Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Γραμμική Εξίσωση

Μια γραμμική εξίσωση έχει την γενική μορφή $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, όπου $a_i, i = 1(1)n$ οι συντελεστές των αγνώστων $x_i, i = 1(1)n$ και b ο σταθερός όρος της εξίσωσης. Οποιοδήποτε διάνυσμα $u = (k_1, k_2, ..., k_n)$ ικανοποιεί την ανωτέρω εξίσωση, είναι και λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα:

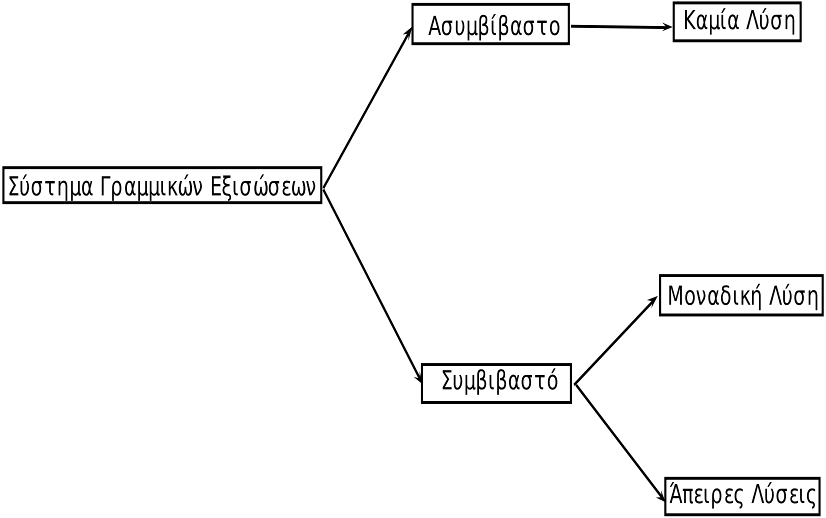
Έστω η γραμμική εξίσωση $2x + y - 3z = 14$, τότε το διάνυσμα $u = (2, 1, -3)$ είναι μια λύση της εξίσωσης, αφού για $x = 2, y = 1, z = -3$, η εξίσωση ικανοποιείται.

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

Ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων $L_i, i = 1(1)m$ έχει την γενική μορφή

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

όπου $a_{ij}, i = 1(1)m, j = 1(1)n$ οι συντελεστές των αγνώστων x_j και b_i ο σταθερός όρος της εξίσωσης L_i.
Το ανωτέρω $m \times n$ σύστημα θα ονομάζεται τετραγωνικό όταν, ο αριθμός των m εξισώσεων θα ισούται με τον αριθμό των n αγνώστων (όταν δηλαδή $m = n$).
Οποιοδήποτε διάνυσμα $u = (k_1, k_2, ..., k_n)$ ικανοποιεί την κάθε εξίσωση L_i του συστήματος, είναι και λύση του συστήματος.


Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων
Ασυμβίβαστο
Καμία Λύση
Συμβιβαστό
Μοναδική Λύση
Άπειρες Λύσεις

Παράδειγμα Συστήματος Γραμμικών Εξισώσεων

Έστω το τετραγωνικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 29 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 &= -9 \end{aligned} \tag{2}$$

και έστω το διάνυσμα $u = (1, 3, -2)$ το οποίο θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι λύση του συστήματος. Τότε

αντικαθιστώντας έχουμε: $$\begin{aligned} 1(1) + 2(3) + 3(-2) &= 1 \\ 6(1) + 3(3) - 7(-2) &= 29 \\ 8(1) - 5(3) + 1(-2) &= -9 \end{aligned}$$

Άρα το u είναι μια λύση του συστήματος.

Επαυξημένος Πίνακας και Πίνακας Συντελεστών

Ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων $L_i, i = 1(1)m$ της γενικής μορφής (1), που εξετάσαμε νωρίτερα θα έχει ως επαυξημένο τον πίνακα M και ως πίνακα συντελεστών τον A.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Εκφυλισμένη Γραμμική Εξίσωση

Μια εκφυλισμένη γραμμική εξίσωση έχει τη γενική μορφή: $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$, όπου παρατηρούμε ότι όλοι οι συντελεστές των αγνώστων $x_i, i = 1(1)n$ ισούνται με το μηδέν. Επιπλέον, όταν $b \neq 0$ η εκφυλισμένη εξίσωση δεν έχει λύση, ενώ όταν $b = 0$ οποιοδήποτε διάνυσμα $u = (k_1, k_2, ..., k_n)$ ικανοποιεί την εξίσωση.

Με βάση τα παραπάνω, για ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων το οποίο περιέχει μια εκφυλισμένη εξίσωση με σταθερά b ισχύει ότι:

α) για $b \neq 0$, το σύστημα δεν έχει λύση.

β) για $b = 0$, η εκφυλισμένη εξίσωση μπορεί να διαγραφεί από το σύστημα χωρίς να επηρεάσει το σύνολο λύσεων του συστήματος.

Ισοδύναμα Συστήματα

Έστω το σύστημα m γραμμικών εξισώσεων $L_i, i = 1(1)m$ της γενικής μορφής (1), που εξετάσαμε νωρίτερα και έστω L η γραμμική εξίσωση:
$(c_1 a_{11} + \ldots + c_m a_{m1})x_1 + \ldots + (c_1 a_{1n} + \ldots + c_m a_{mn})x_n = c_1 b_1 + \ldots + c_m b_m$,
τότε η L καλείται γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων του συστήματος.

Θεώρημα: Δύο συστήματα γραμμικών εξισώσεων έχουν τις ίδιες λύσεις εάν και μόνο εάν η κάθε εξίσωση του κάθε συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων του άλλου συστήματος.

Δύο γραμμικά συστήματα γραμμικών εξισώσεων λέγονται ισοδύναμα εάν έχουν τις ίδιες λύσεις.

Παράδειγμα Ισοδύναμου Συστήματος

Έστω το γραμμικό σύστημα (2) όπου αποτελείται από τις εξισώσεις L_1, L_2, L_3 κατά σειρά και έστω L η εξίσωση που λαμβάνεται αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις L_1, L_2, L_3 με τους αριθμούς 2,3,-2, αντίστοιχα και στη συνέχεια τις προσθέσουμε:

$$\begin{array}{rcr} 2L_1 & : & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3L_2 & : & 18x_1 + 9x_2 - 21x_3 = 87 \\ -2L_3 & : & -16x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 18 \end{array}$$

Τότε, $L = 4x_1 + 23x_2 - 17x_3 = 107$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των L_1, L_2, L_3 και γι' αυτό η λύση $u = (1, 3, -2)$ του συστήματος (2) είναι και λύση της L.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων $L_1, L_2, ..., L_m$, τότε στοιχειώδεις μετασχηματισμοί (ή στοιχειώδεις πράξεις) ονομάζονται οι ακόλουθες πράξεις:

- Αμοιβαία ανταλλαγή δύο γραμμών L_i, L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$).
- Αντικατάσταση μιας γραμμής L_i με ένα μη-μηδενικό πολλαπλάσιο του εαυτού της kL_i ($L_i \rightarrow kL_i$).
- Αντικατάσταση μιας γραμμής L_i με το άθροισμα ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής kL_j και της ίδιας ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$).

Γραμμική Εξίσωση με έναν άγνωστο

Έστω η γραμμική εξίσωση της μορφής $ax = b$, τότε:

- Αν $a \neq 0$, τότε $x = b/a$, η μοναδική λύση της εξίσωσης.
- Αν $a = 0$ και $b \neq 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Αν $a = 0$ και $b = 0$, τότε η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Σύστημα 2×2

Έστω το σύστημα δύο (μη-εκφυλισμένων) γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, της γενικής μορφής:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \tag{3}$$

όπου οι συντελεστές των αγνώστων είναι διάφοροι του μηδενός

- Αν $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μια μοναδική λύση.
  * Σε αυτήν την περίπτωση η ορίζουσα των συντελεστών θα πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός.
- Αν $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση.
- Αν $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, τότε σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Αλγόριθμος Απαλοιφής

Για την επίλυση ενός συστήματος 2×2 μπορούμε να ακολουθήσουμε την διαδικασία της απαλοιφής, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να ανάγουμε το σύστημα σε μια εξίσωση με μια μεταβλητή.

Διαδικασία Αλγορίθμου:

- Απαλοιφή προς τα εμπρός: Πολλαπλασιάζουμε την κάθε εξίσωση με μια σταθερά, έτσι ώστε οι συντελεστές (ενός αγνώστου) που προκύπτουν να είναι αντίθετοι μεταξύ τους. Εν συνεχεία προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις, ώστε να προκύψει η νέα εξίσωση, η οποία περιέχει έναν άγνωστο.
- Αντικατάσταση προς τα πίσω: Επιλύουμε την νέα εξίσωση ως προς τον άγνωστο και αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις για να βρούμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$L_1 : 2x + 3y = 1$

$L_2 : 5x + 7y = 3$

Πολλαπλασιάζουμε την L_1 με το 5 και την L_2 με το -2. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} 5L_1 &: 10x + 15y = 5 \\ -2L_2 &: -10x - 14y = -6 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις L_1, L_2 προκύπτει η εξίσωση που μας δίνει τη λύση: $y = -1$. Αντικαθιστώντας στην L_1 την τιμή της y προκύπτει $x = 2$. Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι $u = (2, -1)$.

Τριγωνική Μορφή

Έστω το ακόλουθο σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε τριγωνική μορφή:

$$\begin{aligned} 2x \quad -6y \quad +7z &= 20 \\ 4y \quad +2z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

* Η τριγωνική μορφή του συστήματος συνεπάγεται ότι ο πρώτος άγνωστος x είναι ο ηγετικός άγνωστος της πρώτης εξίσωσης, ο δεύτερος άγνωστος y είναι ο ηγετικός άγνωστος της δεύτερης εξίσωσης, και ο τρίτος άγνωστος z είναι ο ηγετικός άγνωστος της τρίτης εξίσωσης.

Παράδειγμα Συστήματος σε Τριγωνική Μορφή

Έστω το ακόλουθο σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε τριγωνική μορφή:

$$\begin{array}{rrrl} 2x & -6y & +7z & = 20 \\ & 4y & +2z & = 8 \\ & & 2z & = 4 \end{array}$$

Για την επίλυση ενός τριγωνικού συστήματος ακολουθούμε την αντικατάσταση προς τα πίσω.

1. Από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $z = 2$.
2. Αντικαθιστώντας την τιμή $z = 2$ στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι $y = 1$.
3. Αντικαθιστώντας τις τιμές $y = 1$ και $z = 2$ στη τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $x = 6$.

Κλιμακωτή Μορφή

Έστω το ακόλουθο σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & =7 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & =5 \\ & & & 3x_4 & -9x_5 & =6 \end{array}$$

* Η κλιμακωτή μορφή του συστήματος συνεπάγεται ότι ο ηγετικός άγνωστος x_3 της δεύτερης εξίσωσης βρίσκεται τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από τον ηγετικό άγνωστο της πρώτης εξίσωσης. Αντίστοιχα ο ηγετικός άγνωστος x_4 της τρίτης εξίσωσης βρίσκεται τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από τον ηγετικό άγνωστο της δεύτερης εξίσωσης.

Οι ηγετικοί άγνωστοι x_1, x_3, x_4 ονομάζονται βασικές μεταβλητές ενώ οι υπόλοιποι άγνωστοι ονομάζονται ελεύθερες μεταβλητές.

Μορφή Ελεύθερων Μεταβλητών

Έστω το ακόλουθο σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{array}{cccccl} 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & =7 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & =5 \\ & & & 3x_4 & -9x_5 & =6 \end{array}$$

Για να ορίσουμε την μορφή ελεύθερων μεταβλητών για τη γενική λύση του συστήματος χρησιμοποιούμε αντικατάσταση προς τα πίσω.

1. Λύνοντας ως προς x_4, την τελευταία εξίσωση προκύπτει $x_4 = 2 + 3x_5$.

2. Αντικαθιστούμε το $x_4 = 2 + 3x_5$ στην δεύτερη εξίσωση και λύνουμε ως προς x_3, απ'όπου προκύπτει $x_3 = 1 - 8x_5$.

2. Αντικαθιστούμε τα $x_3 = 1 - 8x_5$ και $x_4 = 2 + 3x_5$ στην πρώτη εξίσωση και λύνουμε ως προς x_1, απ'όπου προκύπτει $x_1 = -3x_2 - 9x_5$.

Παραμετρική Μορφή

Έστω το ακόλουθο σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & =7 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & =5 \\ & & & 3x_4 & -9x_5 & =6 \end{array}$$

Για να ορίσουμε την παραμετρική μορφή της λύσης θέτουμε αυθαίρετες τιμές (παραμέτρους) στις ελεύθερες μεταβλητές και ακολούθως χρησιμοποιούμε αντικατάσταση προς τα πίσω.

1. Αντικαθιστούμε το $x_5 = b$ στην τελευταία εξίσωση και λύνουμε ως προς x_4, απ'όπου προκύπτει $x_4 = 2 + 3b$.

2. Αντικαθιστούμε τα $x_4 = 2 + 3b$ και $x_5 = b$ στην δεύτερη εξίσωση και λύνουμε ως προς x_3, απ'όπου προκύπτει $x_3 = 1 - 8b$.

2. Αντικαθιστούμε τα $x_2 = a$, $x_3 = 1 - 8b$, $x_4 = 2 + 3b$ και $x_5 = b$ στην πρώτη εξίσωση και λύνουμε ως προς x_1, απ'όπου προκύπτει $x_1 = -3a - 9b$.

Αλγόριθμος Απαλοιφής GAUSS

Για την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων $m \times n$ χρησιμοποιείται η απαλοιφή GAUSS, της οποίας ο αλγόριθμος αποτελείται από δύο στάδια:

- Απαλοιφή προς τα εμπρός: Χρησιμοποιείται για την σταδιακή ελάττωση του συστήματος σε ένα ισοδύναμο σύστημα με τριγωνική ή κλιμακωτή μορφή (εφόσον το σύστημα δεν είναι ασυμβίβαστο).
- Αντικατάσταση προς τα πίσω: Χρησιμοποιείται για την εύρεση της λύσης του απλοποιημένου συστήματος.

Εφαρμογή Πρώτου Σταδίου

- Εύρεση του πρώτου αγνώστου του συστήματος, ο οποίος έχει μη-μηδενικό συντελεστή.
- Αντικατάσταση (εφόσον χρειάζεται) της πρώτης εξίσωσης, με μια εξίσωση που να περιέχει τον πρώτο άγνωστο του συστήματος, ο οποίος έχει μη-μηδενικό συντελεστή (δηλαδή να ισχύει $a_{11} \neq 0$).
- Χρήση του a_{11} ως οδηγού για την απαλοιφή του πρώτου αγνώστου από τις εξισώσεις του συστήματος, πλην της πρώτης.
- Έλεγχος της μορφής των εξισώσεων, ώστε να διαπιστωθεί αν το νέο ισοδύναμο σύστημα που προέκυψε είναι συμβιβαστό ή όχι.
- Επανάληψη των βημάτων του σταδίου, έως ότου προκύψει ισοδύναμο σύστημα τριγωνικής ή κλιμακωτής μορφής (ή έως ότου οδηγηθούμε σε ασυμβίβαστο σύστημα).

Παράδειγμα Απαλοιφής GAUSS

Έστω το ακόλουθο σύστημα, το οποίο θέλουμε να ανάγουμε σε τριγωνική ή κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{array}{cccc} x & +2y & -4z & =-4 \\ 2x & +5y & -9z & =-10 \\ 3x & -2y & +3z & =11 \end{array}$$

Για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιούμε την απαλοιφή προς τα εμπρός, εφαρμόζοντας τους ακόλουθους μετασχηματισμούς.

1. $L_2 \to L_2 - 2L_1$.
2. $L_3 \to L_3 - 3L_1$.

$$\begin{array}{cccc} x & +2y & -4z & =-4 \\ & y & -z & =-2 \\ & -8y & +15z & =23 \end{array}$$

Παράδειγμα Απαλοιφής GAUSS (συνέχεια)

Έπειτα εφαρμόζουμε $L_3 \to L_3 + 8L_2$.

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & -4z & = -4 \\ & y & -z & = -2 \\ & & z & = 1 \end{array}$$

Οπότε καταλήγουμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα τριγωνικής μορφής.

Στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε αντικατάσταση προς τα πίσω για να βρούμε την μοναδική λύση του συστήματος που είναι $u = (2, -1, 1)$.

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων και Επαυξημένος Πίνακας

Για την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων μπορούμε να το ανάγουμε σε έναν επαυξημένο πίνακα, τον οποίο μπορούμε να επιλύσουμε κατά τα γνωστά.

Λύση Παραδείγματος με Χρήση του Επαυξημένου Πίνακα

Έστω το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{array}{cccc} x & +2y & -4z & =-4 \\ 2x & +5y & -9z & =-10 \\ 3x & -2y & +3z & =11 \end{array}$$

Για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

Συνέχεια Παραδείγματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 8R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Το οποίο αντιστοιχεί στο σύστημα τριγωνικής μορφής:

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & -4z & = -4 \\ & y & -z & = -2 \\ & & z & = 1 \end{array}$$

με μοναδική λύση του συστήματος που είναι $u = (2, -1, 1)$.

Εναλλακτικά

Εναλλακτικά συνεχίζουμε τη διαδικασία από την τριγωνική μορφή του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_1 + 4R_3]{R_2 \to R_2 + R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$