



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

Καθηγητής Ι. Μητρόπουλος

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Τηλ.: +030 2610 369213, email: [imitro@upatras.gr](mailto:imitro@upatras.gr)

Διεύθυνση: Μεγάλου Αλεξάνδρου 1, 263 34 ΠΑΤΡΑ

# Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση (I)

## ***ΕΝΟΤΗΤΑ 5<sup>η</sup>: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ***

# Στόχοι

---

**Οι στόχοι αυτού του κεφαλαίου είναι:**

- Η κατανόηση βασικών εννοιών των πιθανοτήτων.
  - Η κατανόηση της δεσμευμένης πιθανότητας
  - Η χρήση του θεωρήματος Bayes στη μελέτη των πιθανοτήτων
  - Η γνώση διαφόρων κανόνων απαρίθμησης
-

# Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων

- **Πιθανότητα** – η δυνατότητα ένα αβέβαιο γεγονός να συμβεί (πάντα μεταξύ του 0 και 1)
- **Αδύνατο Ενδεχόμενο** – ένα ενδεχόμενο που δεν έχει καμία πιθανότητα να συμβεί (πιθανότητα = 0)
- **Βέβαιο Ενδεχόμενο** – ένα ενδεχόμενο που είναι βέβαιο ότι θα συμβεί (πιθανότητα = 1)

# Υπολογίζοντας Πιθανότητες

Υπάρχουν τρεις προσεγγίσεις υπολογισμού πιθανότητας ενός αβέβαιου ενδεχομένου:

1. *εκ των προτέρων* -- βασισμένη σε προηγούμενη γνώση της διαδικασίας

$$\text{Πιθανότητα εμφάνισης} = \frac{X}{T} = \frac{\text{αριθμός των τρόπων με τους οποίους συμβαίνει το ενδεχόμενο}}{\text{συνολικός αριθμός πιθανών αποτελεσμάτων}}$$

Υποθέτοντας ότι όλα τα αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά

2. *εμπειρική πιθανότητα*

$$\text{Πιθανότητα εμφάνισης} = \frac{\text{αριθμός των τρόπων με τους οποίους συμβαίνει το γεγονός}}{\text{συνολικός αριθμός πιθανών αποτελεσμάτων}}$$

3. *υποκειμενική πιθανότητα*

βασίζεται σε ένα συνδυασμό της παρελθοντικής εμπειρίας ενός ατόμου, της προσωπικής άποψης, και της ανάλυσης μιας συγκεκριμένης κατάστασης

# Εκ των προτέρων (Κλασική Προσέγγιση)

Εάν ένα πείραμα έχει  $n$  δυνατά αποτελέσματα, η μέθοδος αυτή δίνει πιθανότητα  $1/n$  σε κάθε αποτέλεσμα. Είναι απαραίτητο να καθοριστεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων.

Πείραμα:	Ρίχνουμε ένα <i>ζάρι</i>
Αποτελέσματα:	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Πιθανότητες:	Κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα εμφάνισης ίση με $1/6$ .

# Εκ των προτέρων (Κλασική Προσέγγιση) ...

Πείραμα: Ρίχνουμε δύο ζάρια και παρατηρούμε το άθροισμα

Αποτελέσματα:  $\{2, 3, \dots, 12\}$

Παραδείγματα:

$$P(2) = 1/36$$

$$P(6) = 5/36$$

$$P(10) = 3/36$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

# Παράδειγμα μιας *εκ των προτέρων* πιθανότητας

Όταν επιλέγετε τυχαία μια μέρα από το έτος 2015 ποια είναι η πιθανότητα η μέρα αυτή να είναι τον Ιανουάριο;

$$\text{Πιθανότητα} \quad \text{ημέρας} \quad \text{τον} \quad \text{Ιανουάριο} \quad = \frac{X}{T} = \frac{\text{αριθμός} \quad \text{ημερών} \quad \text{του} \quad \text{Ιανουαρίου}}{\text{συνολικό} \quad \text{αριθμό} \quad \text{ημερών} \quad \text{του} \quad 2015}$$

$$\frac{X}{T} = \frac{31 \text{ημέρες} \quad \text{τον} \quad \text{Ιανουάριο}}{365 \text{ημέρες} \quad \text{το} \quad 2015} = \frac{31}{365}$$

# Προσέγγιση Εμπειρικής - Σχετικής Συχνότητας ...

Ένα κατάστημα πώλησης υπολογιστών καταγράφει το πλήθος των σταθερών υπολογιστών που πούλησε σε ένα μήνα (30 ημέρες):

Για παράδειγμα,  
10 ημέρες από τις 30  
πουλήθηκαν 2 υπολογιστές  
την ημέρα.

Υπολογιστές που πουλήθηκαν	# ημερών
0	1
1	2
2	10
3	12
4	5

Μπορούμε να κατασκευάσουμε  
τις πιθανότητες ενός ενδεχομένου  
(όπως το πλήθος των υπολογιστών που πωλούνται μια  
συγκεκριμένη ημέρα)...

# Προσέγγιση Εμπειρικής - Σχετικής Συχνότητας

...

Υπολογιστές που πουλήθηκαν	# ημερών	Υπολογιστές που πουλήθηκαν
0	1	$1/30 = .03$
1	2	$2/30 = .07$
2	10	$10/30 = .33$
3	12	$12/30 = .40$
4	5	$5/30 = .17$
		$\Sigma = 1.00$

“Υπάρχει 40% πιθανότητα το κατάστημα να πουλήσει 3 υπολογιστές σε μια οποιαδήποτε ημέρα”

# Παράδειγμα 2

---

Η Στατιστική Σύνοψη των ΗΠΑ δημοσιεύεται κάθε χρόνο. Περιέχει μεγάλη ποικιλία πληροφοριών που βασίζονται στην απογραφή και σε άλλες πηγές. Στόχος είναι η παροχή πληροφοριών για διάφορα χαρακτηριστικά της ζωής των κατοίκων. Μια από τις ερωτήσεις ήταν το πλήθος των έγχρωμων τηλεοράσεων ανά νοικοκυριό. Τα δεδομένα βρίσκονται στον ακόλουθο πίνακα. Να κατασκευαστεί η κατανομή πιθανοτήτων της τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει το πλήθος των έγχρωμων τηλεοράσεων ανά νοικοκυριό.

# Παράδειγμα 2

---

<u>Πλήθος έγχρωμων τηλεοράσεων</u>	<u>Πλήθος νοικοκυριών (σε χιλιάδες)</u>
0	1,218
1	32,379
2	37,961
3	19,387
4	7,714
5	2,842
<hr/>	
Σύνολο	101,501

# Παράδειγμα 2

Η κατανομή πιθανοτήτων μπορεί να υπολογιστεί από τις σχετικές συχνότητες.

<i># των τηλεοράσεων</i>	<i># των νοικοκυριών</i>	<b>x</b>	<b>P(x)</b>
0	1,218	0	0.012
1	32,379	1	0.319
2	37,961	2	0.374
3	19,387	3	0.191
4	7,714	4	0.076
5	2,842	5	0.028
	<u>101,501</u>		<b>1.000</b>

$$1,218 \div 101,501 = 0.012$$

Π.χ.  $P(\mathbf{X}=4) = P(4) = 0.076 = 7.6\%$

# Παράδειγμα 2

---

Π.χ. ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία τηλεόραση αλλά όχι περισσότερες από τρεις σε ένα σπίτι;

# των τηλεοράσεων	# των νοικοκυριών	<b>x</b>	<b>P(x)</b>
0	1,218	0	0.012
1	32,379	1	0.319
2	37,961	2	0.374
3	19,387	3	0.191
4	7,714	4	0.076
5	2,842	5	0.028
	<u>101,501</u>		1.000

“τουλάχιστον μία τηλεόραση αλλά όχι περισσότερες από τρεις”

$$P(1 \leq \mathbf{X} \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3) = .319 + .374 + .191 = .884$$

# Παράδειγμα εμπειρικής πιθανότητας

Βρείτε την πιθανότητα να επιλέξετε άνδρα που παρακολουθεί το μάθημα Στατιστικής από τον πληθυσμό που περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

	Παρακολουθεί Στατιστική	Δεν παρακολουθεί Στατιστική	Σύνολο
Άνδρας	84	145	229
Γυναίκα	76	134	210
Σύνολο	160	279	439

$$\text{Πιθανότητα άνδρα που παρακολουθεί στατιστική} = \frac{\text{αριθμός των ανδρών που παρακολουθούν στατιστική}}{\text{συνολικό αριθμό ατόμων}} = \frac{84}{439} = 0,191$$

# Υποκειμενική πιθανότητα

---

- Η υποκειμενική πιθανότητα ίσως διαφέρει από άτομο σε άτομο
  - Η διαφημιστική ομάδα εκτιμά μια 60% πιθανότητα επιτυχίας στην νέα της διαφημιστική εκστρατεία.
  - Ο επικεφαλής των μέσων ενημέρωσης της εταιρείας είναι λιγότερο αισιόδοξος και εκτιμά 40% επιτυχία στην ίδια εκστρατεία
- Ο υπολογισμός μιας υποκειμενικής πιθανότητας βασίζεται στις εμπειρίες ενός ατόμου, τις απόψεις και την ανάλυση μιας συγκεκριμένης κατάστασης
- Η υποκειμενική πιθανότητα είναι χρήσιμη σε καταστάσεις όπου μια εμπειρική ή μια εκ των προτέρων πιθανότητα δεν μπορεί να υπολογιστεί

# Υποκειμενική Προσέγγιση ...

---

“Στην υποκειμενική προσέγγιση ορίζουμε την πιθανότητα ως το βαθμό πίστης που έχουμε στην εμφάνιση ενός ενδεχομένου”

Π.χ. μετεωρολογική πρόγνωση “Π.Β.”

Η “Πιθανότητα Βροχόπτωσης” (ή Π.Β.) καθορίζεται με διαφορετικό τρόπο από κάθε μετεωρολόγο, καθώς ουσιαστικά είναι υποκειμενική πιθανότητα που στηρίζεται σε προηγούμενες παρατηρήσεις σε συνδυασμό με τις τρέχουσες καιρικές συνθήκες.

Π.Β. 60% – με βάση τις τρέχουσες συνθήκες, υπάρχει 60% πιθανότητα βροχής (υποθέτουμε).

# Ερμηνεία της Πιθανότητας ...

Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η πιθανότητα η ερμηνεία δίνεται με την προσέγγιση της σχετικής συχνότητας

Για παράδειγμα, σε ένα παιχνίδι λόττο επιλέγονται 6 αριθμοί (από τους 49). Η κλασική προσέγγιση θα προέβλεπε την πιθανότητα εμφάνισης οποιουδήποτε αριθμού ως  $1/49=2.04\%$ .

Η ερμηνεία που δίνουμε είναι ότι σε άπειρες επαναλήψεις του παιχνιδιού κάθε αριθμός θα εμφανιστεί στο 2.04% των αποτελεσμάτων.

# Ενδεχόμενα

---

Κάθε δυνατό αποτέλεσμα μιας μεταβλητής είναι ένα ενδεχόμενο.

- **Απλό ενδεχόμενο**
  - Ένα ενδεχόμενο περιγράφεται από ένα μοναδικό χαρακτηριστικό
  - π.χ., Μια μέρα του Ιανουαρίου από όλες τις ημέρες του 2015
- **Από κοινού ενδεχόμενο**
  - Ένα ενδεχόμενο περιγράφεται από δύο ή περισσότερα χαρακτηριστικά
  - π.χ. Μια μέρα του Ιανουαρίου που είναι επίσης Τετάρτη από όλες τις ημέρες του 2015
- **Συμπληρωματικό ενός ενδεχομένου  $A$  (συμβολίζεται με  $A'$  ή  $A^c$ )**
  - Όλα τα ενδεχόμενα που δεν αποτελούν μέρος του ενδεχομένου  $A$
  - π.χ., Όλες οι ημέρες του 2015 που δεν ανήκουν στον Ιανουάριο

# Συνδυασμένη, Ολική, Δεσμευμένη Πιθανότητα ...

Μελετάμε μεθόδους καθορισμού πιθανοτήτων ενδεχομένων που προκύπτουν από *συνδυασμό* άλλων ενδεχομένων με διάφορους τρόπους.

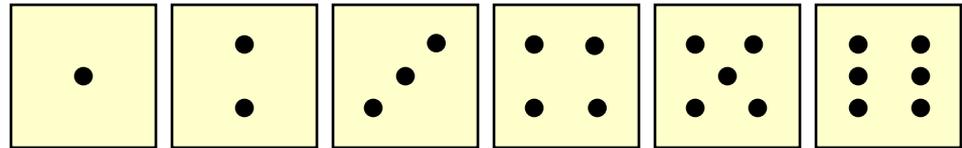
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι συνδυασμού ενδεχομένων:

- Συμπληρωματικό ενδεχόμενο
- Τομή ενδεχομένων
- Ένωση ενδεχομένων
- Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα
- Εξαρτημένα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα

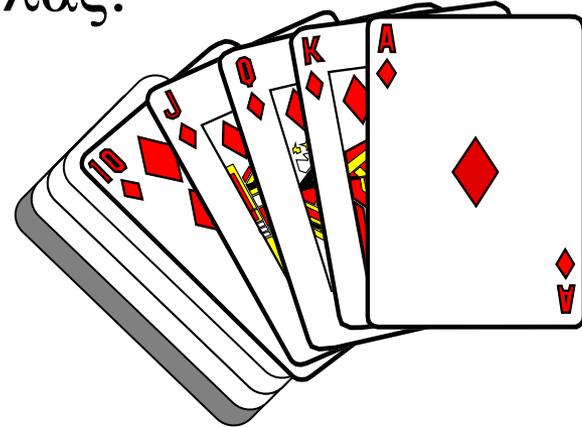
# Δειγματικός Χώρος

Ο **Δειγματικός Χώρος** είναι η συλλογή όλων των πιθανών ενδεχομένων

π.χ. Οι 6 πλευρές ενός ζαριού:



π.χ. Οι 52 κάρτες μιας τράπουλας:



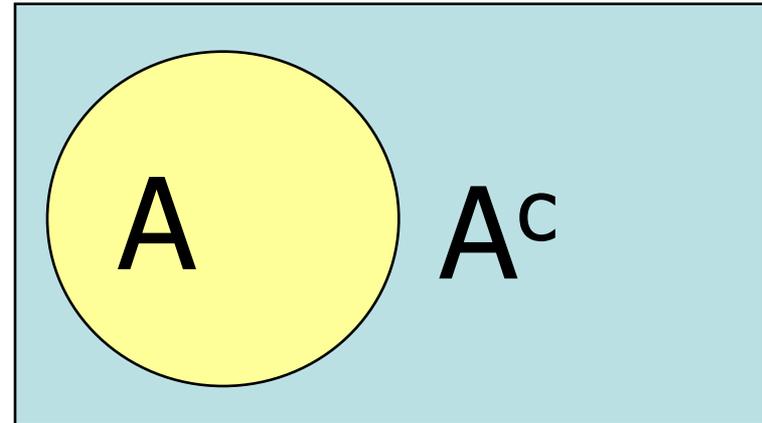
# Συμπλήρωμα ενός Ενδεχομένου ...

Το *συμπλήρωμα του ενδεχομένου*  $A$  ορίζεται ως το ενδεχόμενο που αποτελείται από όλα τα σημεία τα οποία “δεν ανήκουν στο  $A$ ”.

Το συμπλήρωμα του  $A$  συμβολίζεται με  $A^c$

Το διάγραμμα Venn δείχνει την έννοια του συμπληρώματος

$$P(A) + P(A^c) = 1$$



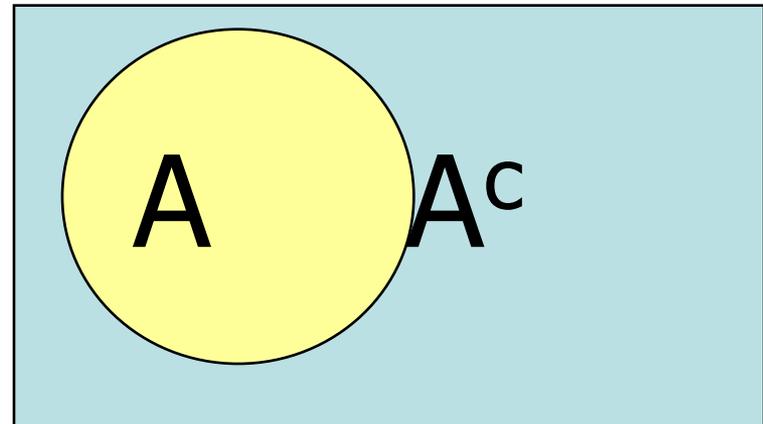
# Συμπλήρωμα ενός Ενδεχομένου ...

Για παράδειγμα, στο παραλληλόγραμμο βρίσκονται όλα τα πιθανά αποτελέσματα της ρίψης 2 ζαριών  $\{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$

Έστω  $A$  = οι ρίψεις που έχουν άθροισμα 7,

δηλ.  $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$$P(\text{Άθροισμα} = 7) + P(\text{Άθροισμα όχι ίσο με } 7) = 1$$

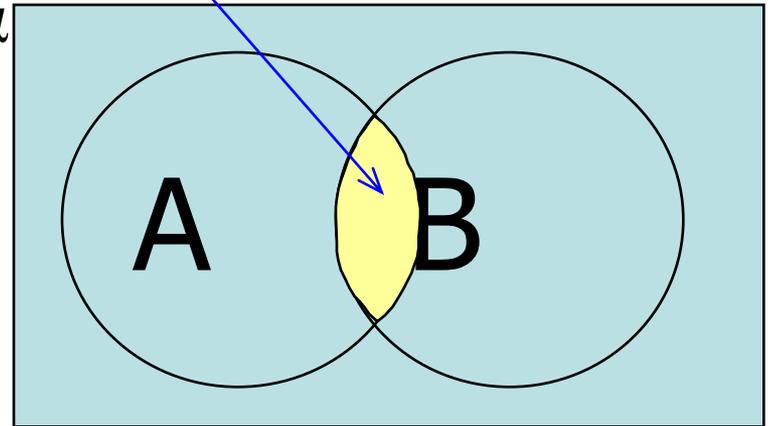


# Τομή Δύο Ενδεχομένων ...

Η *τομή των ενδεχομένων* A και B είναι το σύνολο των σημείων που ανήκουν και στο A και στο B.

Η τομή συμβολίζεται: **A και B**

*Συνδυασμένη πιθανότητα* των A και B ονομάζεται η πιθανότητα της τομής των A και B, δηλ.  $P(A \text{ και } B)$



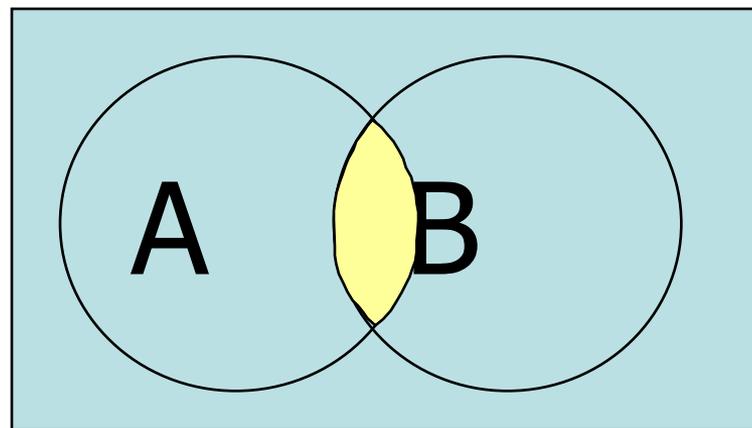
# Τομή Δύο Ενδεχομένων ...

Για παράδειγμα, έστω  $A =$  οι ρίψεις στις οποίες το πρώτο ζάρι έδειξε 1  $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

και  $B =$  οι ρίψεις στις οποίες το δεύτερο ζάρι έδειξε 5  $\{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$

Η τομή είναι  $\{(1,5)\}$

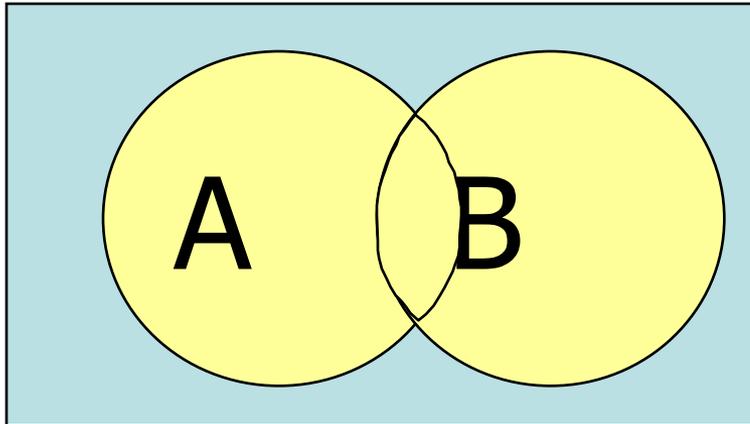
Η *συνδυασμένη πιθανότητα* του  $A$  και  $B$  είναι η πιθανότητα της τομής των  $A$  και  $B$ ,  
δηλ.  $P(A \text{ και } B) = 1/36$



# Ένωση Δύο Ενδεχομένων ...

Η *ένωση δύο ενδεχομένων* A και B, είναι το ενδεχόμενο που περιέχει όλα τα σημεία τα οποία ανήκουν στο A ή στο B ή και στα δύο:

Η ένωση των A και B συμβολίζεται: **A ή B**



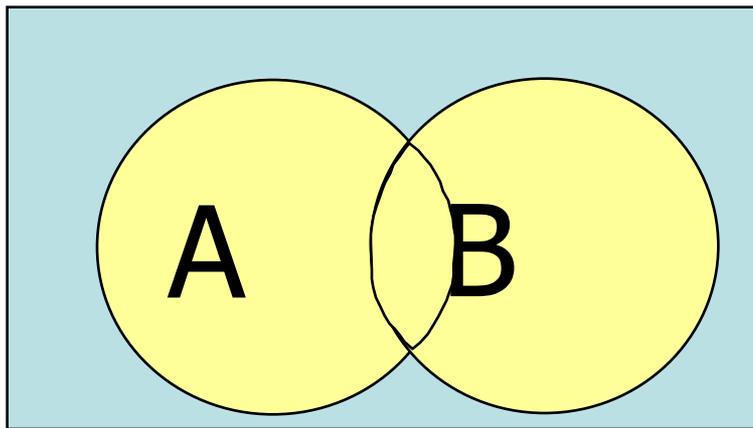
# Ένωση Δύο Ενδεχομένων ...

---

Για παράδειγμα, έστω  $A =$  οι ρίψεις στις οποίες το πρώτο ζάρι έδειξε 1  
 $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

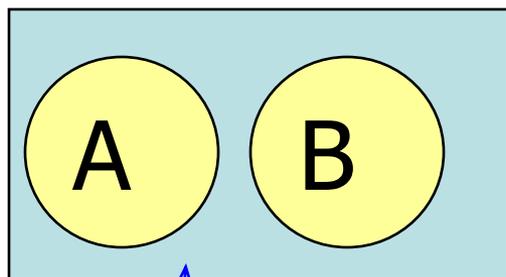
και  $B$  οι ρίψεις στις οποίες το δεύτερο ζάρι έδειξε 5  
 $\{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$

Η ένωση των  $A$  και  $B$  είναι  $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$   
 $\{(2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$



# Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ...

Όταν δύο ενδεχόμενα είναι *ασυμβίβαστα* (δηλαδή δεν μπορεί να συμβούν ταυτόχρονα), η συνδυασμένη πιθανότητά τους είναι 0, επομένως:

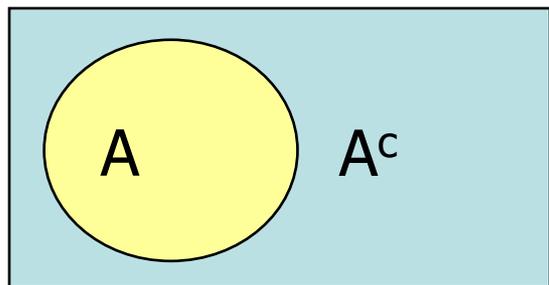


Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: δεν έχουν κοινά σημεία ...

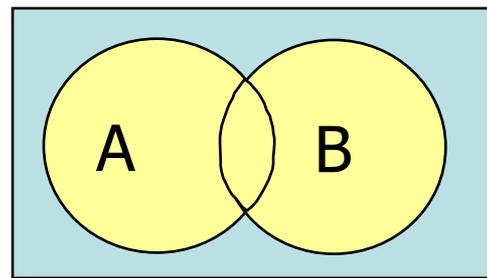
Για παράδειγμα  $A =$  ρίψεις με άθροισμα 7 και  $B =$  ρίψεις με άθροισμα 11

# Βασικές Σχέσεις Πιθανοτήτων ...

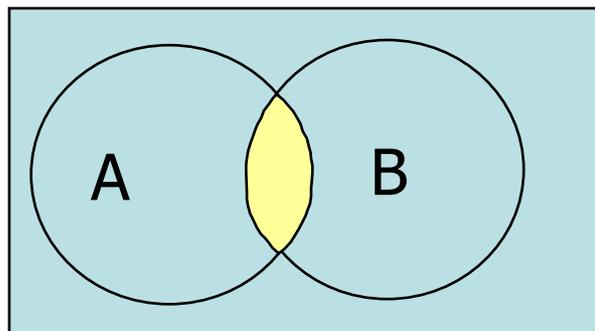
Συμπλήρωμα Ενδεχομένου



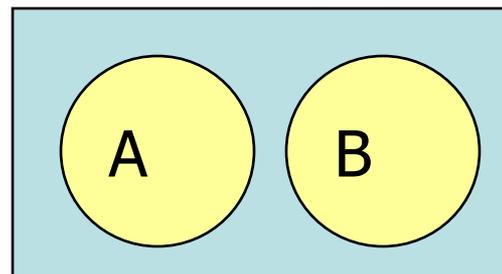
Ένωση Ενδεχομένων



Τομή Ενδεχομένων



Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα



# Παράδειγμα

## Οργάνωση & Γραφική Απεικόνιση Ενδεχομένων

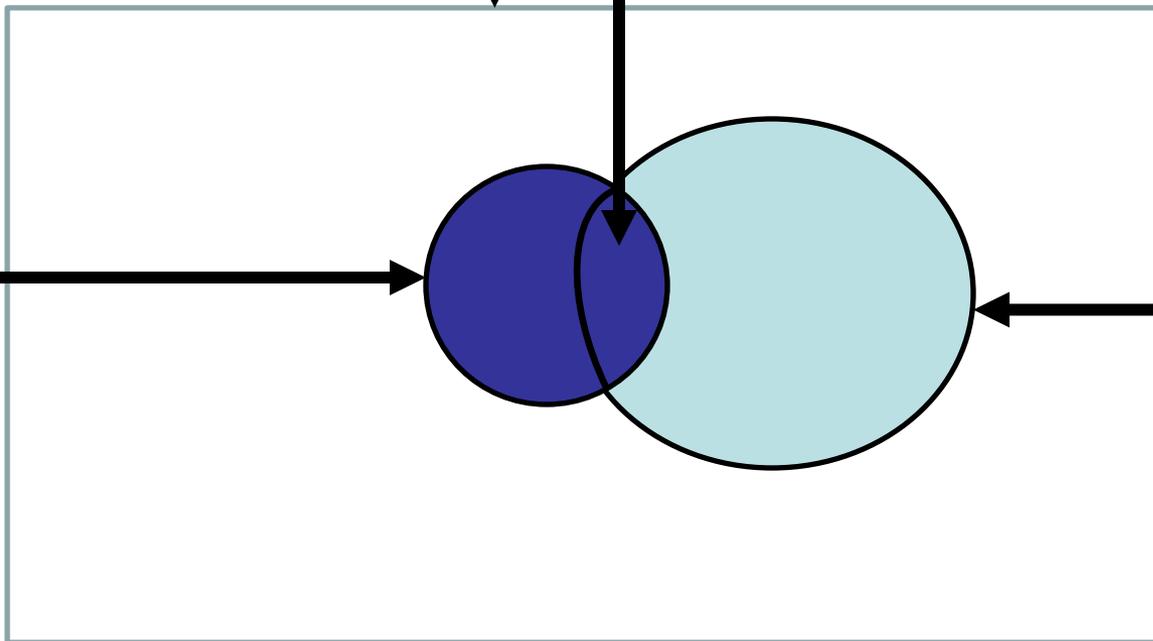
- Διάγραμμα Venn για Όλες τις Ημέρες του 2015

Δειγματικός χώρος  
(Όλες οι ημέρες του 2015)

Ημέρες που είναι μέσα στον Ιανουάριο  
και είναι Τετάρτες

Τετάρτες

Ημέρες του  
Ιανουαρίου



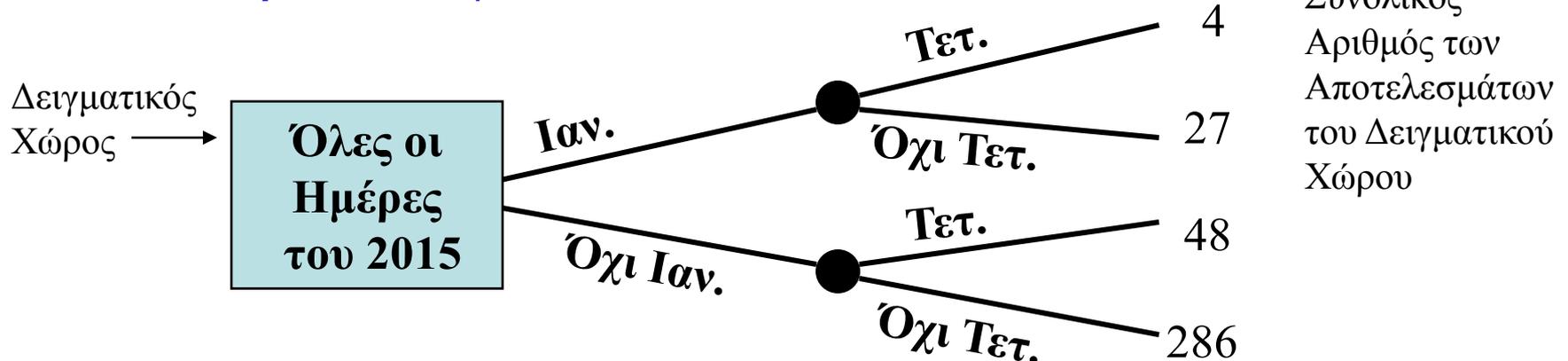
# Οργάνωση & Γραφική Απεικόνιση Ενδεχομένων

(συνέχεια)

- Πίνακες Συνάφειας -- Για Όλες τις Ημέρες του 2015

	Ιαν.	Όχι Ιαν.	Σύνολο
Τετ.	4	48	52
Όχι Τετ.	27	286	313
Σύνολο	31	334	365

- Δένδρα Αποφάσεων



# Ορισμός: Απλή Πιθανότητα

- Η Απλή Πιθανότητα αναφέρεται στην πιθανότητα ενός απλού ενδεχομένου.
  - πχ.  $P(\text{Ιαν.})$
  - πχ.  $P(\text{Τετ.})$

	Ιαν.	Όχι Ιαν.	Σύνολο
Τετ.	4	48	52
Όχι Τετ.	27	286	313
Σύνολο	31	334	365

$$P(\text{Τετ.}) = 52 / 365$$

$$P(\text{Ιαν.}) = 31 / 365$$

# Ορισμός: Από Κοινού Πιθανότητα

- Η Από Κοινού Πιθανότητα αναφέρεται στην πιθανότητα εμφάνισης δύο ή περισσότερων ενδεχομένων (από κοινού ενδεχόμενα).
  - πχ.  $P(\text{Ιαν. και Τετ.})$
  - πχ.  $P(\text{Όχι Ιαν. και Όχι Τετ.})$

	Ιαν.	Όχι Ιαν.	Σύνολο
Τετ.	4	48	52
Όχι Τετ.	27	286	313
Σύνολο	31	334	365

$$P(\text{Όχι Ιαν. και Όχι Τετ.}) = 286 / 365$$

$$P(\text{Ιαν. και Τετ.}) = 4 / 365$$

# Αμοιβαία Αποκλειόμενα Ενδεχόμενα

---

- **Αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα**
  - Ενδεχόμενα τα οποία δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα

**Παράδειγμα:** Τυχαία επιλογή μιας ημέρας του 2015

A = μέρα του Ιανουαρίου; B = μέρα του Φεβρουαρίου

– Τα ενδεχόμενα A και B είναι αμοιβαία αποκλειόμενα

# Ενδεχόμενα που αποτελούν Διαμέριση

---

- Ενδεχόμενα που αποτελούν Διαμέριση
  - Ένα από τα ενδεχόμενα πρέπει να συμβεί
  - Το σύνολο των ενδεχομένων καλύπτει όλο το δειγματικό χώρο

Παράδειγμα: Τυχαία επιλογή μιας ημέρας από το 2015

A = Καθημερινή; B = Σαβ/κο;  
C = Ιανουάριος; D = Άνοιξη;

- Τα ενδεχόμενα A, B, C και D αποτελούν διαμέριση (αλλά όχι αμοιβαία αποκλειόμενα – μία καθημερινή μπορεί να είναι τον Ιανουάριο ή την Άνοιξη)
- Τα ενδεχόμενα A και B αποτελούν διαμέριση και επίσης είναι αμοιβαία αποκλειόμενα

# Υπολογισμός των Από Κοινού και Περιθώριων Πιθανοτήτων

- Η πιθανότητα ενός από κοινού ενδεχομένου, A και B:

$$P(A \text{ και } B) = \frac{\text{αριθμός των αποτελεσμάτων που ικανοποιούν τα A και B}}{\text{συνολικός αριθμός των βασικών αποτελεσμάτων}}$$

- Υπολογισμός μιας περιθώριας (ή απλής) πιθανότητας:

$$P(A) = P(A \text{ και } B_1) + P(A \text{ και } B_2) + \dots + P(A \text{ και } B_k)$$

•Όπου  $B_1, B_2, \dots, B_k$  είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και διαμέρισης ενδεχόμενα

# Παράδειγμα Από Κοινού Πιθανότητας

**P(Ιαν. και Τετ.)**

$$= \frac{\text{αριθμός των ημερών που είναι μέσα στον Ιαν. και είναι Τετ.}}{\text{συνολικός αριθμός των ημερών του 2015}} = \frac{4}{365}$$

	Ιαν.	Όχι Ιαν.	Σύνολο
Τετ.	4	48	52
Όχι Τετ.	27	286	313
Σύνολο	31	334	365

# Παράδειγμα Περιθώριας Πιθανότητας

**P(Τετ.)**

$$= P(\text{Ιαν. και Τετ.}) + P(\text{Όχι Ιαν. και Τετ.}) = \frac{4}{365} + \frac{48}{365} = \frac{52}{365}$$

	Ιαν.	Όχι Ιαν.	Σύνολο
Τετ.	4	48	52
Όχι Τετ.	27	286	313
Σύνολο	31	334	365

# Περιθώριες & Από Κοινού Πιθανότητες σε Έναν Πίνακα Συνάφειας

Ενδεχόμενο	Ενδεχόμενο		Σύνολο
	$B_1$	$B_2$	
$A_1$	$P(A_1 \text{ και } B_1)$	$P(A_1 \text{ και } B_2)$	$P(A_1)$
$A_2$	$P(A_2 \text{ και } B_1)$	$P(A_2 \text{ και } B_2)$	$P(A_2)$
Σύνολο	$P(B_1)$	$P(B_2)$	1

Από Κοινού  
Πιθανότητες

Περιθώριες (Απλές)  
Πιθανότητες

# Περίληψη Πιθανοτήτων μέχρι στιγμής

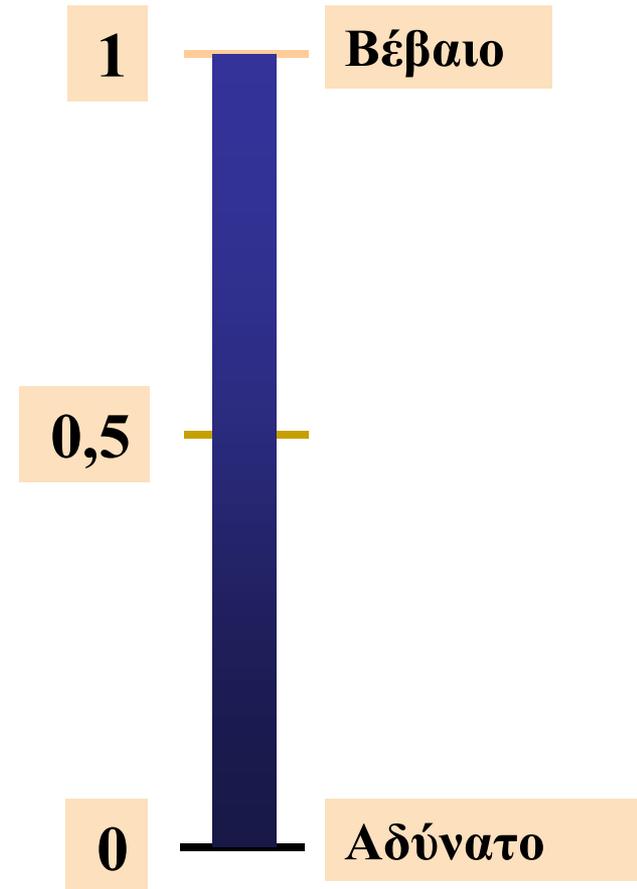
- Πιθανότητα είναι η αριθμητική μέτρηση της δυνατότητας ένα ενδεχόμενο να συμβεί
- Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου πρέπει να είναι μεταξύ 0 και 1, αποκλειστικά

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο } A$$

- Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των αμοιβαία αποκλειόμενων και διαμέρισης ενδεχομένων είναι 1

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

Αν A, B, και C είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και διαμέρισης



# Γενικός Προσθετικός Κανόνας

---

Γενικός Προσθετικός  
Κανόνας:

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ και } B)$$

Αν  $A$  και  $B$  είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, τότε

$P(A \text{ και } B) = 0$ , οπότε ο κανόνας μπορεί να απλοποιηθεί:

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B)$$

Για αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$

# Παράδειγμα Γενικού Προσθετικού Κανόνα

$$P(\text{Ιαν. ή Τετ.}) = P(\text{Ιαν.}) + P(\text{Τετ.}) - P(\text{Ιαν. και Τετ.})$$

$$= 31/365 + 52/365 - 4/365 = 79/365$$

Μην μετράτε  
τις τέσσερις  
Τετάρτες τον  
Ιανουάριο δύο  
φορές!

	Ιαν.	Όχι Ιαν.	Σύνολο
Τετ.	4	48	52
Όχι Τετ.	27	286	313
Σύνολο	31	334	365

# Υπολογισμός Δεσμευμένων Πιθανοτήτων

---

- Μια **δεσμευμένη πιθανότητα** είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, δεδομένου ότι ένα άλλο ενδεχόμενο έχει συμβεί:

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(B)}$$



Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου ότι το B έχει συμβεί

$$P(B | A) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(A)}$$



Η δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου ότι το A έχει συμβεί

Όπου  $P(A \text{ και } B)$  = από κοινού πιθανότητα του A και B

$P(A)$  = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του A

$P(B)$  = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του B

# Παράδειγμα Δεσμευμένης Πιθανότητας

---

- Από τα αυτοκίνητα σε ένα πάρκινγκ μεταχειρισμένων, το 70% έχει air conditioning (AC) και το 40% έχει GPS. Το 20% των αυτοκινήτων διαθέτει και τα δύο.
- Ποια είναι η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να έχει GPS, δεδομένου ότι έχει AC;

δηλαδή, θέλουμε να βρούμε  $P(\text{GPS} \mid \text{AC})$

# Παράδειγμα Δεσμευμένης Πιθανότητας

(συνέχεια)

- Σε ένα πάρκινγκ μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το **70%** έχει air conditioning (AC) και το **40%** έχει GPS και το **20%** των αυτοκινήτων διαθέτει και τα δύο.

	GPS	Όχι GPS	Σύνολο
AC	<b>0,2</b>	<b>0,5</b>	<b>0,7</b>
Όχι AC	<b>0,2</b>	<b>0,1</b>	<b>0,3</b>
Σύνολο	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>	<b>1,0</b>

$$P(\text{GPS} | \text{AC}) = \frac{P(\text{GPS και AC})}{P(\text{AC})} = \frac{0,2}{0,7} = 0,2857$$

# Παράδειγμα Δεσμευμένης Πιθανότητας

(συνέχεια)

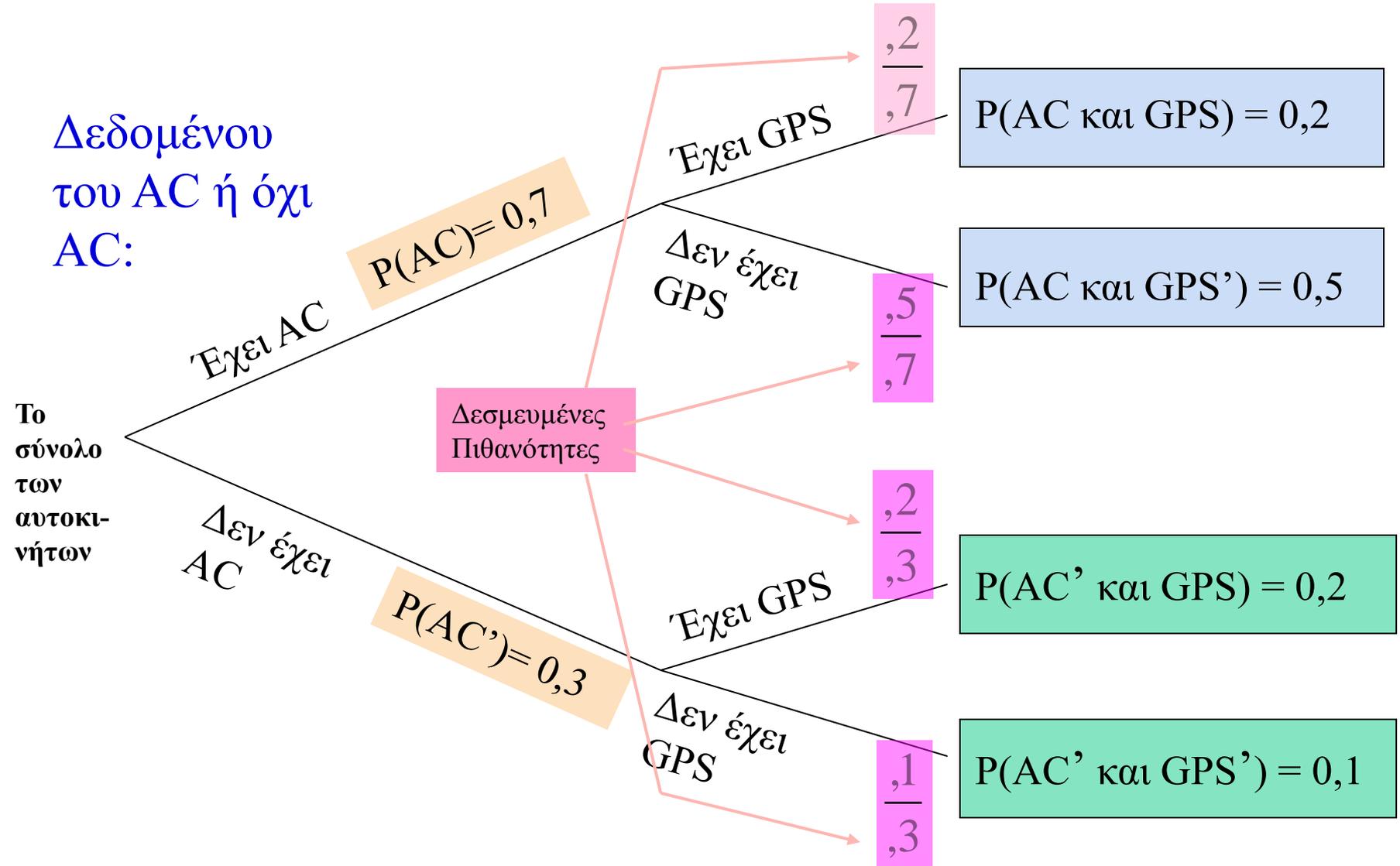
- Δεδομένου του AC, λαμβάνουμε υπόψη μόνο την πάνω γραμμή (το 70% των αυτοκινήτων). Από αυτά, το 20% έχει GPS. Το 20% του 70% είναι περίπου 28,57%.

	GPS	Όχι GPS	Σύνολο
AC	0,2	0,5	0,7
Όχι AC	0,2	0,1	0,3
Σύνολο	0,4	0,6	1,0

$$P(\text{GPS} | \text{AC}) = \frac{P(\text{GPS και AC})}{P(\text{AC})} = \frac{0,2}{0,7} = 0,2857$$

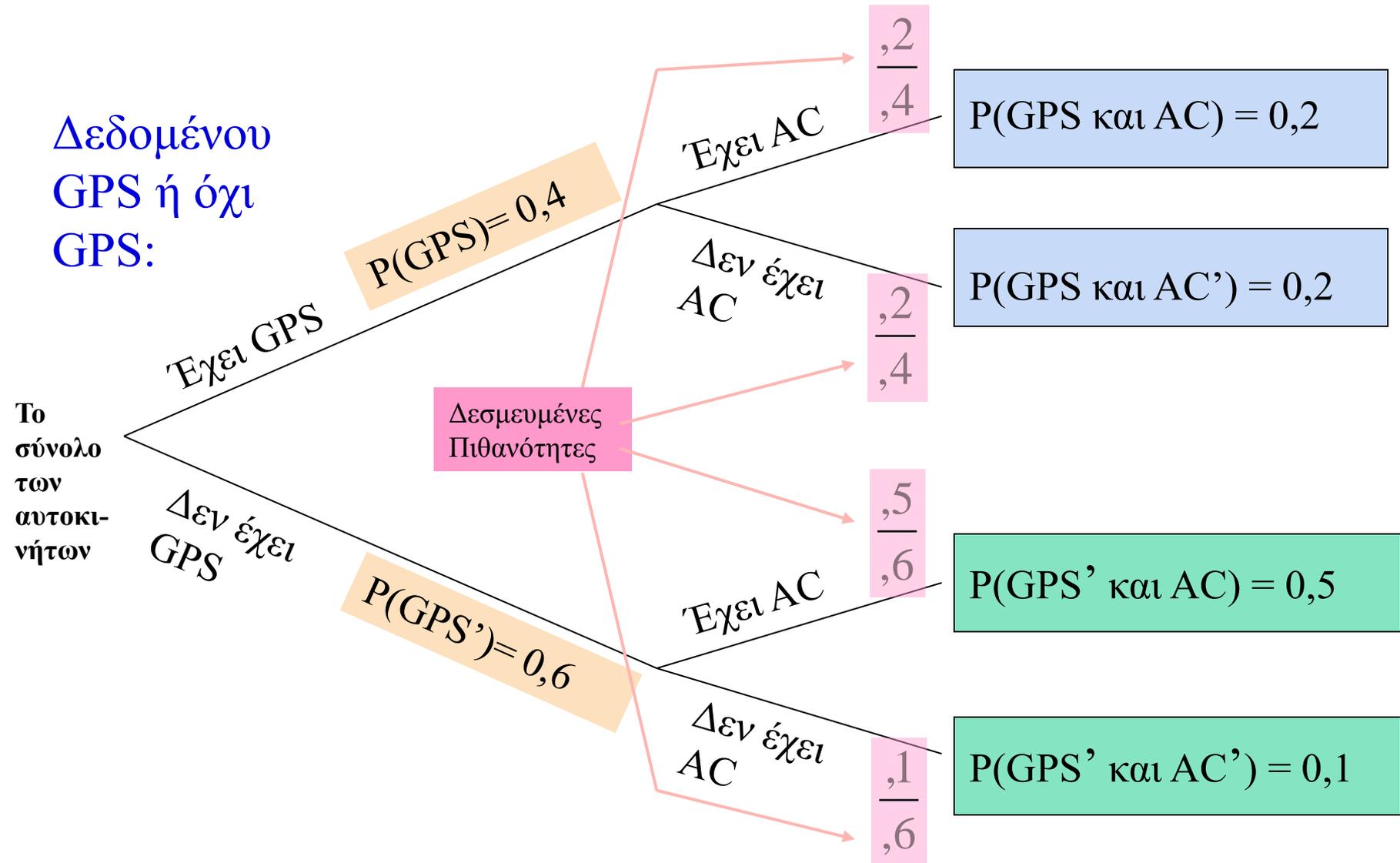
# Χρήση Δέντρων Αποφάσεων

Δεδομένου  
του AC ή όχι  
AC:



# Χρήση Δέντρων Αποφάσεων (συνέχεια)

Δεδομένου  
GPS ή όχι  
GPS:



# Ανεξαρτησία

---

- Δύο ενδεχόμενα είναι **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν:

$$P(A | B) = P(A)$$

- Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα όταν η πιθανότητα του ενός ενδεχομένου δεν επηρεάζεται από το γεγονός ότι το άλλο ενδεχόμενο έχει συμβεί

# Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

- Πολλαπλασιαστικός κανόνας για δύο ενδεχόμενα A και B:

$$P(A \text{ και } B) = P(A | B) P(B)$$

**Σημείωση:** Αν τα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε  $P(A | B) = P(A)$  και ο πολλαπλασιαστικός κανόνας απλοποιείται σε

$$P(A \text{ και } B) = P(A)P(B)$$

# Περιθώρια Πιθανότητα

---

- Περιθώρια πιθανότητα για το ενδεχόμενο A:

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)$$

–Όπου  $B_1, B_2, \dots, B_k$  είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και διαμέρισης ενδεχόμενα

# Θεώρημα του Bayes

---

- Το Θεώρημα του Bayes χρησιμοποιείται για να αναθεωρήσει προηγούμενους υπολογισμούς πιθανοτήτων βάσει νέων πληροφοριών.
- Αναπτύχθηκε από τον Thomas Bayes τον 18<sup>ο</sup> αιώνα.
- Είναι μια επέκταση της δεσμευμένης πιθανότητας.

# Θεώρημα του Bayes

---

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)}$$

- όπου:

$B_i = i^{\text{οστο}}$  ενδεχόμενο  $k$  αμοιβαία αποκλειόμενων και διαμέρισης ενδεχομένων

$A$  = νέο ενδεχόμενο που μπορεί να επηρεάσει  $P(B_i)$

# Παράδειγμα Θεωρήματος Bayes

---

- Μια εταιρεία γεωτρήσεων εκτιμά ότι υπάρχει 40% πιθανότητα να εξορύξουν πετρέλαιο για την νέα τους πετρελαιοπηγή.
- Για περισσότερες πληροφορίες έχει προγραμματιστεί ένας λεπτομερής έλεγχος. Ιστορικά, το 60% των πετυχημένων πετρελαιοπηγών έχει λεπτομερείς ελέγχους, και το 20% των αποτυχημένων πετρελαιοπηγών έχει λεπτομερείς ελέγχους.
- Δεδομένου ότι αυτή η πετρελαιοπηγή έχει προγραμματιστεί για λεπτομερή έλεγχο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι επιτυχημένη;



# Παράδειγμα Θεωρήματος Bayes

(συνέχεια)

- Υποθέτουμε  $S =$  επιτυχημένη πετρελαιοπηγή  
 $U =$  αποτυχημένη πετρελαιοπηγή
- $P(S) = 0,4$  ,  $P(U) = 0,6$  (εκ των προτέρων πιθανότητες)
- Ορίστε το ενδεχόμενο λεπτομερούς ελέγχου ως  $D$
- Δεσμευμένες πιθανότητες:  
$$P(D|S) = 0,6 \qquad P(D|U) = 0,2$$
- Σκοπός είναι να βρεθεί η  $P(S|D)$



# Παράδειγμα Θεωρήματος Bayes

(συνέχεια)

Εφαρμόστε το Θεώρημα Bayes:

$$\begin{aligned} P(S | D) &= \frac{P(D | S)P(S)}{P(D | S)P(S) + P(D | U)P(U)} \\ &= \frac{(0,6)(0,4)}{(0,6)(0,4) + (0,2)(0,6)} \\ &= \frac{0,24}{0,24 + 0,12} = 0,667 \end{aligned}$$



Έτσι η εκ των υστέρων πιθανότητα επιτυχίας, δεδομένου ότι αυτή η πετρελαιοπηγή έχει προγραμματιστεί για λεπτομερή έλεγχο είναι 0,667

# Παράδειγμα Θεωρήματος Bayes

(συνέχεια)

- Δεδομένου του λεπτομερούς ελέγχου, η εκ των υστέρων πιθανότητα μιας πετυχημένης πετρελαιοπηγής έχει αυξηθεί στο 0,667 σε σχέση με την αρχική εκτίμηση του 0,4



Ενδεχόμενο	Εκ των προτέρων Πιθ.	Δεσμευμένη Πιθ.	Από Κοινού Πιθ.	Εκ των υστέρων Πιθ.
S (πετυχημένη)	0,4	0,6	$(0,4)(0,6) = 0,24$	$0,24/0,36 = 0,667$
U (αποτυχημένη)	0,6	0,2	$(0,6)(0,2) = 0,12$	$0,12/0,36 = 0,333$

$$\text{Άθρ.} = \overline{0,36}$$

# Οι Κανόνες Απαρίθμησης είναι Συχνά Χρήσιμοι Στον Υπολογισμό Πιθανοτήτων

---

- Σε πολλές περιπτώσεις, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πιθανών αποτελεσμάτων.
  - Οι Κανόνες Απαρίθμησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτές τις περιπτώσεις για να βοηθήσουν τον υπολογισμό πιθανοτήτων.
-

# Κανόνες Απαρίθμησης

---

- Κανόνες για τον υπολογισμό του αριθμού των πιθανών αποτελεσμάτων
- Κανόνας Απαρίθμησης 1:
  - Αν οποιοδήποτε από τα  $k$  διαφορετικά αμοιβαία αποκλειόμενα και διαμέρισης ενδεχόμενα μπορούν να συμβούν σε καθεμία από τις  $n$  δοκιμές, ο αριθμός των πιθανών αποτελεσμάτων είναι ίσος με

---

$$k^n$$

– Παράδειγμα

- Αν ρίψετε ένα δίκαιο ζάρι 3 φορές τότε υπάρχουν  $6^3 = 216$  πιθανά αποτελέσματα

# Κανόνες Απαρίθμησης

---

(συνέχεια)

- Κανόνας Απαρίθμησης 2:

–Αν υπάρχουν  $k_1$  ενδεχόμενα στην πρώτη δοκιμή,  $k_2$  ενδεχόμενα στην δεύτερη δοκιμή, ... και  $k_n$  ενδεχόμενα στην  $n^{\text{οστη}}$  δοκιμή, ο αριθμός των πιθανών αποτελεσμάτων είναι

$$(k_1)(k_2)\cdots(k_n)$$

–Παράδειγμα:

- Θέλετε να πάτε σε ένα πάρκο, να φάτε σε ένα εστιατόριο, και να παρακολουθήσετε μια ταινία. Υπάρχουν 3 πάρκα, 4 εστιατόρια, και 6 επιλογές ταινίας. Πόσοι διαφορετικοί πιθανοί συνδυασμοί υπάρχουν;

- Απάντηση:  $(3)(4)(6) = 72$  διαφορετικές δυνατότητες

# Κανόνες Απαρίθμησης

---

(συνέχεια)

- Κανόνας Απαρίθμησης 3:

–Ο αριθμός των τρόπων που  $n$  στοιχεία μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά είναι

$$n! = (n)(n - 1)\cdots(1)$$

–Παράδειγμα:

•Έχετε πέντε βιβλία να τοποθετήσετε σε ένα ράφι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν αυτά τα βιβλία να τοποθετηθούν στο ράφι;

-----

•Απάντηση:  $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$  διαφορετικές δυνατότητες

# Κανόνες Απαρίθμησης

---

(συνέχεια)

- Κανόνας Απαρίθμησης 4:

– Διατάξεις: Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης  $X$  αντικειμένων που έχουν επιλεγεί από  $n$  αντικείμενα στην σειρά είναι

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-X)!}$$

– Παράδειγμα:

- Έχετε πέντε βιβλία και πρόκειται να τοποθετήσετε τρία στο ράφι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα βιβλία να διαταχθούν στο ράφι;

- Απάντηση:  
δυνατότητες

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-X)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

διαφορετικές

# Κανόνες Απαρίθμησης

---

(συνέχεια)

- Κανόνας Απαρίθμησης 5:

–Συνδυασμοί: Ο αριθμός των τρόπων επιλογής  $X$  αντικειμένων από  $n$  αντικείμενα, ανεξαρτήτου σειράς, είναι

$${}_n C_x = \frac{n!}{X!(n-X)!}$$

–Παράδειγμα:

•Έχετε πέντε βιβλία και πρόκειται να επιλέξετε τρία για διάβασμα. Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί υπάρχουν, αν αγνοήσετε τη σειρά με την οποία έχουν επιλεγεί;

•Απάντηση:  
δυνατότητες

διαφορετικές

$${}_n C_x = \frac{n!}{X!(n-X)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{(6)(2)} = 10$$

# Περίληψη Κεφαλαίου

**Σε αυτό το κεφάλαιο καλύφθηκε:**

- Η κατανόηση βασικών εννοιών των πιθανοτήτων.
- Η κατανόηση της δεσμευμένης πιθανότητας
- Η χρήση του Θεωρήματος Bayes για την αναθεώρηση των πιθανοτήτων
- Διάφοροι κανόνες απαρίθμησης