



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Καθηγητής Ι. Μητρόπουλος

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Τηλ.: +030 2610 369213, email: imitro@upatras.gr

Διεύθυνση: Μεγάλου Αλεξάνδρου 1, 263 34 ΠΑΤΡΑ

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση (I)

ΕΝΟΤΗΤΑ 7^η: Η Κανονική Κατανομή

Στόχοι

Σε αυτό το κεφάλαιο μαθαίνετε:

- Να υπολογίζετε πιθανότητες από την κανονική κατανομή
- Πώς να χρησιμοποιείτε την κανονική κατανομή για την επίλυση επιχειρηματικών προβλημάτων
- Να χρησιμοποιείτε το διάγραμμα κανονικής πιθανότητας για να προσδιορίσετε αν ένα σύνολο δεδομένων είναι κατά προσέγγιση κανονικά κατανεμημένο

Συνεχείς Κατανομές Πιθανοτήτων

- Μια **συνεχής μεταβλητή** είναι μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα συνεχές (μπορεί να πάρει έναν αμέτρητο αριθμό τιμών)
 - πάχος ενός αντικειμένου
 - χρόνος αποπεράτωσης μιας εργασίας
 - θερμοκρασία διαλύματος
 - ύψος σε ίντσες
- Αυτά μπορεί ενδεχομένως να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ανάλογα με την ικανότητα μέτρησης με ακρίβεια

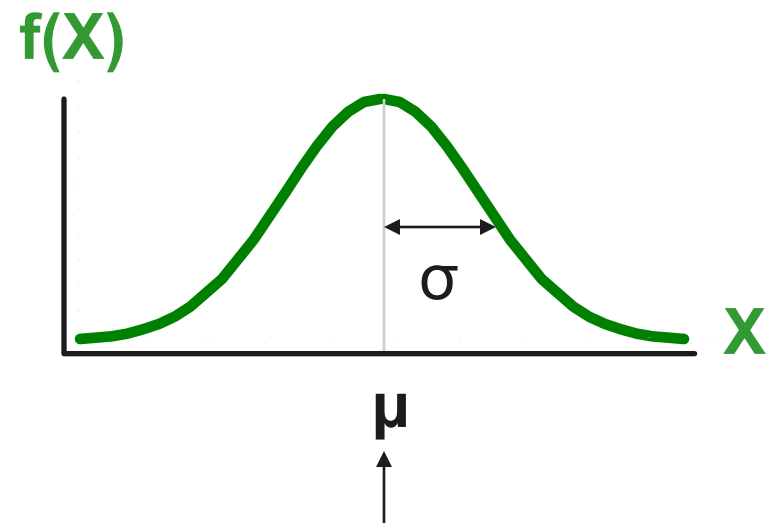
Η Κανονική Κατανομή

- Σχήμα καμπάνας
- Συμμετρική
- Μέσος Όρος, Διάμεσος και Επικρατούσα Τιμή είναι ίσα

Η θέση καθορίζεται από το μέσο όρο, μ

Η διασπορά καθορίζεται από την τυπική απόκλιση, σ

Η τυχαία μεταβλητή έχει ένα άπειρο θεωρητικό εύρος:
 $+\infty$ εως $-\infty$



**Μέσος όρος
= Διάμεσος
= Επικρατούσα Τιμή**

Κανονική Κατανομή

Συνάρτηση Πυκνότητας

- Ο τύπος για την συνάρτηση πυκνότητας κανονικής πιθανότητας είναι

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Όπου e = μαθηματική σταθερά περίπου ίση με 2,71828

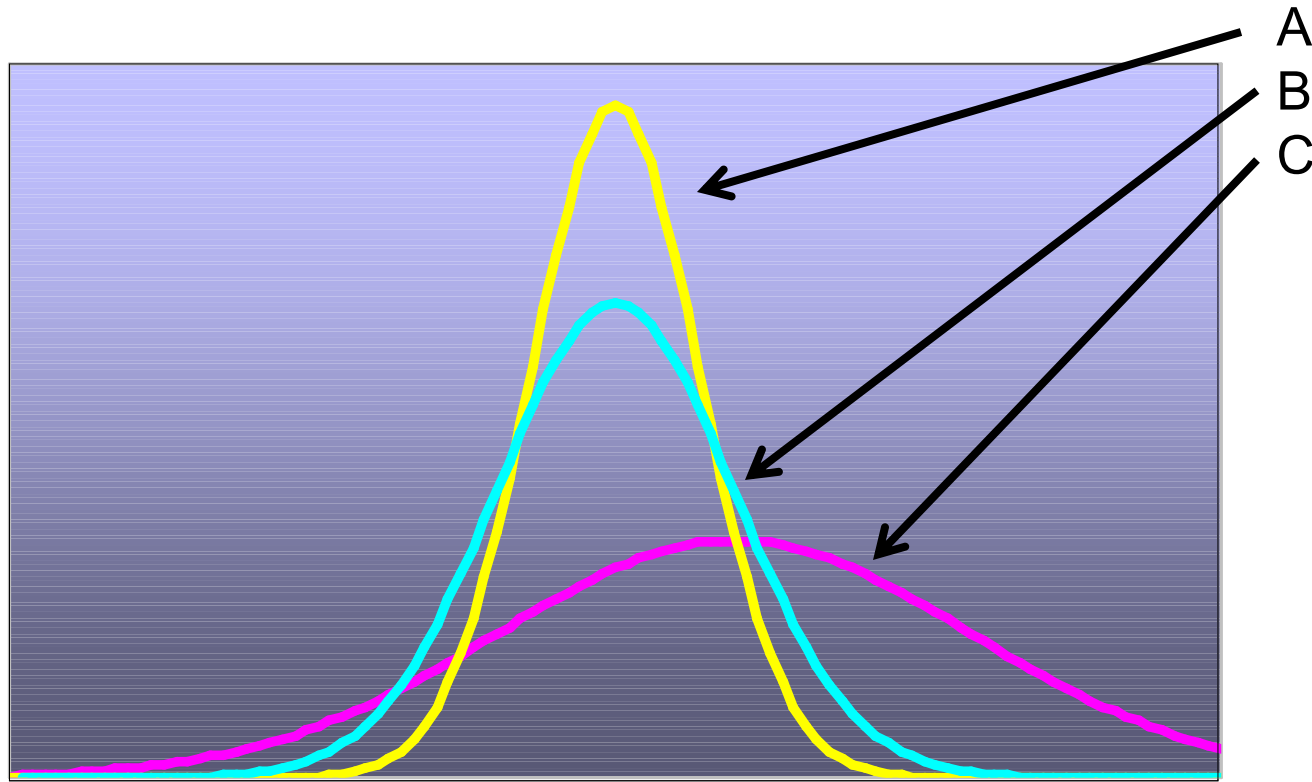
π = μαθηματική σταθερά περίπου ίση με 3,14159

μ = μέσος όρος του πληθυσμού

σ = τυπική απόκλιση του πληθυσμού

X = οποιαδήποτε τιμή της συνεχούς μεταβλητής

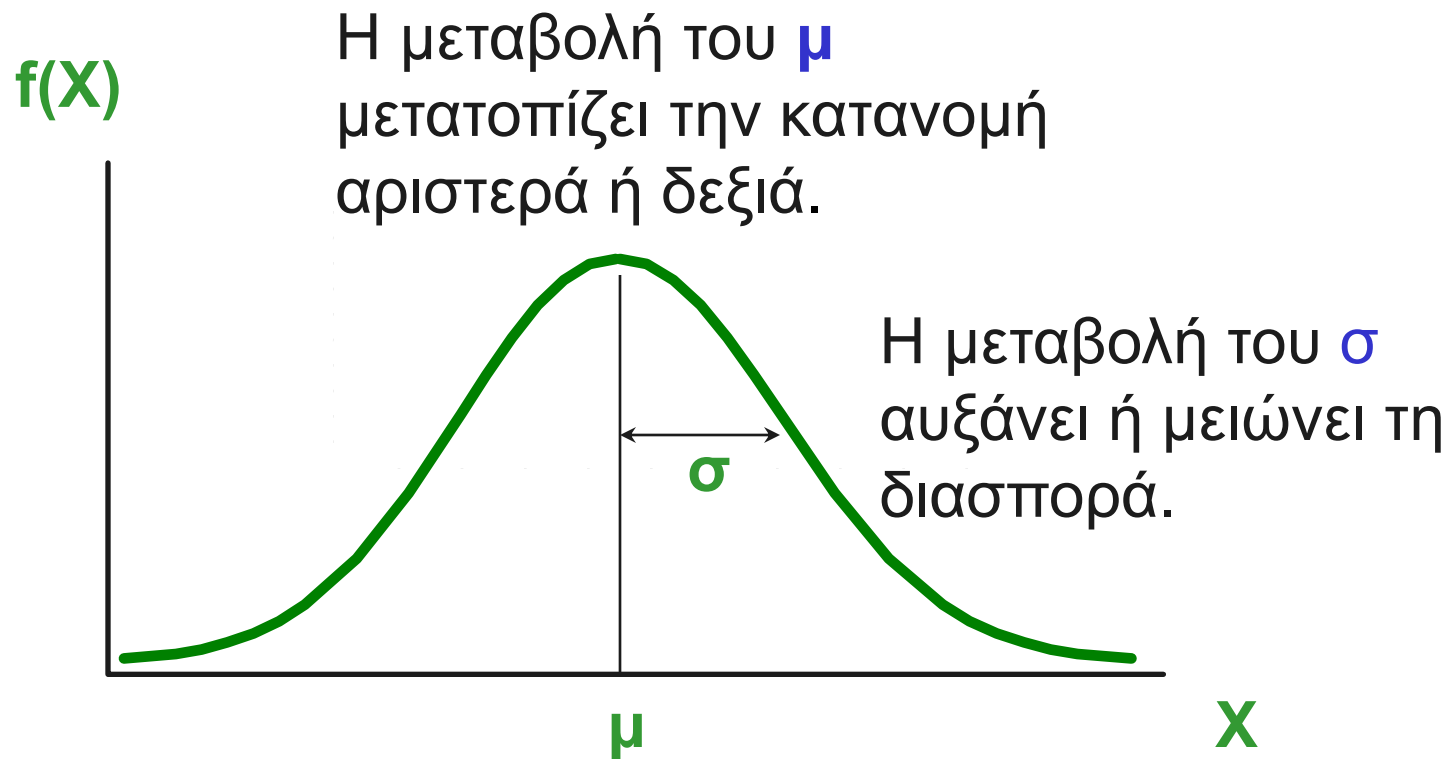
Με την μεταβολή των παραμέτρων μ και σ , επιτυγχάνουμε διαφορετικές κανονικές κατανομές



Οι A και B έχουν τον ίδιο μέσο όρο αλλά διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις.

Οι B και C έχουν διαφορετικούς μέσους όρους και διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις.

Το Σχήμα Κανονικής Κατανομής



Τυποποιημένη Κανονική

- Οποιαδήποτε κανονική κατανομή (με οποιοδήποτε συνδυασμό μέσου όρου και τυπικής απόκλισης) μπορεί να μετασχηματιστεί σε τυποποιημένη κανονική κατανομή (Z)
- Για να υπολογίσετε κανονικές πιθανότητες πρέπει να μετασχηματίσετε X μονάδες σε Z μονάδες
- Η τυποποιημένη κανονική κατανομή (Z) έχει μέσο όρο 0 και τυπική απόκλιση 1

Μεταφορά στην Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Μεταφορά από την X στην τυποποιημένη κανονική (την “ Z ” κατανομή) αφαιρώντας τον μέσο όρο από το X και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Η κατανομή Z έχει πάντα μέσο όρο = 0 και τυπική απόκλιση = 1

Η Τυποποιημένη Συνάρτηση Πυκνότητας Κανονικής Πιθανότητας

- Ο τύπος της τυποποιημένης συνάρτησης πυκνότητας κανονικής πιθανότητας είναι

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)Z^2}$$

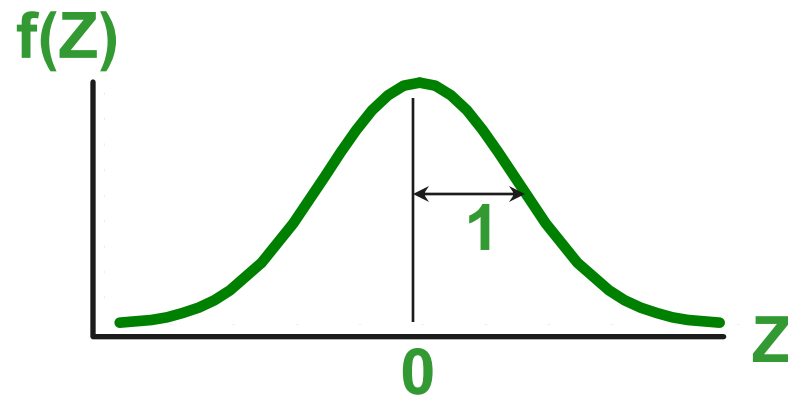
Όπου e = η μαθηματική σταθερά περίπου ίση με 2,71828

π = η μαθηματική σταθερά περίπου ίση με 3,14159

Z = οποιαδήποτε τιμή από την τυποποιημένη κανονική κατανομή

Η Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Γνωστή και ως “Z” κατανομή
- Ο μέσος όρος είναι 0
- Η τυπική απόκλιση είναι 1



Οι τιμές πάνω από τον μέσο όρο έχουν **θετικές** Z-τιμές.

Οι τιμές κάτω από το μέσο όρο έχουν **αρνητικές** Z-τιμές.

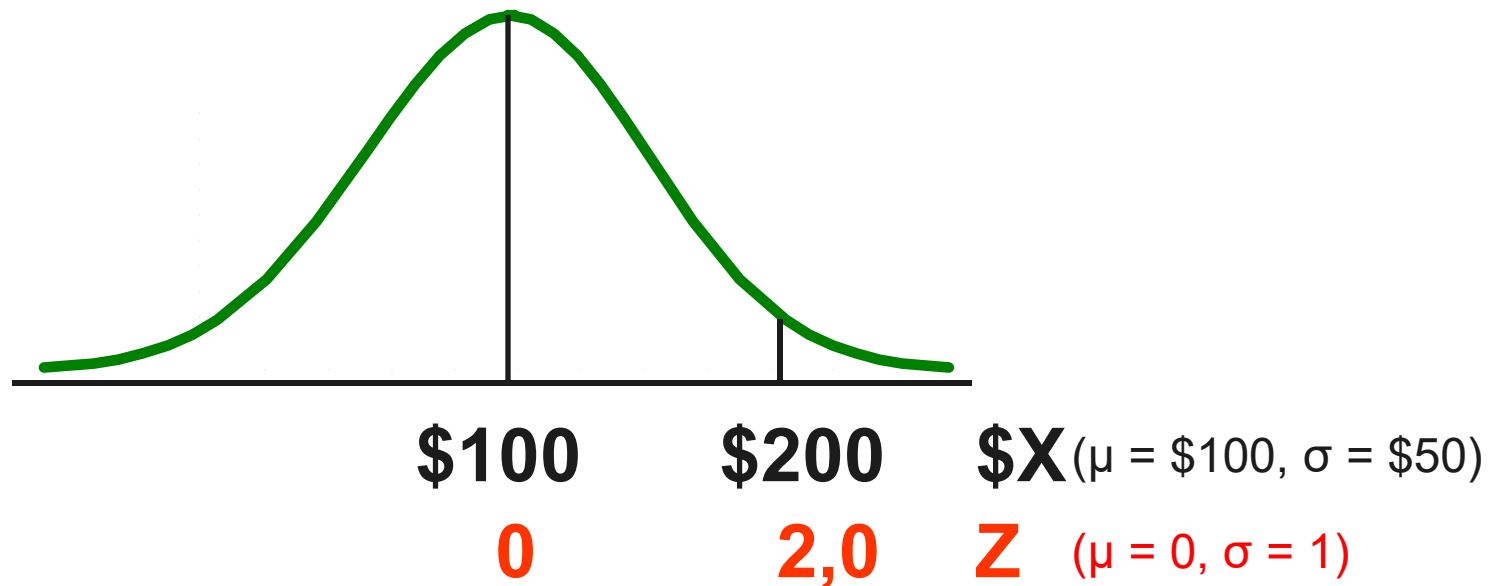
Παράδειγμα

- Αν η X είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή \$100 και τυπική απόκλιση \$50, η Z τιμή για $X = \$200$ είναι

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$200 - \$100}{\$50} = 2,0$$

- Αυτό σημαίνει ότι η $X = \$200$ είναι δύο τυπικές αποκλίσεις (2 φορές αύξηση των \$50 μονάδων) πάνω από τον μέσο όρο των \$100.

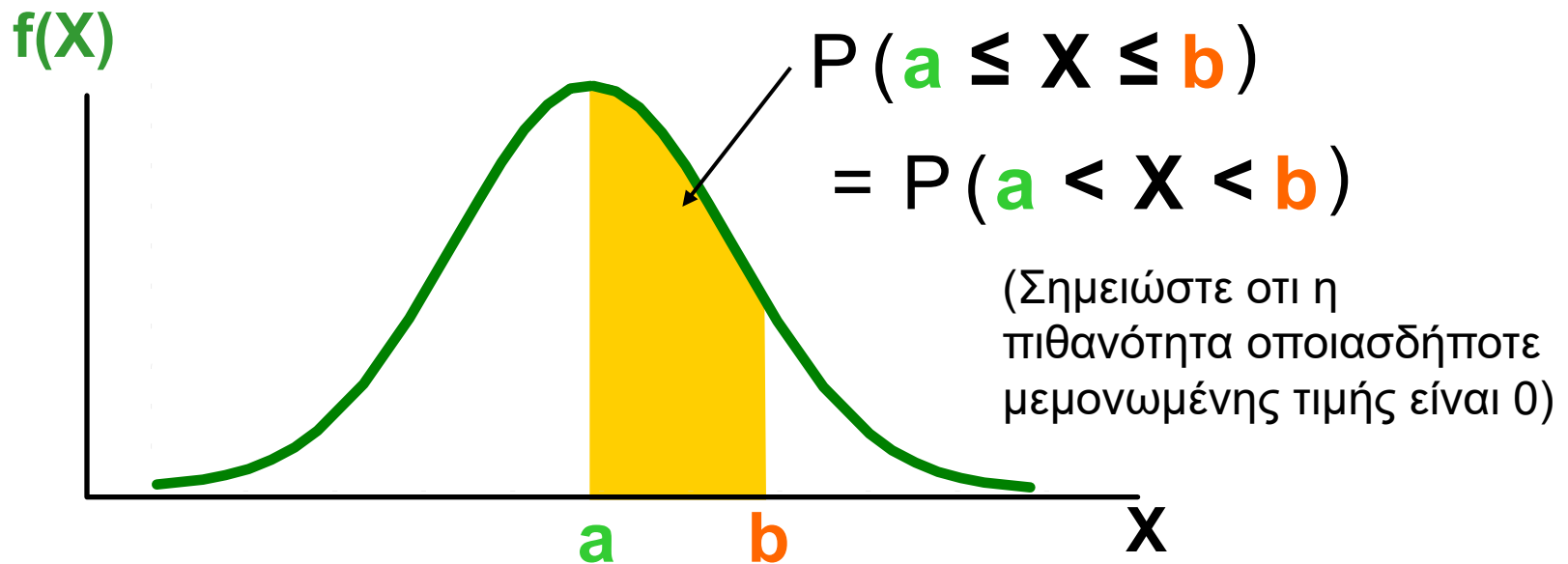
Σύγκριση των X και Z μονάδων



Σημειώστε ότι το σχήμα της κατανομής είναι το ίδιο, μόνο η κλίμακα έχει αλλάξει. Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα στις αρχικές του μονάδες (X σε δολάρια) ή σε τυποποιημένες μονάδες (Z)

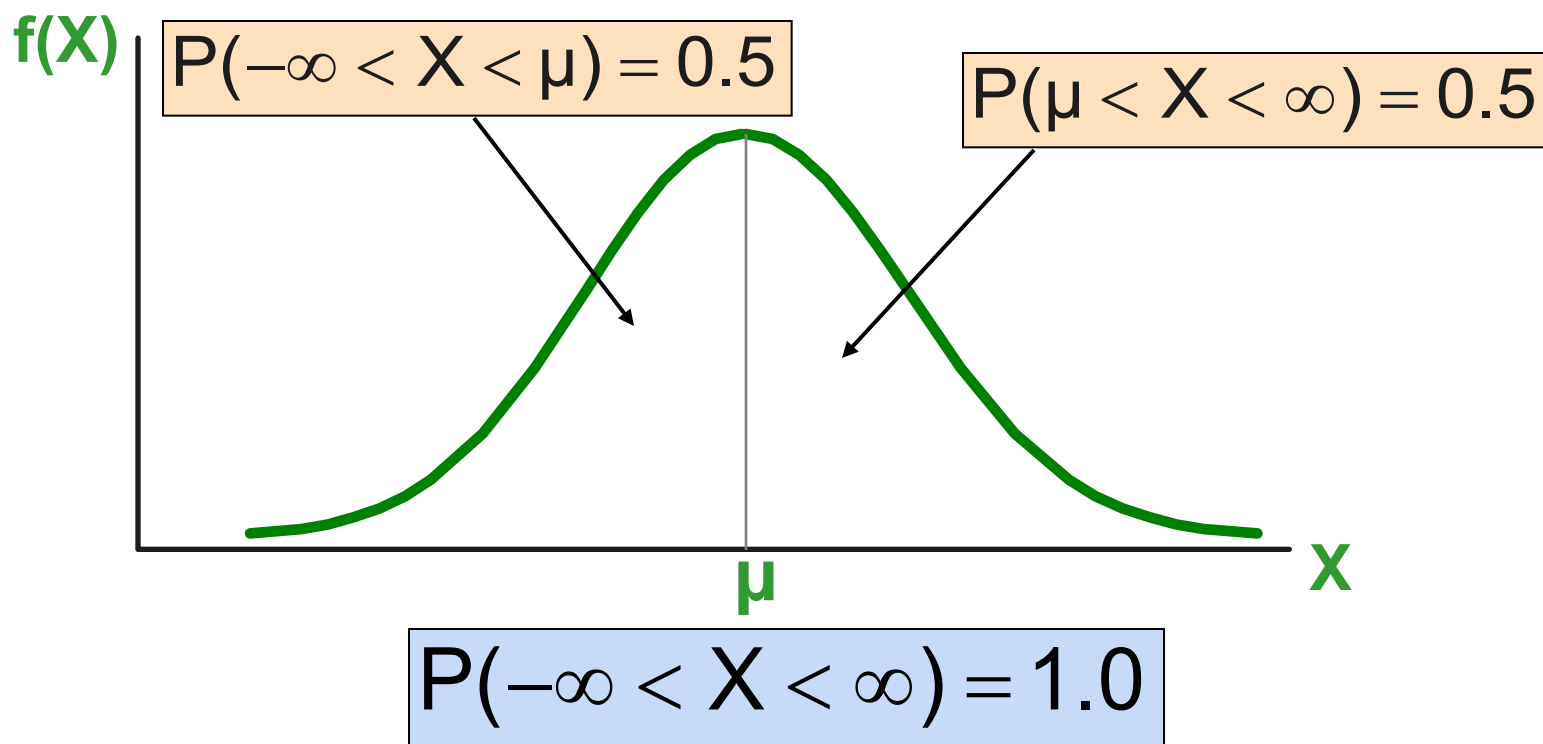
Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

Η πιθανότητα μετράται από την περιοχή κάτω από την καμπύλη



Η Πιθανότητα ως Περιοχή Κάτω Από την Καμπύλη

Η συνολική περιοχή (έκταση) κάτω από την καμπύλη είναι 1,0, και η καμπύλη είναι συμμετρική, έτσι το μισό είναι πάνω από το μέσο όρο και το μισό είναι κάτω

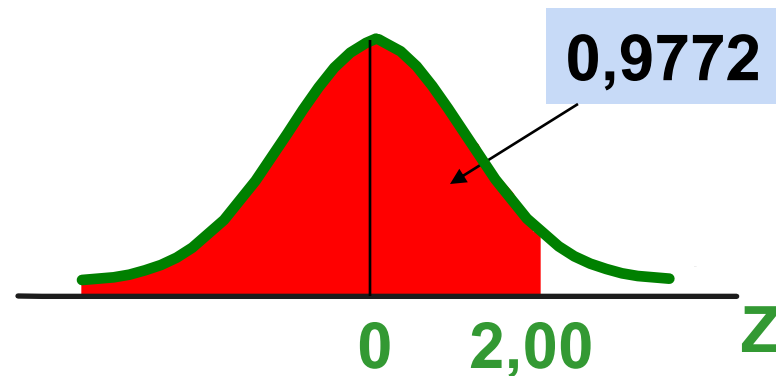


Ο Τυποποιημένος Κανονικός Πίνακας

- Ο Αθροιστικός Τυποποιημένος Κανονικός πίνακας στο βιβλίο (Σύνοψη Πίνακας Ε.2) δίνει την πιθανότητα **μικρότερη από** μια επιθυμητή τιμή του Z (δηλ., από το αρνητικό άπειρο στο Z)

Παράδειγμα:

$$P(Z < 2,00) = 0,9772$$



Ο Τυποποιημένος Κανονικός Πίνακας

(συνέχεια)

Η **στήλη** δίνει την τιμή της Z
στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο

Η **γραμμή** δείχνει
την τιμή της Z
στο πρώτο
δεκαδικό ψηφίο

Z	0,00	0,01	0,02 ...
0,0			
0,1			
⋮			
⋮			
⋮			
2,0	0,9772		

Η τιμή μέσα στον
πίνακα δίνει την
πιθανότητα από το
 $Z = -\infty$ μέχρι την
επιθυμητή Z τιμή

$$P(Z < 2,00) = 0,9772$$

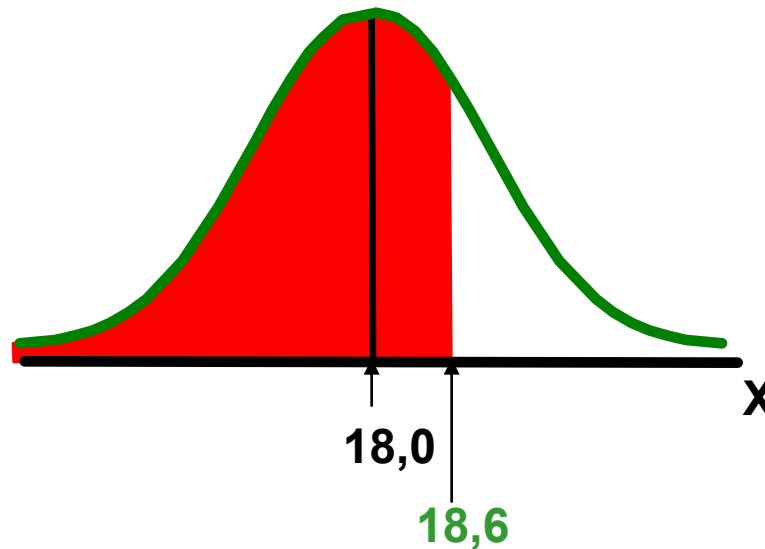
Γενική Διαδικασία για την Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

Για να βρείτε την $P(a < X < b)$ όταν η X κατανέμεται κανονικά:

- Σχεδιάστε την κανονική καμπύλη για το πρόβλημα όσον αφορά την X
- Μετατρέψτε τις X -τιμές σε Z -τιμές
- Χρησιμοποιήστε τον Τυποποιημένο Κανονικό Πίνακα

Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

- Θεωρείστε ότι το X παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται (σε δευτερόλεπτα) για να κατεβάσετε ένα αρχείο εικόνας από το διαδίκτυο.
- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέσο όρο 18,0 δευτερόλεπτα και τυπική απόκλιση 5,0 δευτερόλεπτα. Βρείτε την $P(X < 18,6)$

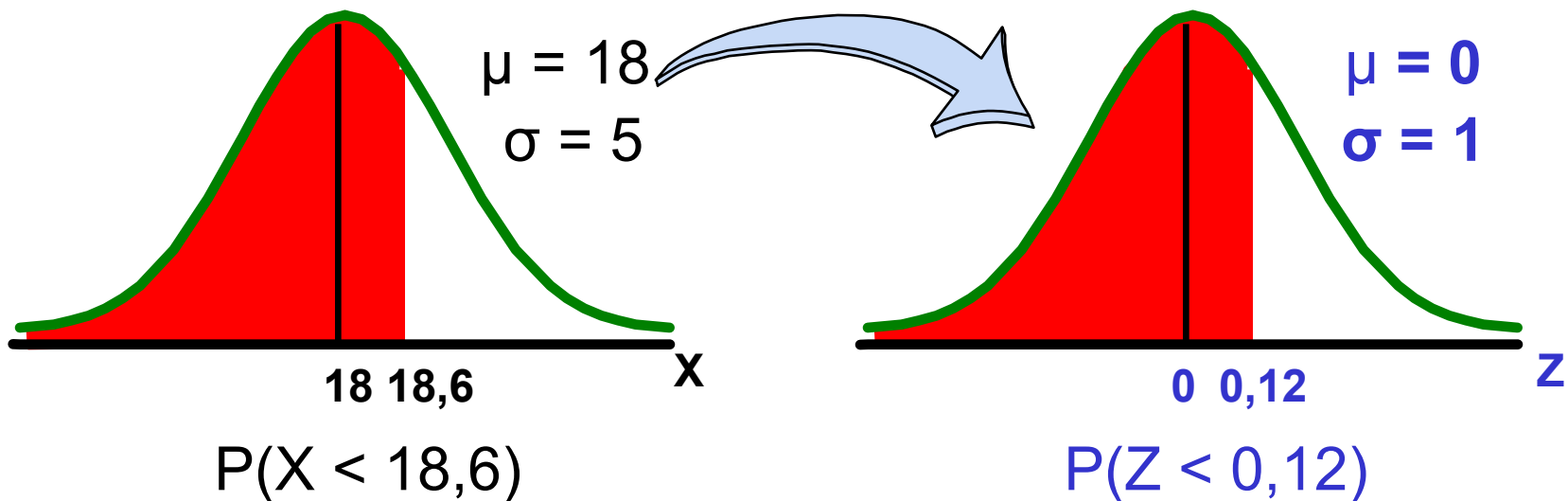


Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

(συνέχεια)

- Θεωρείστε ότι το X παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται, σε δευτερόλεπτα για να κατεβάσετε ένα αρχείο εικόνας από το διαδίκτυο.
- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέσο όρο 18,0 δευτερόλεπτα και τυπική απόκλιση 5,0 δευτερόλεπτα. Βρείτε την $P(X < 18,6)$

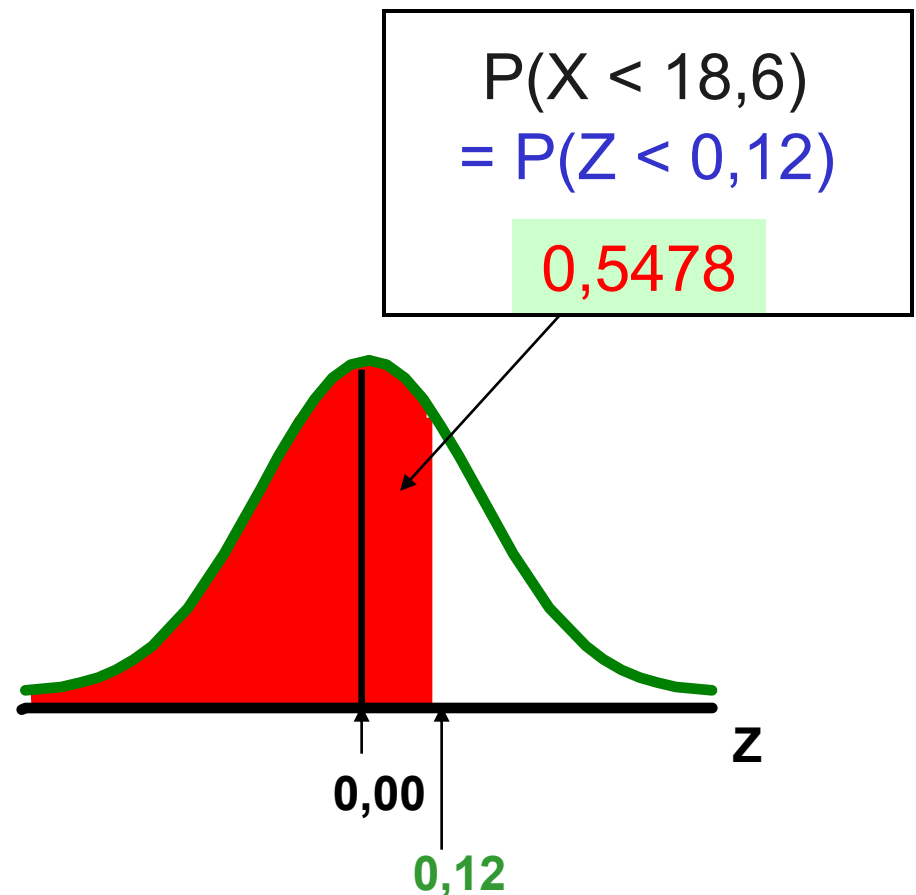
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18.6 - 18.0}{5.0} = 0.12$$



Λύση: Εύρεση της $P(Z < 0,12)$

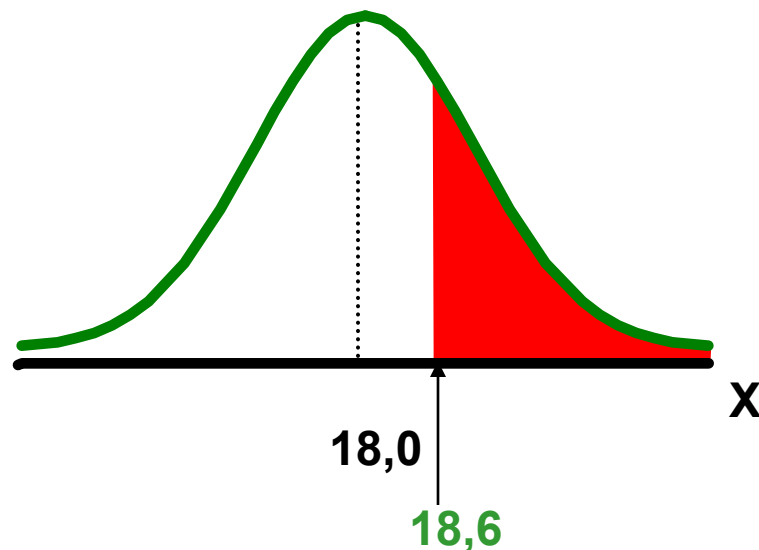
Πίνακας Τυποποιημένης
Κανονικής Πιθανότητας
(Μέρος)

Z	,00	,01	,02
0,0	,5000	,5040	,5080
0,1	,5398	,5438	,5478
0,2	,5793	,5832	,5871
0,3	,6179	,6217	,6255



Εύρεση Κανονικών Άνω Άκρου Πιθανοτήτων

- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέσο όρο 18,0 και τυπική απόκλιση 5,0.
- Τώρα βρείτε την $P(X > 18,6)$

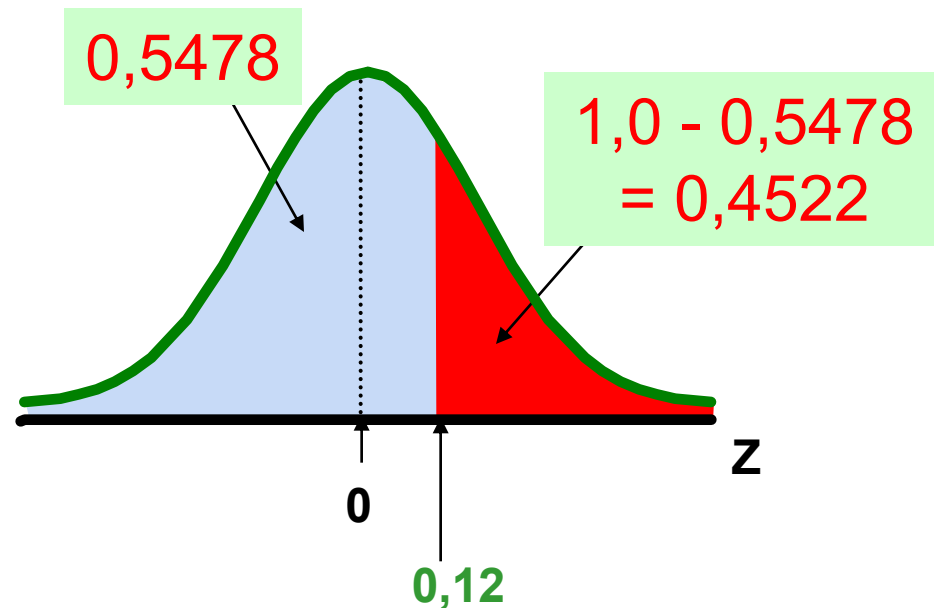
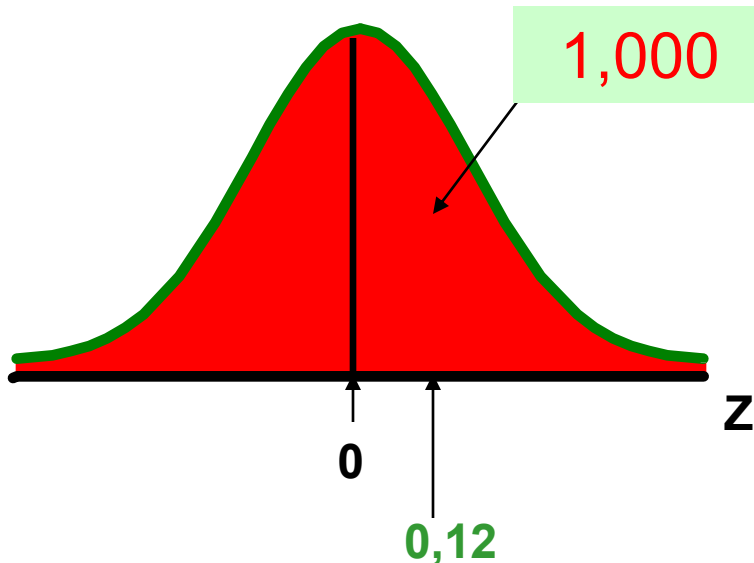


Εύρεση Κανονικών Άνω Άκρου Πιθανοτήτων

(συνέχεια)

- Τώρα βρείτε την $P(X > 18,6)$...

$$\begin{aligned} P(X > 18,6) &= P(Z > 0,12) = 1,0 - P(Z \leq 0,12) \\ &= 1,0 - 0,5478 = \mathbf{0,4522} \end{aligned}$$



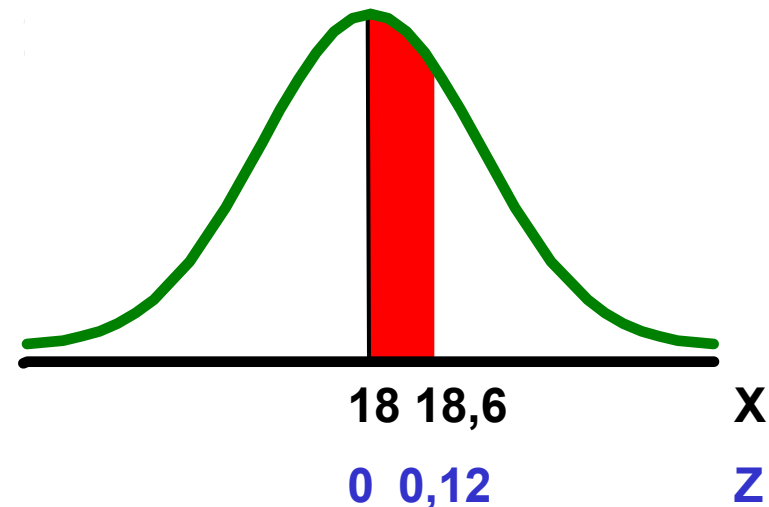
Εύρεση Κανονικής Πιθανότητας Μεταξύ Δύο Τιμών

- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέσο όρο 18,0 και τυπική απόκλιση 5,0. Βρείτε την $P(18 < X < 18,6)$

Υπολογίζετε τις Z-τιμές:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18 - 18}{5} = 0$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18.6 - 18}{5} = 0.12$$



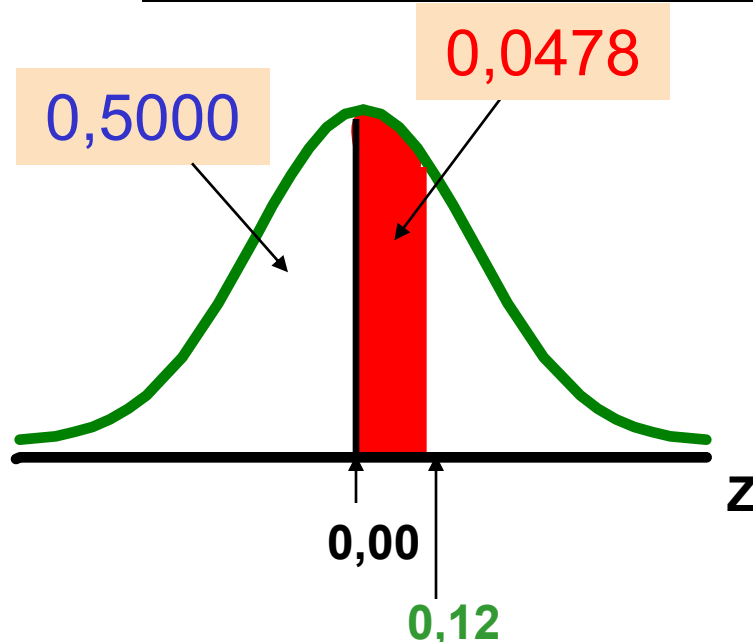
$$P(18 < X < 18,6) \\ = P(0 < Z < 0,12)$$

Λύση: Εύρεση της $P(0 < Z < 0,12)$

Πίνακας Τυποποιημένης
Κανονικής Πιθανότητας
(Μέρος)

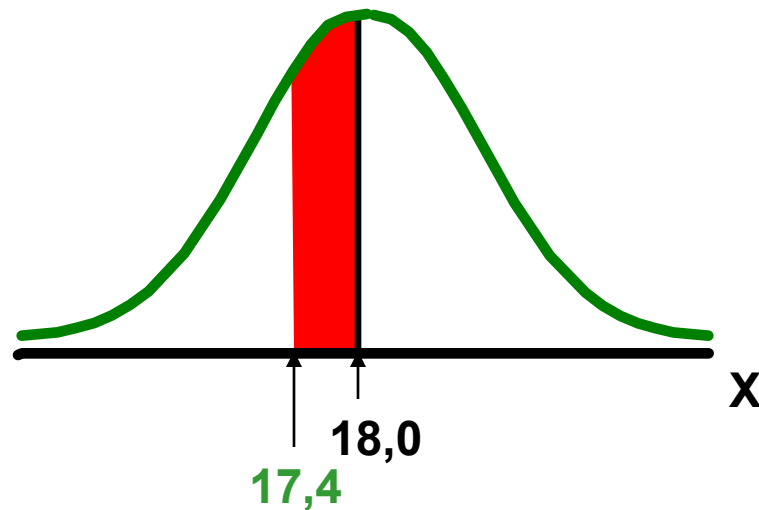
Z	,00	,01	,02
0,0	,5000	,5040	,5080
0,1	,5398	,5438	,5478
0,2	,5793	,5832	,5871
0,3	,6179	,6217	,6255

$$\begin{aligned}P(18 < X < 18,6) \\&= P(0 < Z < 0,12) \\&= P(Z < 0,12) - P(Z \leq 0) \\&= 0,5478 - 0,5000 = 0,0478\end{aligned}$$



Πιθανότητες στο Κάτω Άκρο

- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέσο όρο 18,0 και τυπική απόκλιση 5,0,
- Τώρα βρείτε την $P(17,4 < X < 18)$



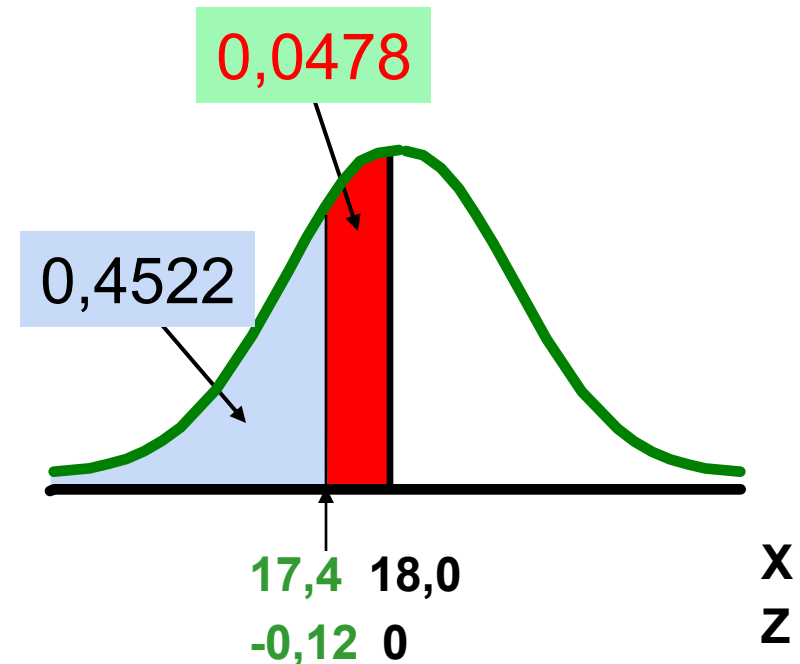
Πιθανότητες στο Κάτω Άκρο

(συνέχεια)

Τώρα βρείτε την $P(17,4 < X < 18)$...

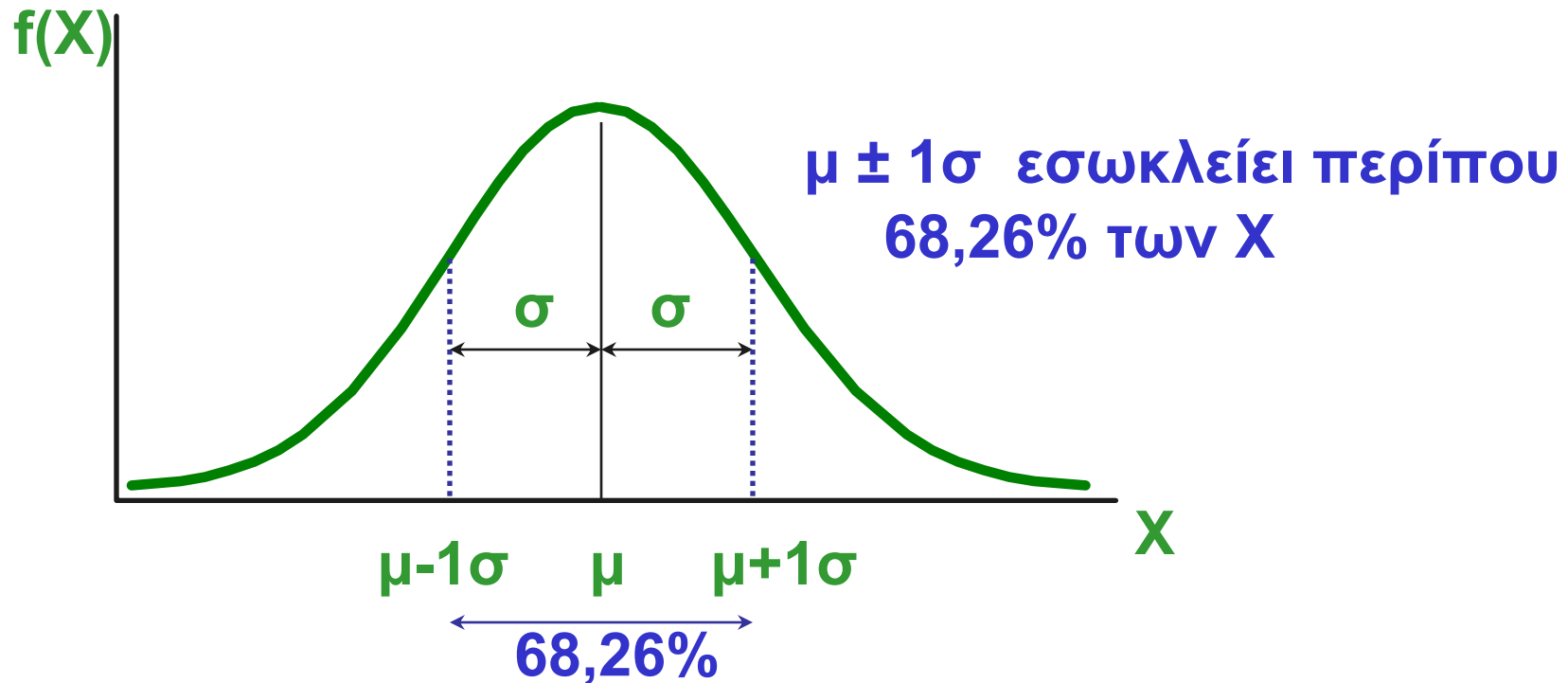
$$\begin{aligned} &P(17,4 < X < 18) \\ &= P(-0,12 < Z < 0) \\ &= P(Z < 0) - P(Z \leq -0,12) \\ &= 0,5000 - 0,4522 = \boxed{0,0478} \end{aligned}$$

Η Κανονική κατανομή είναι συμμετρική, οπότε αυτή η πιθανότητα είναι η ίδια με την $P(0 < Z < 0,12)$



Εμπειρικός Κανόνας

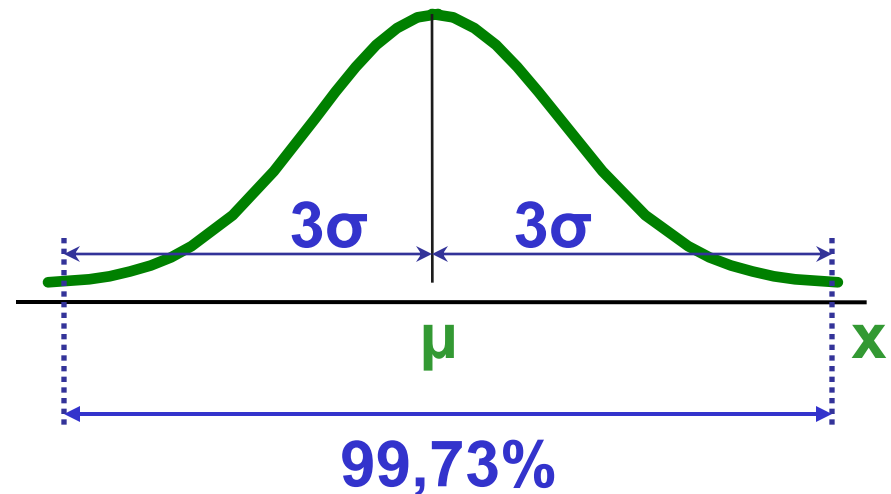
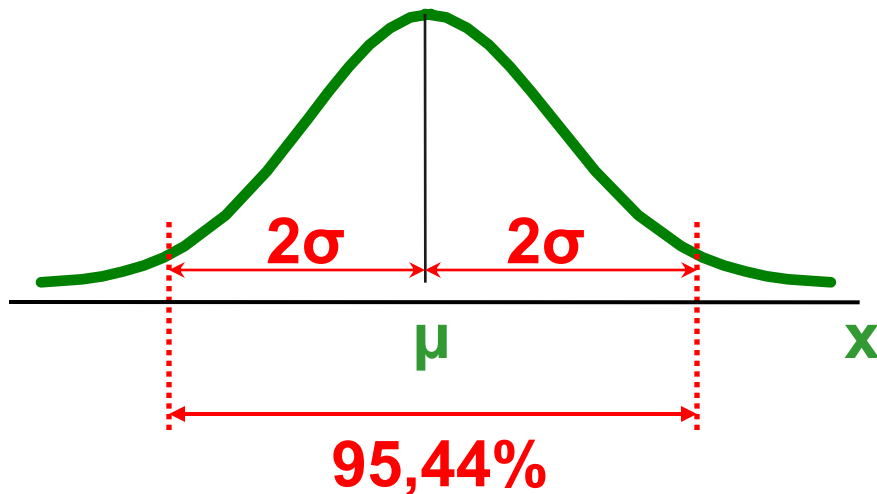
Τι μπορούμε να πούμε για την κατανομή των τιμών γύρω από τον μέσο όρο; Για οποιαδήποτε κανονική κατανομή:



Έμπειρικός Κανόνας

(συνέχεια)

- $\mu \pm 2\sigma$ καλύπτει περίπου το **95,44%** των X
- $\mu \pm 3\sigma$ καλύπτει περίπου το **99,73%** των X



Δοθείσας μιας Κανονικής Πιθανότητας Βρείτε την Τιμή X

- Βήματα για την εύρεση της τιμής X για μια γνωστή πιθανότητα:
 1. Βρείτε την τιμή Z για την γνωστή πιθανότητα
 2. Μετατροπή σε X μονάδες χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

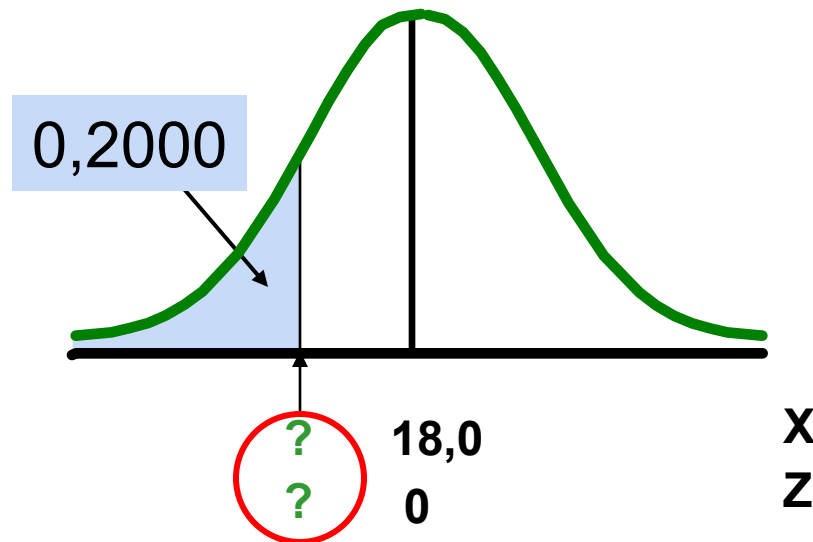

$$X = \mu + Z\sigma$$

Εύρεση της τιμής X για μια Γνωστή Πιθανότητα

(συνέχεια)

Παράδειγμα:

- Θεωρείστε ότι το X παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται (σε δευτερόλεπτα) για να κατεβάσετε ένα αρχείο εικόνας από το διαδίκτυο.
- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέσο όρο 18,0 και τυπική απόκλιση 5,0
- Βρείτε τα X για τα οποία το 20% των χρόνων λήψης είναι μικρότερο από X .



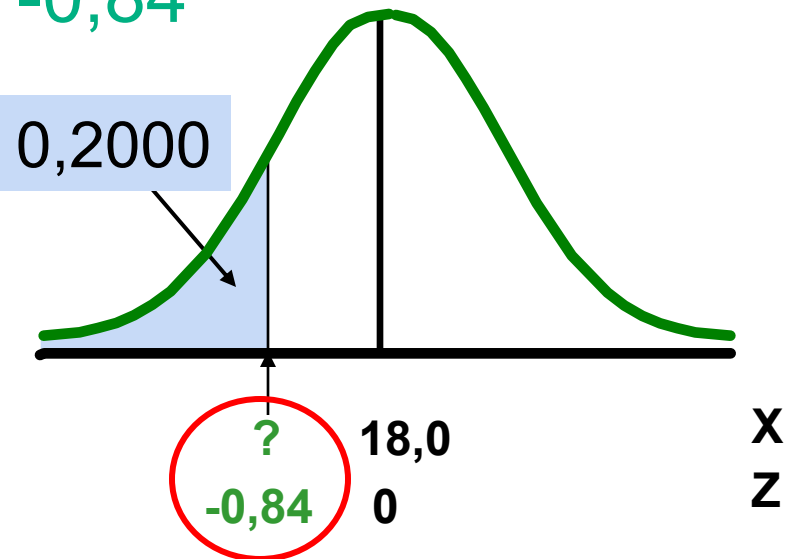
Βρείτε την Z τιμή για το 20% στο Κάτω Άκρο

1. Βρείτε την Z τιμή για την γνωστή πιθανότητα

Πίνακας Τυποποιημένης
Κανονικής Πιθανότητας
(Μέρος)

Z	...	,03	,04	,05
-0,9	...	,1762	,1736	,1711
-0,8	...	,2033	,2005	,1977
-0,7	...	,2327	,2296	,2266

- Το 20% της περιοχής στο κάτω άκρο είναι σταθερό με μια Z τιμή **-0,84**



Εύρεση της X τιμής

2. Μετατροπή σε X μονάδες χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\begin{aligned} X &= \mu + Z\sigma \\ &= 18.0 + (-0.84)5.0 \\ &= 13.8 \end{aligned}$$

Έτσι το 20% των τιμών από μια κατανομή με μέσο όρο 18,0 και τυπική απόκλιση 5,0 είναι μικρότερες από 13,80

Τόσο το Minitab όσο & το Excel Μπορούν να Χρησιμοποιηθούν Για Την Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

Βρείτε την $P(X < 9)$ όπου η X είναι κανονική με μέσο όρο 7 και τυπική απόκλιση 2

Excel

	A	B
1	Normal Probabilities	
2		
3	Common Data	
4	Mean	7
5	Standard Deviation	2
6		
7	Probability For X <=	
8	X Value	9
9	Z Value	1 =STANDARDIZE(B8,B4,B5)
10	P(X<=7)	0.841345 =NORM.DIST(B8,B4,B5,TRUE)
11		
12	Probability For X >	
13	X Value	9
14	Z Value	1 =STANDARDIZE(B13,B4,B5)
15	p(X>9)	0.158655 =1-NORM.DIST(B13,B4,B5,TRUE)

Minitab

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 7 and standard deviation = 2

x	P(X <= x)
9	0.841345

Εκτιμώντας την Κανονικότητα

- Δεν είναι όλες οι συνεχείς κατανομές κανονικές
- Είναι σημαντικό να εκτιμηθεί πόσο καλά το σύνολο δεδομένων προσεγγίζεται από μια κανονική κατανομή.
- Τα κανονικά κατανεμημένα δεδομένα πρέπει να προσεγγίζουν τη θεωρητική κανονική κατανομή:
 - Η κανονική κατανομή έχει σχήμα καμπάνας (συμμετρική) όπου ο μέσος όρος είναι ίσος με την διάμεσο.
 - Ο εμπειρικός κανόνας ισχύει για την κανονική κατανομή.
 - Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος μιας κανονικής κατανομής είναι 1,33 τυπικές αποκλίσεις.

Εκτιμώντας την Κανονικότητα (συνέχεια)

Σύγκριση των χαρακτηριστικών των δεδομένων με τις θεωρητικές ιδιότητες

- Κατασκευή **διαγραμμάτων ή γραφημάτων**

- Για μικρού- ή μεσαίου-μεγέθους σύνολα δεδομένων, κατασκευάστε ένα φυλλογράφημα ή ένα θηκόγραμμα για να ελέγξετε την συμμετρία
- Για μεγάλα σύνολα δεδομένων, το ιστόγραμμα ή το πολύγωνο παρουσιάζουν σχήμα καμπάνας;

- Υπολογισμός **περιγραφικών στατιστικών μέτρων**

- Ο μέσος όρος, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή έχουν παρόμοιες τιμές;
- Είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος κατά προσέγγιση 1,33σ;
- Είναι το εύρος κατά προσέγγιση 6σ;

Εκτιμώντας την Κανονικότητα (συνέχεια)

Σύγκριση των χαρακτηριστικών των δεδομένων με τις θεωρητικές ιδιότητες

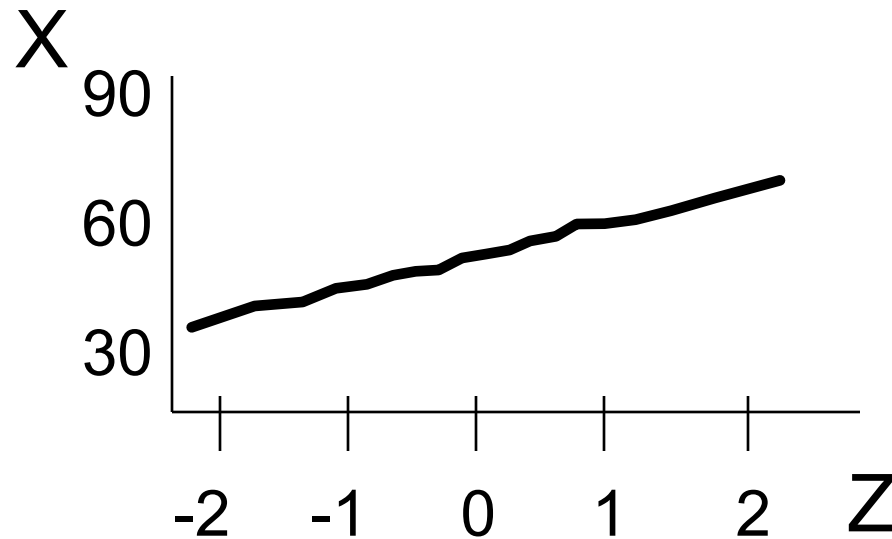
- Παρατήρηση της κατανομής του συνόλου δεδομένων
 - Βρίσκονται τα 2/3 περίπου των παρατηρήσεων εντός ± 1 τυπικής απόκλισης από τον μέσο όρο;
 - Βρίσκεται το 80% των παρατηρήσεων εντός $\pm 1,28$ τυπικών αποκλίσεων από τον μέσο όρο;
 - Βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων εντός ± 2 τυπικών αποκλίσεων από τον μέσο όρο;
- Εκτίμηση του διαγράμματος κανονικής πιθανότητας
 - Είναι το διάγραμμα κανονικής πιθανότητας περίπου γραμμικό (δηλ, μια ευθεία γραμμή) με θετική κλίση;

Κατασκευάζοντας Ένα Διάγραμμα Κανονικής Πιθανότητας

- Διάγραμμα κανονικής πιθανότητας
 - Ταξινομήστε τα δεδομένα σε μια διατεταγμένη σειρά
 - Βρείτε τις αντίστοιχες τυποποιημένες κανονικές τιμές quantile (Z)
 - Σχεδιάστε τα ζεύγη των σημείων με τις τιμές των παρατηρούμενων δεδομένων (X) στον κατακόρυφο άξονα και τις τυποποιημένες κανονικές τιμές quantile (Z) στον οριζόντιο άξονα
 - Εκτιμήστε το διάγραμμα για ένδειξη γραμμικότητας

Ερμηνεία του Διαγράμματος Κανονικής Πιθανότητας

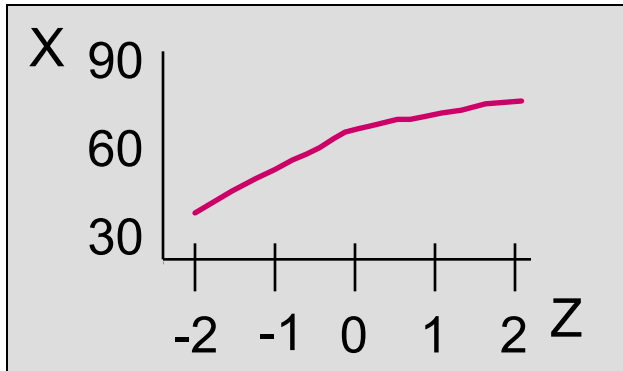
Ένα διάγραμμα κανονικής πιθανότητας για δεδομένα από μια κανονική κατανομή θα είναι **κατά προσέγγιση γραμμικό**:



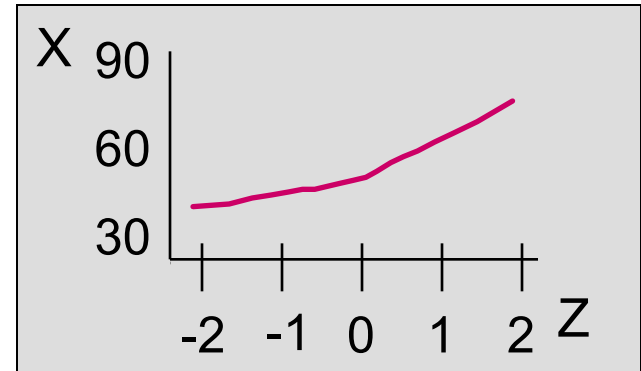
Ερμηνεία του Διαγράμματος Κανονικής Πιθανότητας

(συνέχεια)

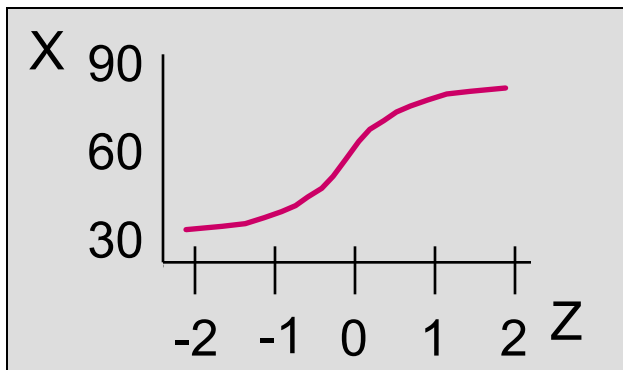
Αριστερά-Ασύμμετρη



Δεξιά-Ασύμμετρη



Ορθογώνια



Μη γραμικά
διαγράμματα
υποδεικνύουν
απόκλιση από την
κανονικότητα

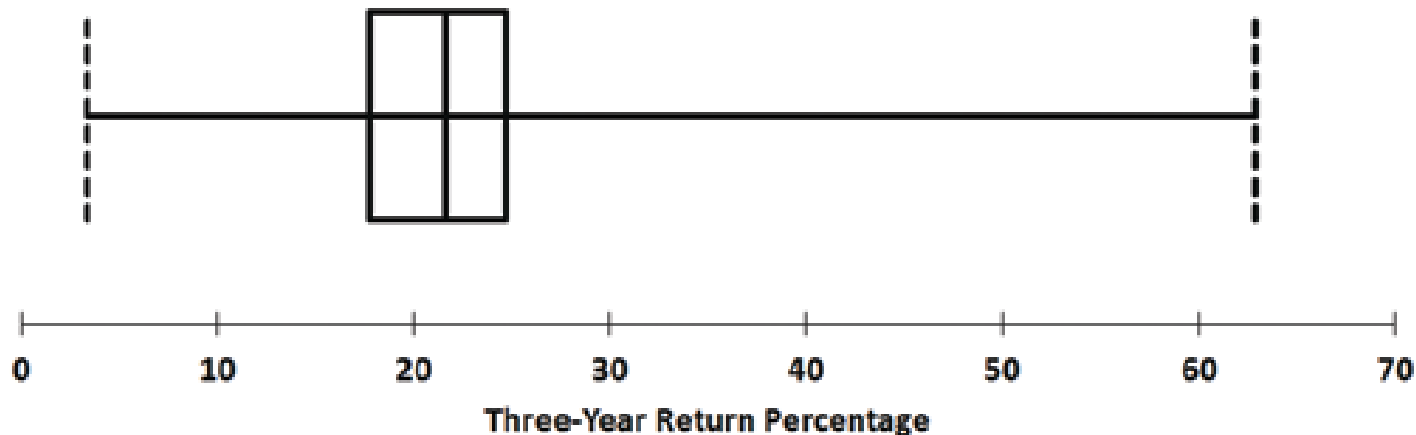
Εκτιμώντας την Κανονικότητα

Παράδειγμα: Αποδόσεις Αμοιβαίων Κεφαλαίων

Five-Number Summary	
Minimum	3.39
First quartile	17.76
Median	21.65
Third quartile	24.74
Maximum	62.91

Το θηκόγραμμα είναι ασύμμετρο προς τα δεξιά. (Η κανονική κατανομή είναι συμμετρική)

Boxplot for the Three-Year Return Percentage



Εκτιμώντας την Κανονικότητα

Παράδειγμα: Αποδόσεις Αμοιβαίων Κεφαλαίων

(συνέχεια)

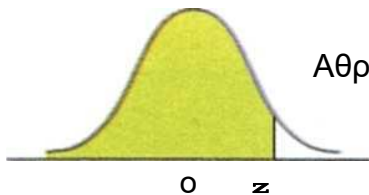
- Συμπεράσματα
 - Οι αποδόσεις είναι δεξιά-ασύμμετρες
 - Οι αποδόσεις έχουν περισσότερες τιμές συγκεντρωμένες γύρω από το μέσο όρο από το αναμενόμενο
 - Το εύρος είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο
 - Το διάγραμμα κανονικής πιθανότητας δεν είναι μια ευθεία γραμμή
 - Συνολικά, αυτό το σύνολο δεδομένων διαφέρει πολύ από τις θεωρητικές ιδιότητες της κανονικής κατανομής

Περίληψη Κεφαλαίου

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε:

- Τον υπολογισμό πιθανοτήτων από την κανονική κατανομή
- Την χρήση της κανονικής κατανομής για την επίλυση προβλημάτων των επιχειρήσεων
- Την χρήση του διαγράμματος κανονικής πιθανότητας για να προσδιοριστεί αν ένα σύνολο δεδομένων είναι κατά προσέγγιση κανονικά κατανεμημένο

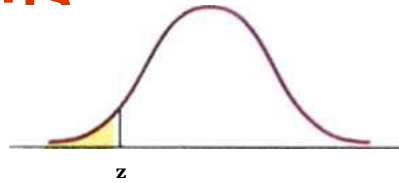
Αθροιστικές πιθανότητες τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Αθροιστικές πιθανότητες τυποποιημένης κανονικής κατανομής $P(-\infty < Z < z)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Αθροιστικές πιθανότητες τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Αθροιστικές πιθανότητες τυποποιημένης κανονικής κατανομής $P(-\infty < Z < z)$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641