστής ράντας για την ομολογία B = $a_j^n = a_{0,10}^{20} = 8,5135$

Από τον τύπο της ράντας οι παρούσες αξίες των τοκομεριδίων είναι:

Για την ομολογία Α $A_{0,10}^{10} = Ra_{0,10}^{10} = 1.000 * 6,1446 = 6.144,6$ ευρώ

Για την ομολογία Β $A_{0,10}^{20} = Ra_{0,10}^{20} = 1.000 * 8,5136 = 8.513,6$ ευρώ

n/i	0,08	0,09	0,1	0,11
8	5,746639	5,534819	5,334926	5,146123
9	6,246888	5,995247	5,759024	5,537048
10	6,710081	6,417658	6,144567	5,889232
11	7,138964	6,805191	6,495061	6,206515
18	9,371887	8,755625	8,201412	7,701617
19	9,603599	8,950115	8,364920	7,839294
20	9,818147	9,128546	8,513564	7,963328
21	10,016803	9,292244	8,648694	8,075070
22	10,200744	9,442425	8,771540	8,175739
23	10,371059	9,580207	8,883218	8,266432

Επομένως, οι αξίες των ομολογιών θα είναι,

$P = \text{παρούσα αξία τοκομεριδίων} + \text{παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας}$

$$P_A = Ra_{0,10}^{10} + \frac{10.000}{(1,10)^{10}} = 1.000 * 6,1445 + \frac{10.000}{(1,10)^{10}} = 6.144,6 + 3855,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A = 10.000$$

$$P_B = Ra_{0,10}^{20} + \frac{10.000}{(1,10)^{20}} = 1.000 * 8,5135 + \frac{10.000}{(1,10)^{20}} = 8.513,6 + 1486,4$$

$$\Leftrightarrow P_B = 10.000$$

Οι παρούσες αξίες των ομολογιών ισούνται με τις ονομαστικές τους αξίες, δηλαδή πωλούνται “στο άρτιο” (δηλ. στην ονομαστική τους τιμή).

β) Η παρούσα αξία των τοκομεριδίων όταν το επιτόκιο είναι 5% υπολογίζεται στην κάθε περίπτωση με τη χρήση των κατάλληλων ραντών, δηλαδή

Συντελεστής ράντας για την ομολογία A $= a_i^n = a_{0,05}^{10} = 7,7217$

Συντελεστής ράντας για την ομολογία B $= a_i^n = a_{0,05}^{20} = 12,462$

Από τον τύπο της ράντας οι παρούσες αξίες των τοκομεριδίων είναι:

Για την ομολογία A $A_{0,05}^{10} = Ra_{0,05}^{10} = 1.000 * 7,7217 = 7.721,7$ ευρώ

Για την ομολογία B $A_{0,05}^{20} = Ra_{0,05}^{20} = 1.000 * 12,462 = 12.462$ ευρώ

n/i	0,04	0,05	0,06
8	6,732745	6,463213	6,209794
9	7,435332	7,107822	6,801692
10	8,110896	7,721735	7,360087
11	8,760477	8,306414	7,886875
12	9,385074	8,863252	8,383844
17	12,165669	11,274066	10,477260
18	12,659297	11,689587	10,827603
19	13,133939	12,085321	11,158116
20	13,590326	12,462210	11,469921
21	14,029160	12,821153	11,764077

Επομένως, οι αξίες των ομολογιών θα είναι,

$P = \text{παρούσα αξία τοκομεριδίων} + \text{παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας}$

$$P_A = Ra_{0,05}^{10} + \frac{10.000}{(1,05)^{10}} = 1.000 * 7,7217 + \frac{10.000}{(1,05)^{10}} = 7.721,7 + 6.139,1$$

$$\Leftrightarrow P_A = 13.860,8$$

$$P_B = Ra_{0,05}^{20} + \frac{10.000}{(1,05)^{20}} = 1.000 * 12,462 + \frac{10.000}{(1,05)^{20}} = 12.462 + 3.768,9$$

$$\Leftrightarrow P_B = 16.230,9$$

Οι ομολογίες πωλούνται σε υψηλότερη τιμή από το άρτιο (“υπέρ το άρτιο”), η αλλιώς η μείωση των επιτοκίων επαύξησε την τιμή των ομολογιών. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του επιτοκίου (από 10% σε 5%) έχει μεγαλύτερη επίδραση στη ομολογία με τη μεγαλύτερη διάρκεια (η τιμή της εικοσαετούς ομολογίας εκτινάχθηκε στα 16.230,9 ευρώ).

γ) Η παρούσα αξία των τοκομεριδίων όταν το επιτόκιο είναι 15% υπολογίζεται στην κάθε περίπτωση με τη χρήση των κατάλληλων ραντών, δηλαδή

Συντελεστής ράντας για την ομολογία A $A = a_j^n = a_{0,15}^{10} = 5,0187$

Συντελεστής ράντας για την ομολογία B $B = a_j^n = a_{0,15}^{20} = 6,2593$

Από τον τύπο της ράντας οι παρούσες αξίες των τοκομεριδίων είναι:

Για την ομολογία A $A_{0,15}^{10} = Ra_{0,15}^{10} = 1.000 * 5,0187 = 5.018,7$ ευρώ

Για την ομολογία B $A_{0,15}^{20} = Ra_{0,15}^{20} = 1.000 * 6,2593 = 6.259,3$ ευρώ

n/i	0,15	0,16
1	0,869565	0,862069
8	4,487322	4,343591
9	4,771584	4,606544
10	5,018769	4,833227
11	5,233712	5,028644
18	6,127966	5,817848
19	6,198231	5,877455
20	6,259331	5,928841
23	6,398837	6,044247

Επομένως, οι αξίες των ομολογιών θα είναι,

$P = \text{παρούσα αξία τοκομεριδίων} + \text{παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας}$

$$P_A = Ra_{0,15}^{10} + \frac{10.000}{(1,15)^{10}} = 1.000 * 5,0187 + \frac{10.000}{(1,15)^{10}} = 5.018,7 + 2.471,84$$

$$\Leftrightarrow P_A = 7.491$$

$$P_B = Ra_{0,15}^{20} + \frac{10.000}{(1,15)^{20}} = 1.000 * 6,2593 + \frac{10.000}{(1,15)^{20}} = 6259,3 + 611 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_B = 6.870$$

Οι ομολογίες πωλούνται σε χαμηλότερη τιμή από το άρτιο (“υπό το άρτιο”), η αλλιώς η αύξηση των επιτοκίων μείωσε την τιμή των ομολογιών. Επίσης και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι η μεταβολή του επιτοκίου (από 10% σε 15%) έχει μεγαλύτερη επίδραση στη ομολογία με τη μεγαλύτερη διάρκεια (η τιμή της εικοσαετούς ομολογίας μειώθηκε στα 6.870 ευρώ).

Παραδείγματα

δ) Η παρούσα αξία των τοκομεριδίων με επιτόκιο έκδοσης 5% ($0.05 \cdot 10.000 = 500$) και επιτόκιο αγοράς 15% υπολογίζεται με βάση τους συντελεστές ράντας που χρησιμοποιήθηκαν στην γ) περίπτωση, δηλαδή

Συντελεστής ράντας για την ομολογία A $a_i^n = a_{0,15}^{10} = 5,0187$

Συντελεστής ράντας για την ομολογία B $a_i^n = a_{0,15}^{20} = 6,2593$

Από τον τύπο της ράντας οι παρούσες αξίες των τοκομεριδίων είναι:

Για την ομολογία A $A_{0,15}^{10} = Ra_{0,15}^{10} = 500 \cdot 5,0187 = 5.018,7$ ευρώ

Για την ομολογία B $A_{0,15}^{20} = Ra_{0,15}^{20} = 500 \cdot 6,2593 = 6.259,3$ ευρώ

n/i	0,15	0,16
1	0,869565	0,862069
8	4,487322	4,343591
9	4,771584	4,606544
10	5,018769	4,833227
11	5,233712	5,028644
18	6,127966	5,817848
19	6,198231	5,877455
20	6,259331	5,928841
23	6,398837	6,044247

Επομένως, οι αξίες των ομολογιών θα είναι,

P = παρούσα αξία τοκομεριδίων + παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας

$$P_A = Ra_{0,15}^{10} + \frac{10.000}{(1,15)^{10}} = 500 * 5,0187 + \frac{10.000}{(1,15)^{10}} = 2.509,35 + 2.471,85$$

$$\Leftrightarrow P_A = 4.981$$

$$P_B = Ra_{0,15}^{20} + \frac{10.000}{(1,15)^{20}} = 500 * 6,2593 + \frac{10.000}{(1,15)^{20}} = 3.129,65 + 611 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_B = 3.741$$

Παρατηρούμε ότι και στη περίπτωση αυτή, η ομολογία βραχύτερου βίου να επηρεάζεται λιγότερο από την ομολογία μακρότερου βίου και συνεπώς να επιδεικνύει μικρότερη διακύμανση στις μεταβολές του επιτοκίου.

Άσκηση: Να βρεθεί η παρούσα αξία

α) εντόκου γραμματίου ονομαστικής αξίας 1.000 ευρώ, διάρκειας 8 μηνών, με ετήσιο επιτόκιο αγοράς 4%.

β) δεκαετούς ομολόγου ονομαστικής αξίας 1000 ευρώ με τοκομερίδιο 5 % επί της ονομαστικής αξίας και διάρκειας 4 ετών έως τη λήξη. Το επιτόκιο της αγοράς είναι 10 %

Λύση

α) Η παρούσα αξία του εντόκου γραμματίου υπολογίζεται με την προεξόφληση της ονομαστικής αξίας, δηλαδή:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t} \Leftrightarrow K_0 = \frac{1.000}{(1+0,04)^{8/12}} \Leftrightarrow K_0 = \frac{1.000}{1,026492} = 974,19$$



Να βρεθεί η παρούσα αξία

β) δεκαετούς ομολόγου ονομαστικής αξίας 1000 ευρώ με τοκομερίδιο 5 % επί της ονομαστικής αξίας και διάρκειας 4 ετών έως τη λήξη. Το επιτόκιο της αγοράς είναι 10 %

Λύση

$$P = \frac{T}{(1+i)} + \frac{T}{(1+i)^2} + \frac{T}{(1+i)^3} + \frac{T}{(1+i)^4} + \frac{F}{(1+i)^4}$$

$$T = 0,05 * 1000 = 50$$

$$P = \frac{50}{(1,10)} + \frac{50}{(1,10)^2} + \frac{50}{(1,10)^3} + \frac{50}{(1,10)^4} + \frac{1000}{(1,10)^4} = 841,5$$

Η τρέχουσα απόδοση (current yield) συσχετίζει το ποσό του τοκομεριδίου με την τιμή αγοράς του ομολόγου, εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις 100 (%). Υπολογίζεται ως :

$$y = \frac{T}{P} = \frac{50}{841,5} = 0,0594$$



Άσκηση: Ένα ομόλογο με ονομαστική αξία 1.000 ευρώ έχει διάρκεια 2 έτη και τοκομερίδιο 8 % (ετήσιο), το οποίο καταβάλλεται δυο φορές το χρόνο, μια κάθε εξάμηνο. Αν το ετήσιο επιτόκιο της αγοράς είναι 6 % ποια θα είναι η αξία του ομολόγου σήμερα και ποια η αξία του μετά την πληρωμή του πρώτου τόκου;

Λύση

Τοκομερίδιο 8% το οποίο αποπληρώνεται δυο φορές το χρόνο σημαίνει ότι ο επενδυτής θα λαμβάνει

- μια φορά κάθε εξάμηνο,
- τόκο που θα ισούται με το λόγο του αποτελέσματος του επιτοκίου 8 % επί την ονομαστική αξία με το δυο που είναι ο αριθμός των εξαμήνων. Επομένως,

$$\text{τόκος εξαμήνου} = \frac{1000 * 0,08}{2} = 40$$

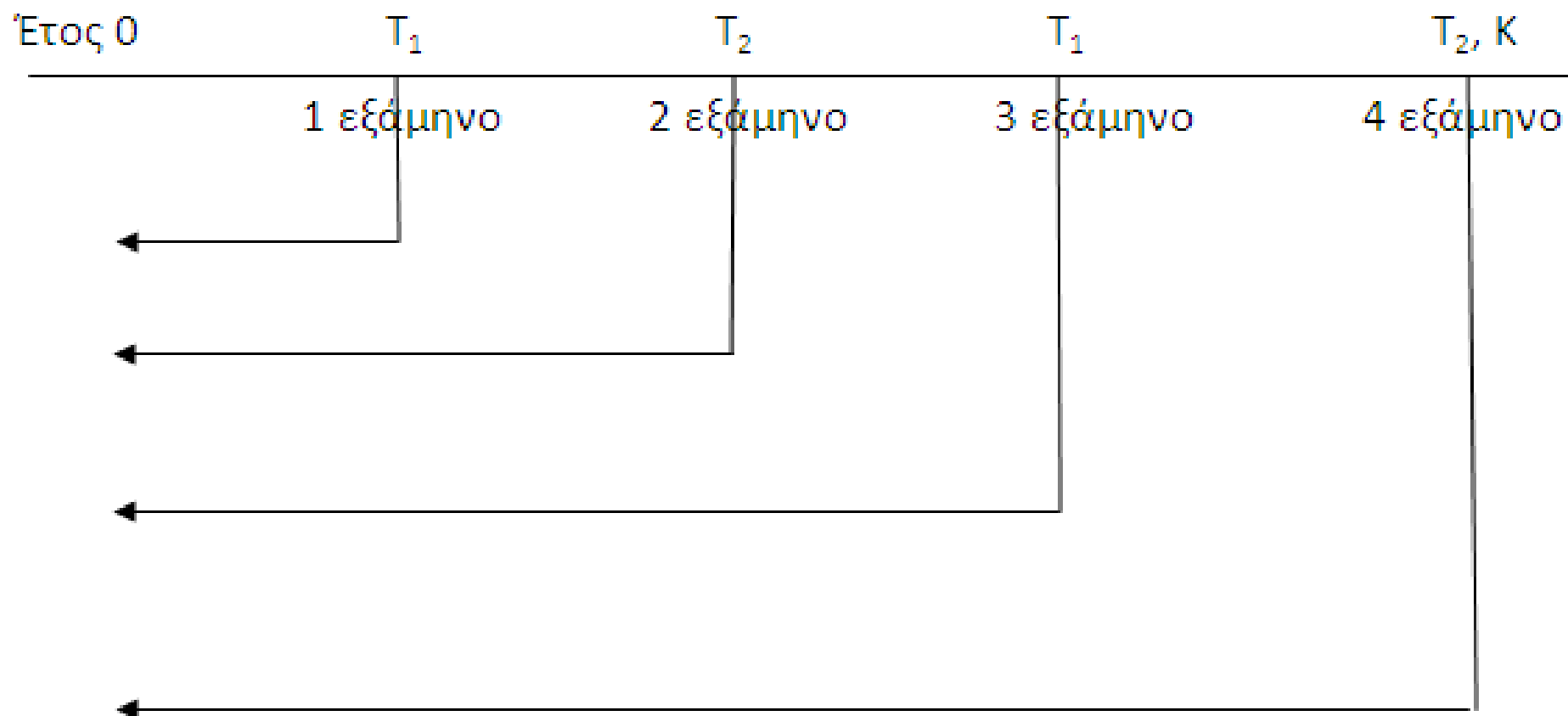


Ο επενδυτής θα λάβει συνολικά 4 κουπόνια σε ευρώ καθώς και την ονομαστική αξία των 1.000 ευρώ στη λήξη του ομολόγου.

Η παρούσα αξία του ομολόγου είναι ίση με την προεξοφλημένη αξία των κουπονιών και της ονομαστικής αξίας του ομολόγου.

Όπου T_1 , T_2 , T_3 και T_4 τα αντίστοιχα κουπόνια και όπου K η ονομαστική αξία του ομολόγου. 

Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{0,06}{2} = 0,03$



$$P = \frac{T_1}{(1+i)} + \frac{T_2}{(1+i)^2} + \frac{T_3}{(1+i)^3} + \frac{T_4}{(1+i)^4} + \frac{K}{(1+i)^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{40}{(1,03)} + \frac{40}{(1,03)^2} + \frac{40}{(1,03)^3} + \frac{40}{(1,03)^4} + \frac{1.000}{(1,03)^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 1037,17 \text{ ευρώ}$$



Παρατηρούμε ότι η αξία του ομολόγου είναι πάνω από την ονομαστική του αξία,

- αυτό συμβαίνει διότι το επιτόκιο του τοκομεριδίου είναι υψηλότερο από το επιτόκιο της αγοράς.

Εάν για παράδειγμα το επιτόκιο της αγοράς ήταν 8 % τότε η αξία του ομολόγου θα ήταν ακριβώς 1.000 ευρώ.

Η αξία του ομολόγου μετά την πληρωμή του πρώτου τόκου θα είναι:

$$P = \frac{40}{(1,03)^1} + \frac{40}{(1,03)^2} + \frac{40}{(1,03)^3} + \frac{1.000}{(1,03)^3} = 1028,29$$

Άσκηση: Εάν στο προηγούμενο παράδειγμα το επιτόκιο μειωθεί στο 4 % ποια θα είναι ή νέα αξία της ομολογίας σήμερα και ποια ένα εξάμηνο πριν την λήξη του;

Λύση

Εφόσον το ετήσιο επιτόκιο είναι 4 %, το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 2%. Συνεπώς η νέα αξία του ομολόγου είναι

$$P = \frac{40}{(1,02)} + \frac{40}{(1,02)^2} + \frac{40}{(1,02)^3} + \frac{40}{(1,02)^4} + \frac{1.000}{(1,02)^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 1076 \text{ ευρώ}$$



Παρατηρούμε ότι η μείωση του επιτοκίου αύξησε την αξία του ομολόγου.

Ασφαλώς, η τιμή του ομολόγου στη αγορά διαμορφώνεται από τη ζήτηση και την προσφορά και επομένως

- αν η **τιμή στην αγορά** είναι υψηλότερη από την παρούσα αξία τότε το ομόλογο είναι **υπερτιμημένο** και συστήνεται πώληση,

- αντίθετα αν η **τιμή στην αγορά** είναι χαμηλότερη από την παρούσα αξία τότε το ομόλογο θεωρείται **υποτιμημένο** και συστήνεται αγορά.

Ένα εξάμηνο πριν τη λήξη του ομολόγου ο επενδυτής θα αναμένει την είσπραξη ενός τοκομεριδίου 40 ευρώ και της ονομαστικής αξίας των 1.000 ευρώ.

$$P = \frac{40}{1,02} + \frac{1.000}{1,02} = 1.019 \text{ ευρώ}$$

Διηνεκής Ράντα

Όταν το πλήθος των όρων μιας ράντα είναι άπειρο, τότε η ράντα καλείται Διηνεκής. Η παρούσα αξία της άμεσης ληξιπρόθεσμης διηνεκούς ράντα είναι

$$\bullet A_{\infty} = R * a_{\infty}^i = R/i$$

Εφαρμογές

- Ένας φιλάνθρωπος θέλει να χορηγεί έπ' άπειρο μια ετήσια υποτροφία 1.000.000 στο τέλος κάθε χρόνου. Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 4 % ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα ο φιλάνθρωπος για να χορηγείται στο διηνεκές η υποτροφία ;
- Λύση
- $A_{\infty|} = R * \alpha_{\infty|}^i = R/i = 1.000.000/0,04 = 25.000.000$

- Μια επιχείρηση θέλει να χορηγεί έπ' άπειρο βοήθεια 10.000 στην τοπική κοινότητα όπου βρίσκεται το εργοστάσιό της. Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 9 % και οι καταβολές γίνονται στο τέλος κάθε χρόνου ποια η αξία της βοήθειας σήμερα.
- $A_{\infty 1} = R * \alpha^i_{\infty 1} = R/i = 10.000/0,09 = 111.111$

- Μια εταιρία επενδύσεων κάνει την έκπληξη στους επενδυτές δίνοντας μέρισμα 0,03 κάθε τρεις μήνες. Εάν το ετήσιο επιτόκιο είναι 12 % ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της μετοχής σήμερα;
- Λύση
- Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι $0,12/4=0,03$
- $P_1 = 0,03/0,03 = 1$ Ευρώ

Διηνεκής Ράντα με γεωμετρική αύξηση των όρων

- Όταν το πλήθος των όρων μιας ράντα είναι άπειρο, και οι όροι αυξάνονται γεωμετρικά κατά το ποσοστό g , τότε η παρούσα αξία της διηνεκούς ράντα δίνεται από τον τύπο

$$A_{\infty l} = \frac{R}{i - g}$$

Εφαρμογές

- Ο ιδιοκτήτης ενός διαμερίσματος αναμένει εισόδημα 5.000 Ευρώ τον επόμενο χρόνο αφαιρώντας τα τυχόν έξοδα (π.χ φόροι). Επίσης προσδοκά ότι το εισόδημα αυτό θα αυξάνει 5 % επ' άπειρο. Ποια θα είναι η δίκαιη τιμή πώλησης του διαμερίσματος αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 11 %.
- **Λύση**
- $$A_{\infty l} = \frac{R}{i-g} = \frac{5000}{0,11-0,05} = 83.333$$

- Μια επιχείρηση πρόκειται να πληρώσει 200 (= 2 ευρώ) λεπτά μέρισμα στο τέλος του έτους. Το μέρισμα αναμένεται να αυξηθεί κατά 8 % στα επόμενα 3 χρόνια, έπειτα προσδοκάται ότι η αύξηση θα είναι 4 % στο άπειρο. Το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 10 %. Ποια θα πρέπει να είναι η αποτίμηση της μετοχής σήμερα ($i=10\%$)

0	1	2	3	4	5 ...
	200	$200(1,08)$	$200(1,08)^2$	$200(1,08)^3$	$200(1,08)^3(1,04)$

$$A = \frac{200}{1,10} + \frac{200(1,08)}{(1,10)^2} + \frac{200(1,08)^2}{(1,10)^3} + \frac{200(1,08)^3}{(1,10)^4} + \frac{\frac{200(1,08)^3(1,04)}{0,10 - 0,04}}{(1,10)^4}$$

$$A = 182 + 179 + 175 + 172 + 2983 = 3691$$

- Μια εταιρία, εισηγμένη στο Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης (Dow) πλήρωσε χθες μέρισμα \$1,2 στη μετοχή της. Έχει υπολογιστεί ότι το ετήσιο μέρισμα θα αυξάνεται κατά 3%, 4% και 5 % στα επόμενα 3 χρόνια αντίστοιχα και 6 % στη συνέχεια. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 12 % ποια θα πρέπει να είναι η αξία της μετοχής σήμερα.

• 0 1 2 3 4

• **D1 D2 D3 D4**

• $D1 = 1,20 * 1,03 = 1,24$ $D3 = 1,29 * 1,05 = 1,35$

• $D2 = 1,24 * 1,04 = 1,29$ $D4 = 1,35 * 1,06 = 1,431$

$$P_0 = \frac{1,24}{1,12} + \frac{1,29}{(1,12)^2} + \frac{1,35}{(1,12)^3} + \frac{1,431}{(1,12)^3} = 20,07238$$

- Άσκηση: Μια εταιρία ανέλαβε ένα έργο το οποίο πρόκειται να ολοκληρωθεί σε 9 χρόνια και κοστίζει \$24.000 στο τέλος κάθε έτους. Τα έσοδα από τις δραστηριότητες του έργου θα έρθουν μετά 12 μήνες από την ολοκλήρωσή του. Επίσης η εταιρία υποθέτει ότι θα αυξάνει 4 % τα έσοδα κάθε χρόνου. Αν το επιτόκιο είναι 8 % ποιο θα πρέπει να είναι το ύψος των εσόδων το πρώτο έτος λειτουργίας για να μπορέσει να καλύψει το κόστος;

$$a_9^{0.08} = \frac{1 - (\frac{1}{1 + 0,08})^9}{0,08} = 6,25$$

- $A_{n1} = R a_{91}^8 = 24.000 * 6,25 = 150.000$

- 0 8 9 ← 10 11

$$p(Eσοδα) = \frac{\frac{R}{0,08 - 0,04}}{(1,08)^9} = 150.000 \Leftrightarrow R = 12.000$$

- Τρεις είναι οι σημαντικοί οίκοι αξιολόγησης διεθνώς.
- Ο οίκος αξιολόγησης **Standard & Poor's** που είναι ο αρχαιότερος όλων καθώς ιδρύθηκε το 1860.
- Ο οίκος αξιολόγησης **Moody's**, που ιδρύθηκε το 1909 και
- Ο οίκος **Fitch**, που ιδρύθηκε από το 1913.
- Ένας οίκος αξιολόγησης παρακολουθεί τις εξελίξεις και παράλληλα αξιολογεί και διαβαθμίζει την πιστοληπτική αξιοπιστία ενός Δημοσίου ή ενός Ιδιωτικού φορέα που προχωρά στην έκδοση χρεογράφων (Κρατικά ή Εταιρικά Ομόλογα).

- Κάθε οίκος αξιολόγησης διαθέτει και χρησιμοποιεί ξεχωριστό σύστημα διαβάθμισης για τα δανειζόμενα κράτη και τις επιχειρήσεις.
- Το σύστημα διαβάθμισης της **Fitch Ratings** έχει υιοθετηθεί και από την **Standard & Poor's**.
- Το σύστημα αξιολόγησης της Moody's διαφοροποιείται
 - δεν ενσωματώνει απλώς την πιθανότητα χρεοκοπίας ενός Δημοσίου
 - αλλά και το μέγεθος της ζημίας σε περίπτωση χρεοκοπίας.

- Η Standard & Poor's ακολουθεί ένα σύστημα γραμμάτων για να διαβαθμίσει την πιστοληπτική ικανότητα ενός Δημοσίου,
 - από το «AAA» (για τους ποιοτικότερες εκδόσεις ομολόγων με τον μικρότερο βαθμό ρίσκου)
 - και μέχρι το «C» που είναι και η χαμηλότερη διαβάθμιση που προβλέπει ο οίκος (υψηλότερου βαθμού ρίσκου).
- Η διαβάθμιση κατά «D» συνιστά περίπτωση πιστωτικού γεγονότος και αδυναμία πληρωμής υποχρεώσεων.

Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι κατηγορίες πιστοληπτικής διαβάθμισης της Standard & Poor's

- AAA' — Η ανώτατη δυνατή αξιολόγηση
- 'AA' — Πολύ μεγάλη ευκολία πληρωμής υποχρεώσεων
- 'A' — Μεγάλη ευκολία πληρωμής υποχρεώσεων αλλά όχι άριστη οικονομική κατάσταση
- 'BBB' — Ευκολία πληρωμής υποχρεώσεων αλλά ύπαρξη προβλημάτων της οικονομίας
- 'BBB' — Η χαμηλότερη κατηγορία επενδυτικής διαβάθμισης μετά ξεκινούν οι κατηγορίες υψηλού ρίσκου
- 'BB+' — Η υψηλότερη διαβάθμιση για την κατηγορία διαβάθμισης υψηλού ρίσκου



Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι κατηγορίες πιστοληπτικής διαβάθμισης της Standard & Poor's

- 'BB' — Υψηλό ρίσκο σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα αλλά βραχυπρόθεσμα ασφάλεια πληρωμών
- **'B' — Πολύ υψηλό ρίσκο σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα αλλά βραχυπρόθεσμα σχετική ασφάλεια πληρωμών**
- 'CCC' — Ύπαρξη ρίσκου ακόμα και σε βραχυπρόθεσμο ορίζοντα.
- 'CC' — Ύπαρξη μεγάλου ρίσκου ακόμα και σε βραχυπρόθεσμο ορίζοντα.
- 'C' — Ύπαρξη πολύ μεγάλου ρίσκου ακόμα και σε βραχυπρόθεσμο ορίζοντα.
- 'D' — Ύπαρξη πιστωτικού γεγονότος (credit event) και ανικανότητα πληρωμής υποχρεώσεων

Οι κύριοι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την πιστοληπτική ικανότητα ενός Δημοσίου, είναι

- -Υπάρχον ύψος υποχρεώσεων Δημοσίου Τομέα
- -Μακροοικονομικό Περιβάλλον (ΑΕΠ, Έλλειμμα, Πληθωρισμός, Ανεργία)
- -Διαθεσιμότητα περιουσιακών στοιχείων και εναλλακτικοί τρόποι χρηματοδότησης Δημόσιου Τομέα
- -Υπάρχον ύψος υποχρεώσεων Ιδιωτικού Τομέα
- -Διάρθρωση και ρευστότητα του εγχώριου Τραπεζοασφαλιστικού Τομέα
- -Διεθνής Κατάσταση Ανταγωνιστικότητας της οικονομίας

Οι κύριοι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την πιστοληπτική ικανότητα ενός Δημοσίου, είναι

- -Ιστορικό πληρωμών και ιστορική αξιοπιστία προβλέψεων
- -Ιστορική διακύμανση επιτοκίων αποπληρωμής
- -Προβλέψεις για την μελλοντική Καταναλωτική και
-Αποταμιευτική συμπεριφορά μιας οικονομίας
- -Πολιτικές εξελίξεις (political risk)
- -Εξωγενείς εξελίξεις και παράγοντες που διαμορφώνουν το ρίσκο (market risk και systemic risk)

Κίνδυνος επιτοκίου

- Οι μεταβολές στο γενικό επίπεδο των επιτοκίων προκαλούν διακυμάνσεις στις τιμές των χρεογράφων
 - Όσο βραχύτερη η λήξη του χρεογράφου τόσο μικρότερη και η διακύμανση
 - Γενικώς οι μακροπρόθεσμες ομολογίες φέρουν μεγαλύτερο κίνδυνο από τα βραχυπρόθεσμα χρεόγραφα
 - Οι επιχειρήσεις προτιμούν τα χρεόγραφα μικρότερης διάρκειας - μικρότερος κίνδυνος
 - Επιλέγουν μεγαλύτερης διάρκειας όταν δεν προβλέπεται ανάγκη για ρευστοποίηση

Πληθωριστικός Κίνδυνος

- Οι μεταβολές στο γενικό επίπεδο των τιμών επηρεάζουν την αγοραστική δύναμη
 - τόσο των επενδυμένων σε χρεόγραφα κεφαλαίων
 - όσο και των εισοδημάτων από τις επενδύσεις αυτές
- Η συνολική απόδοση μετριέται από το κεφαλαιακό κέρδος και την εισοδηματική απόδοση
 - Η αύξηση του πληθωρισμού οδηγεί σε μείωση των πραγματικών κερδών των χρεογράφων ακόμη και των μετοχών
 - Ο χρυσός εμπειρικά δείχνει να αντιστέκεται στις πιέσεις του πληθωρισμού

Κίνδυνος Ρευστοποίησης ή Εμπορευσιμότητας

- Είναι ο κίνδυνος που οφείλεται από την πιθανή μείωση της χρηματιστηριακής τιμής ενός χρεογράφου κατά το χρόνο της πώλησης
 - Ο κίνδυνος αυτός σχετίζεται με το βάθος αγοράς του συγκεκριμένου χρηματοπιστωτικού μέσου
 - Χρεόγραφα μικρότερων εταιριών συνήθως έχουν και μικρότερη εμπορευσιμότητα

Αποτίμηση τίτλων σταθερού εισοδήματος (<http://www.investing.com/rates-bonds/world-government-bonds>)

- Τίτλοι σταθερού εισοδήματος που εκδίδονται από τα κράτη και οργανισμούς δημοσίου είναι αξιόγραφα με σκοπό την άντληση κεφαλαίων από την αποταμίευση για την κάλυψη των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων αναγκών τους. Οι τίτλοι αυτοί απευθύνονται τόσο σε επενδυτές όσο και σε επιχειρήσεις και μεγάλους θεσμικούς επενδυτές και είναι διαπραγματεύσιμοι στις τράπεζες και στο Χρηματιστήριο.
- Οι τίτλοι σταθερού εισοδήματος μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως ακολούθως:



•Έντοκα Γραμμάτια (Treasury Bills).

- Είναι τίτλοι μικρής διάρκειας (μέχρι 12 μήνες), οι οποίοι πωλούνται στους επενδυτές σε τιμή χαμηλότερη από την ονομαστική τους αξία.
- Τα έντοκα γραμμάτια ενσωματώνουν τον τόκο στην ονομαστική τους αξία η οποία και καταβάλλεται κατά την ημερομηνία λήξης τους.

- **Ομόλογα Σταθερής Απόδοσης (Fixed – Rate Bonds).**

Είναι τίτλοι μέσης και μεγάλης διάρκειας, από δύο ως 15 έτη, οι οποίοι απευθύνονται σε θεσμικούς επενδυτές (τράπεζες, αμοιβαία κεφάλαια, ασφαλιστικούς οργανισμούς κ.ά.) και ιδιώτες επενδυτές που επιθυμούν να εξασφαλίσουν σταθερές ετήσιες αποδόσεις για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

- Τα ομόλογα αυτά φέρουν τοκομερίδια τα οποία εκφράζονται ως ποσοστό επί του κεφαλαίου και κάθε χρόνο αποφέρουν σταθερή πρόσοδο τόκων.



- Π.χ. ομόλογο ονομαστικής αξίας 1000 ευρώ πενταετούς διάρκειας με κουπόνι 5% συνεπάγεται ότι

- ο κάτοχος θα εισπράττει τόκο 50 ευρώ **κάθε έτος** και

- **στο τέλος της πενταετίας** θα εισπράξει πίσω

- το κεφάλαιο των 1000 ευρώ συν τους τόκους 50 ευρώ που αναλογούν στο εν λόγω έτος.

- Το επιτόκιο των τοκομεριδίων προσδιορίζεται και ανακοινώνεται πριν από την έκδοση των τίτλων.

- Ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών γίνεται με βάση τις 360 ημέρες για ένα έτος και 30 ημέρες για ένα μήνα (30/360).

•Ομόλογα Κυμαινόμενου Επιτοκίου (Floating – Rate Notes).

- Είναι τίτλοι μέσης και μεγάλης διάρκειας,
 - οι οποίοι απευθύνονται σε θεσμικούς επενδυτές και ιδιώτες επενδυτές
 - που επιθυμούν αποδόσεις ανάλογες με την διακύμανση διαφόρων χρηματοοικονομικών μέσων.
- Το τοκομερίδιο προέρχεται από ονομαστικό επιτόκιο, συνήθως γνωστό στην αρχή κάθε έτους, συνδεδεμένο
 - είτε με το ύψος βραχυπρόθεσμων επιτοκίων,
 - είτε με κάποιο χρηματιστηριακό ή άλλο χρηματοοικονομικό/οικονομικό δείκτη π.χ. συναλλαγματική ισοτιμία.

•Ομόλογα Κυμαινόμενου Επιτοκίου

- Το τοκομερίδιο των εν λόγω ομολόγων προσδιορίζεται από ένα επιτόκιο αναφοράς που αποτελεί συνήθως τη βάση κάτω από την οποία δεν πέφτει η απόδοσή τους,

- π.χ το επιτόκιο βάσης στην Ελληνική αγορά καθοριζόταν από το ονομαστικό επιτόκιο των ετήσιων εντόκων γραμματίων του ελληνικού δημοσίου.

- Η εξόφληση πραγματοποιείται στη λήξη τους ,

- ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών γίνεται με βάση τον πραγματικό αριθμό ημερών που έχει η κάθε τοκοφόρος περίοδος από την ημερομηνία έναρξής της ως και την ημερομηνία λήξης της.

- **Ομόλογα χωρίς Τοκομερίδια (Zero Coupon Bonds).**

- Είναι τίτλοι μικρής ή μέσης διάρκειας οι οποίοι απευθύνονται σε θεσμικούς επενδυτές και ιδιώτες επενδυτές που επιθυμούν σταθερές αποδόσεις.

- δεν δίνουν τοκομερίδιο

- η απόδοση τους προκύπτει από τη χαμηλότερη τιμή αγοράς τους σε σχέση με την ονομαστική τους αξία.

- Η ονομαστική τους αξία αποτελεί την τελική πληρωμή που ο επενδυτής εισπράττει κατά την ημερομηνία λήξης τους,

- οι τόκοι υπολογίζονται από τη διαφορά της ονομαστικής αξίας από την τιμή αγοράς τους.

- Ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών γίνεται με βάση τις 360 ημέρες για ένα έτος και 30 ημέρες για ένα μήνα (30/360).

- **Τιμαριθμοποιημένα Ομόλογα με Τοκομερίδια.**
- Τα τιμαριθμοποιημένα ομόλογα είναι τίτλοι μέσης και μεγάλης διάρκειας,
 - απευθύνονται κυρίως σε θεσμικούς και μεγάλους επενδυτές
 - με σκοπό την εξασφάλιση σταθερών πραγματικών αποδόσεων πάνω από τον πληθωρισμό για σχετικά μεγάλα χρονικά διαστήματα.
- Τα ομόλογα αυτά αγοράζονται κατά την ημερομηνία έκδοσής τους στην ονομαστική τους αξία,
 - εξοφλούνται σε υψηλότερες τιμές, ανάλογα με την εξέλιξη του πληθωρισμού.
- Τα τοκομερίδια τους δεν υπολογίζονται στην ονομαστική τους αξία αλλά στην τιμαριθμοποιημένη αξία των εν λόγω ομολόγων, αναπροσαρμοζόμενη κάθε χρόνο σύμφωνα με την εξέλιξη του πληθωρισμού.



Στην περίπτωση αντιπληθωρισμού

- αρνητικός πληθωρισμός
- ο επενδυτής λαμβάνει την ονομαστική αξία των ομολόγων στην λήξη τους.
- Να σημειωθεί ότι το επιτόκιο των τοκομεριδίων εξάγεται με βάση την ετήσια σταθερή πραγματική απόδοση
- Γενικός Δείκτης καταναλωτή.
- Ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών γίνεται με βάση τις 360 ημέρες για ένα έτος και 30 ημέρες για ένα μήνα.
- Τίτλοι σταθερού εισοδήματος ή αλλιώς ομολογίες εκδίδονται και από ανώνυμες εταιρίες και είναι πιστοποιητικά χρέους με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από ένα έτος.

Ομολογιακά Δάνεια Εταιρειών

Στα πλαίσια της εξεύρεσης μεσοπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων κεφαλαίων,

- οι εταιρίες δύναται να εκδώσουν ομολογιακά δάνεια τα οποία αποτελούν εναλλακτικό τρόπο χρηματοδότησης έναντι του **τραπεζικού δανεισμού** και της **αυξήσεως μετοχικού κεφαλαίου**.

Στην Ελλάδα ο νόμος που διέπει σήμερα τα ομολογιακά δάνεια είναι ο Ν. 3156/2003,

- σύμφωνα με τον οποίο ομολογιακό είναι
 - το δάνειο που εκδίδεται από ανώνυμη εταιρία και
 - διαιρείται σε **ομολογίες**
 - **οι οποίες** αντιπροσωπεύουν δικαιώματα των ομολογιούχων έναντι της εκδότριας

Κατά την έκδοση του ομολογιακού δανείου αποφασίζεται

- η ονομαστική αξία κάθε ομολογίας,
- το τοκομερίδιο που τη συνοδεύει καθώς και
- η συχνότητα πληρωμής τους

Ο εκδότης του ομολογιακού δανείου

- **ανώνυμες εταιρίες**

- **αναλαμβάνει** την υποχρέωση να καταβάλει,
 - ανάλογα με το επιτόκιο ή αλλιώς τον κίνδυνο που διατρέχει την εταιρία,

- **τόκο (τοκομερίδιο),**

- στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, για όλη τη διάρκεια ζωής της ομολογίας.

- Η φερεγγυότητα του εκδότη καθορίζει και το επιτόκιο με το οποίο δανείζεται.

- Όσο μεγαλύτερη ασφάλεια παρέχεται στους επενδυτές – δανειστές τόσο πιο μικρό επιτόκιο ορίζεται.

Οι ομολογίες μπορούν να αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε οργανωμένες αγορές

- όπως είναι στην Ελλάδα η Ηλεκτρονική Δευτερογενής Αγορά Τίτλων (ΗΔΑΤ)

Οι τιμές των ομολογιών διαμορφώνονται στη δευτερογενή αγορά από την προσφορά και ζήτησης και επηρεάζονται

- πρώτιστος από την φερεγγυότητα του εκδότη και την πορεία των επιτοκίων και

- δευτερεύοντος από την γενικότερη κατάσταση της οικονομίας.

Η μείωση των επιτοκίων επιφέρει **αύξηση** στην αξία των ομολογιών και αντίστροφα.

Η μείωση των επιτοκίων έχει ως αποτέλεσμα οι νέες εκδόσεις των ομολογιών να ορίζονται με βάση τα νέα χαμηλότερα επιτόκια,

- γεγονός που προκαλεί αύξηση στη ζήτηση των παλαιότερων ομολογιών με το υψηλότερο επιτόκιο και άρα τις μεγαλύτερες αποδόσεις.

- Ως εκ τούτου, η μείωση των επιτοκίων επηρεάζει ανοδικά τις τιμές των παλαιότερων ομολογιών.

Αντίθετα, η αύξηση των επιτοκίων της αγοράς καταστεί τις νέες εκδόσεις ελκυστικότερες με αποτέλεσμα οι επενδυτές να τις προτιμούν έναντι των παλαιότερων με το χαμηλό επιτόκιο,

- γεγονός που προκαλεί ρευστοποιήσεις παλαιότερων ομολογιών πιέζοντας ταυτόχρονα την τιμή τους προς τα κάτω.