Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Πραγματικές Συναρτήσεις

Έννοια Συνόλου

Ως σύνολο ορίζεται μια συλλογή σαφώς διακριτών αντικειμένων και καλώς καθορισμένων αντικειμένων (τα οποία καλούνται στοιχεία) που προέρχονται από τον χώρο της εμπειρίας ή της διανοήσεως μας. (*G.Cantor*)

Συμβολισμοί - Ορισμοί Συνόλων

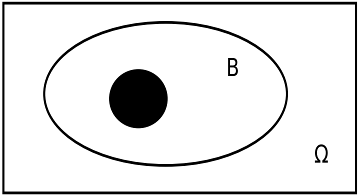
Έστω A, B οποιαδήποτε σύνολα, των οποίων τα στοιχεία προέρχονται από ένα ευρύτερο σύνολο Ω, τότε μπορούμε να ορίσουμε τα ακόλουθα:

- $x \in A$: Το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο A.
- $x \notin A$: Το στοιχείο x **δεν** ανήκει στο σύνολο A.
- $A \subseteq B$: Το σύνολο A είναι υποσύνολο του B.
- $A = B$: Τα σύνολα A και B είναι ίσα ($\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ ή εναλλακτικά $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$).
- $A \cup B$: Η ένωση των συνόλων A και B ($A \cup B = \{x : x \in A$ ή $x \in B\}$).
- $A \cap B$: Η τομή των συνόλων A και B ($A \cap B = \{x : x \in A$ και $x \in B\}$).
- $A \setminus B$: Η διαφορά του συνόλου B από το A ($A \setminus B = \{x : x \in A$ και $x \notin B\}$).
- $\emptyset$: Το κενό σύνολο

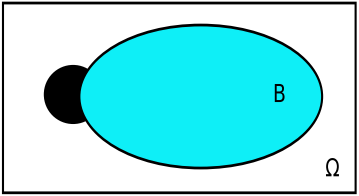
Καρτεσιανό Γινόμενο

Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B, είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α,β):
$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}$, όπου $A, B \neq \emptyset$
Παράδειγμα 1: Αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{x, y\}$, τότε:
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$
Παράδειγμα 2: $\Re \times \Re = \{(x, y) : x \in \Re, y \in \Re\}$,
που είναι το σύνολο των σημείων του καρτεσιανού επιπέδου των αξόνων xx', yy'

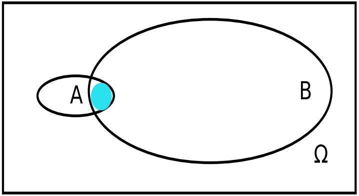
Το A είναι υποσύνολο του B



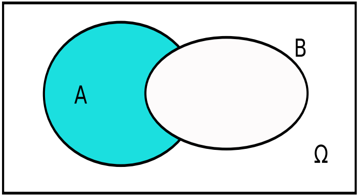
Η ένωση των A και B



Η τομή των A και B



Η διαφορά του B απο το A



Υποσύνολα Πραγματικών Αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$) έχει τα εξής υποσύνολα:

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$).
- Το σύνολο των ακέραιων αριθμών ($\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$).
- Το σύνολο των ρητών αριθμών ($\mathbb{Q} = \{\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{R} : \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \nu \neq 0\}$)./
- Το σύνολο των άρρητων αριθμών ($\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).
- Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}_+$).
- Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}_-$).

Διαστήματα στο $\mathbb{R}$

Διαστήματα στο $(\mathbb{R})$ με άκρα τους αριθμούς α, β (όπου $\alpha < \beta$):

- $x \in (\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$.
- $x \in [\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}$.
- $x \in [\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$.
- $x \in (\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$.
- $x \in (-\infty, \alpha) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$.
- $x \in (\alpha, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$.
- $x \in (-\infty, \alpha] \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha\}$.
- $x \in [\alpha, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$.
- $x \in (-\infty, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R}\}$.

Ορισμός Πραγματικής Συνάρτησης μιας Μεταβλητής

Πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής από το σύνολο Α στο σύνολο Β (όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$), καλείται κάθε κανόνας f σύμφωνα με το οποίο σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in B$. Αυτό το στοιχείο y καλείται τιμή της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Τα σύνολα Α και Β καλούνται πεδίο ορισμού (ή σύνολο αφετηρίας) και πεδίο τιμών (ή σύνολο άφιξης) αντίστοιχα. Το σύνολο $f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \mid y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$ καλείται σύνολο τιμών της f. Η συνάρτηση f από το σύνολο Α στο Β συμβολίζεται ως $f : A \to B$. Η μεταβλητή x η οποία εκφράζει ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου Α καλείται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ η μεταβλητή y που εκφράζει το στοιχείο που αντιστοιχεί στο Β καλείται εξαρτημένη μεταβλητή.

Διμελής Σχέση - Συνάρτηση

Διμελή σχέση σ από ενα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι, η διατεταγμένη τριάδα των συνόλων $\sigma = (A, B, G)$, όπου $A, B \neq \emptyset$ και $G \subseteq A \times B$

Συνάρτηση f θα ονομάζουμε μια διμελή σχέση $f(A, B, G)$, τέτοια ώστε σε κάθε στοιχείο του Α να αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο του Β ($f : A \rightarrow B$), όπου:

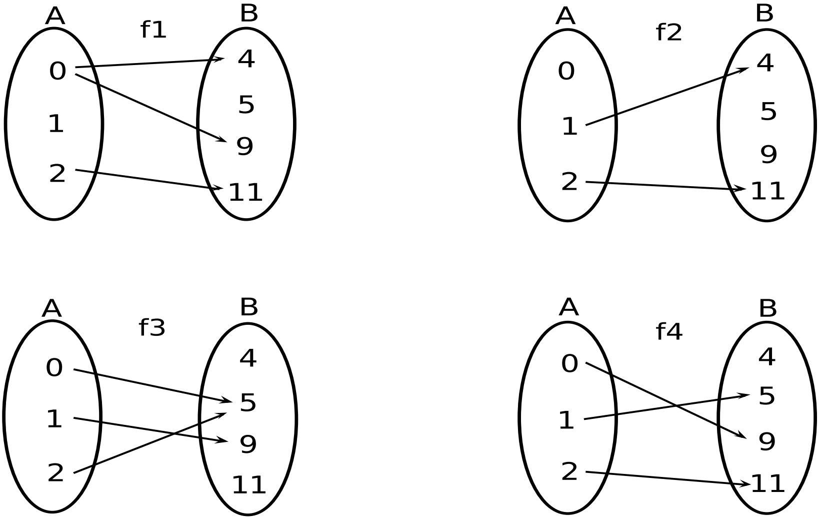
Α: πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Β: σύνολο άφιξης της συνάρτησης.

G: γράφημα της f.

Παράδειγμα Διμελούς Σχέσης

Έστω $A = \{0, 1, 2\}$ και $B = \{4, 5, 9, 11\}$
Το καρτεσιανό γινόμενο
$A \times B = \{(0, 4), (0, 5), (0, 9), (0, 11), (1, 4), (1, 5), (1, 9), (1, 11), (2, 4), (2, 5), (2, 9), (2, 11)\}$
Έστω $G_i, \quad i = 1(1)4$ υποσύνολα του $A \times B$:
$G_1 = \{(0, 4), (0, 9), (1, 4), (2, 11)\}$
$G_2 = \{(1, 4), (2, 11)\}$
$G_3 = \{(0, 5), (1, 9), (2, 5)\}$
$G_4 = \{(0, 9), (1, 5), (2, 11)\}$
Τα βελοειδή διαγράμματα των σχέσεων f_1, f_2, f_3, f_4, δίνονται από το ακόλουθο διάγραμμα, όπου:
$f_1 = (A, B, G_1)$,
$f_2 = (A, B, G_2)$,
$f_3 = (A, B, G_3)$,
$f_4 = (A, B, G_4)$



Οι f_3, f_4 είναι συναρτήσεις αφού σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο του B. Ενώ για τις f_1, f_2 δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο.

Η Έννοια της Μεταβλητής

Μεταβλητή (έστω x) καλείται το τυχόν στοιχείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.
πχ. στην f_3 για $x = 1$ έχουμε: $f(x) = y \Rightarrow f(1) = 9$, όπου:
x η ανεξάρτητη μεταβλητή και
y η εξαρτημένη μεταβλητή.

Έστω η συνάρτηση $f : A \to B$

- Αν $B \subseteq \mathbb{R}$ τότε η f ονομάζεται πραγματική συνάρτηση.
- Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$: τότε η f ονομάζεται πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής (Αν σε μια πραγματική συνάρτηση το σύνολο αφίξεως Β δεν δίνεται, τότε θεωρούμε $B = \mathbb{R}$).
- Μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής θεωρούμε ότι είναι πλήρως ορισμένη αν δίνεται το πεδίο ορισμού της και ο τύπος της.
- Η συνάρτηση f από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β ονομάζεται επί του Β εάν για κάθε στοιχείο y στο πεδίο τιμών Β της f, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x στο πεδίο ορισμού Α της f τέτοιο ώστε $y = f(x)$.
- Η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή αμφιμονότιμη ή ένα προς ένα (1 - 1) όταν
  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα
  $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  πχ Η $f(x) = 4x - 3$ είναι 1-1, καθώς αν ισχύει ότι: $4x_1 - 3 = 4x_2 - 3$ τότε $x_1 = x_2$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Να βρείτε: α) το πεδίο ορισμού της και β) το σύνολο τιμών της.

α)
$A = \{x \in \Re : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \Re : x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

β) Λύνουμε ως προς x την εξίσωση
$\frac{2x}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x = (x-1)y \Leftrightarrow 2x - yx = -y \Leftrightarrow (2-y)x = -y$ (1)

Η (1) έχει λύση για $y \neq 2$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι
$f(A) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Πρόσθετοι Ορισμοί Συναρτήσεων

Έστω μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \to B$

- Αν $c \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = c$ ονομάζεται σταθερή συνάρτηση.
- Η συνάρτηση $f(x) = x$, ονομάζεται ταυτοτική συνάρτηση του A και συμβολίζεται με id_A.
- Δύο συναρτήσεις f_1, f_2, καλούνται ίσες όταν:
  α) έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A
  β) $f_1(x) = f_2(x) \forall x \in A$

Μονοτονία Συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $f : A \to B$ και $C \subseteq A$, τότε η f ονομάζεται:

- Γνησίως αύξουσα στο C όταν,
  $\forall x_1, x_2 \in C, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο C όταν,
  $\forall x_1, x_2 \in C, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Αύξουσα στο C όταν, $\forall x_1, x_2 \in C, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Φθίνουσα στο C όταν, $\forall x_1, x_2 \in C, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Γνησίως μονότονη στο C, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο C.

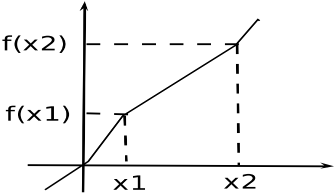
* Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και ένα προς ένα (1-1). Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Λόγος Μεταβολής λ

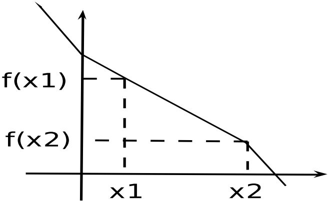
Το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης καθορίζεται και από το πρόσημο του λόγου μεταβολής, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, όπου $x_1 \neq x_2$. Σύμφωνα με τον λόγο μεταβολής, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A, είναι:

- Γνησίως αύξουσα όταν, $\forall x_1, x_2 \in A, \lambda > 0$.
- Γνησίως φθίνουσα όταν, $\forall x_1, x_2 \in A, \lambda < 0$.
- Αύξουσα όταν, $\forall x_1, x_2 \in A, \lambda \geq 0$.
- Φθίνουσα όταν, $\forall x_1, x_2 \in A, \lambda \leq 0$.

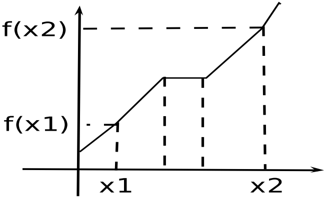
Γνησίως Αύξουσα



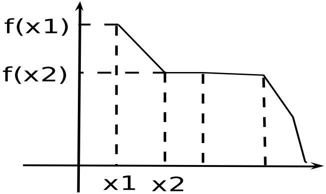
Γνησίως Φθίνουσα



Αύξουσα



Φθίνουσα



Παράδειγμα

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το είδος της μονοτονίας της $f(x) = \sqrt{x}$.
Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty+)$
Για να δείξουμε την μονοτονία της f υπάρχουν δύο τρόποι
α′ τρόπος) $\forall x \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Άρα $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
β′ τρόπος) $\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{x_1-x_2}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$
Παρατηρούμε ότι $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$. Οπότε και $\lambda > 0$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

Μια πολυωνυμική συνάρτηση n βαθμού $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δίνεται από την έκφραση:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$, όπου:
$n = 1, 2, \ldots$ και
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$

Παραδείγματα:

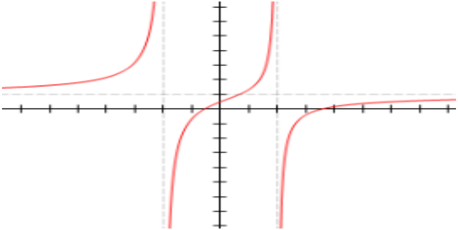
$P(x) = a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$
$P(x) = a_2 x^2, x \in \mathbb{R}$

Ρητές Συναρτήσεις

Έστω δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n και m βαθμού αντίστοιχα.
Ως ρητή συνάρτηση ορίζεται η συνάρτηση $R : \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ που εκφράζεται από τον τύπο:
$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$

<u>Παράδειγμα</u>:

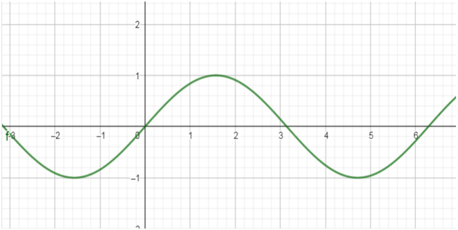
$P(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}, x \in \mathbb{R}$



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

- $f(x) = sinx, \ \ f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
- $f(x) = cosx, \ \ f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
- $f(x) = tanx, \ \ f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
- $f(x) = cotx, \ \ f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

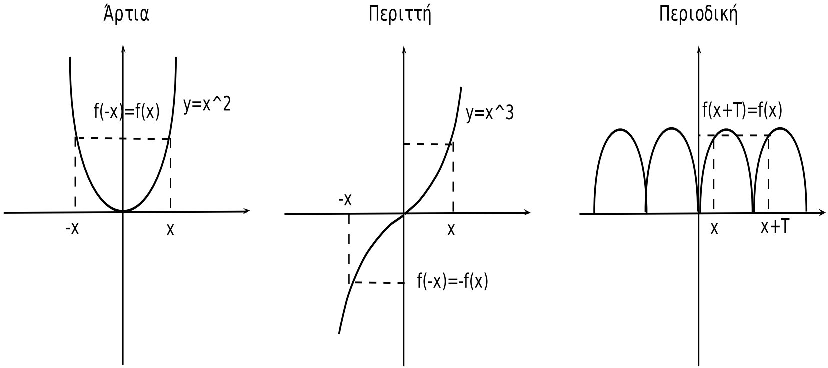
Παράδειγμα:
$f(x) = sinx$



Άρτιες, Περιττές και Περιοδικές Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται:

- Άρτια όταν, $-x \in A$ και $f(-x) = f(x), \forall x \in A$
- Περιττή όταν, $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$
- Περιοδική όταν, $x + T \in A$ και $f(x + T) = f(x), \forall x \in A$



Παραδείγματα

Να δείξετε ότι η συνάρτηση α) $f(x) = x^2$ είναι άρτια και β) $f(x) = x^3$ είναι περιττή

Λύση:

α) Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα όντως η $f(x) = x^2$ είναι άρτια.

β) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$. Επίσης $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα όντως η $f(x) = x^3$ είναι περιττή.

Φραγμένες Συναρτήσεις

Έστω η συνάρτηση $f : A \to B$ και $C \subseteq A$, τότε η f λέγεται:

- Άνω φραγμένη στο C, όταν υπάρχει $\Phi \in \mathbb{R} : \forall x \in C \Rightarrow f(x) \leq \Phi$
- Κάτω φραγμένη στο C, όταν υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R} : \forall x \in C \Rightarrow f(x) \geq \varphi$
- Φραγμένη στο C, όταν υπάρχουν $\varphi, \Phi \in \mathbb{R} : \forall x \in C \Rightarrow \varphi \leq f(x) \leq \Phi$

Πράξεις Συναρτήσεων

Αν $f_1, f_2 \in F_A$, όπου F_A, το σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμό A, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων:

- Το άθροισμα $f_1 + f_2 : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
- Το γινόμενο $f_1 f_2 : (f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$.
- Την αντίθετη $-f$ της $f : (-f)(x) = -f(x)$.
- Το γινόμενο $\lambda f, \lambda \in \Re : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Το πηλίκο $(f_1 : f_2)(x)$, με πεδίο ορισμού $B = \{x \in A : f_2(x) \neq 0\}$: $(f_1 : f_2)(x) = f_1(x) : f_2(x)$.

Σύνθεση Συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδιά ορισμού A και B αντίστοιχα. Τότε ορίζεται ως σύνθεση $(g \circ f)$ των συναρτήσεων f και g, μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού: $\{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A$ και τύπο: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Παράδειγμα:

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1, x \in [0, 5]$ και $g(x) = e^x, x \in [2, 7]$. Τότε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $\{x \in [0, 5] : f(x) \in [2, 7]\} = \{x \in [0, 5] : x + 1 \in [2, 7]\} = \{0 \leq x \leq 5, 2 \leq x + 1 \leq 7\} = \{0 \leq x \leq 5, 1 \leq x \leq 6\} = [1, 5] \subseteq [0, 5]$

Ο τύπος της $(g \circ f)$ δίνεται από την εξίσωση $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = e^{x+1}$

Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω $f : A \to f(A)$ μια 1-1 συνάρτηση, τότε $f^{-1} : f(A) \to A : \forall y = f(x) \in f(A)$ να αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό $x \in A$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται αντίστροφη της f και ισχύει $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

- Αν για μια συνάρτηση ισχύει: $f : A \to f(A) \neq (1-1)$, τότε η αντίστροφη σχέση αυτής δεν είναι συνάρτηση.
- Αντιστρέψιμη συνάρτηση λέγεται κάθε συνάρτηση που έχει αντίστροφη.
- Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι επίσης γνησίως μονότονη, με το ίδιο είδος μονοτονίας

Παράδειγμα Αντίστροφης Συνάρτησης

Έστω $f(x) = \sqrt{x-2}$, και ισχύει ότι $f : [2+\infty) \to [0, +\infty)$.
Ισχύει ότι: $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι (1-1) συνάρτηση και επομένως είναι αντιστρέψιμη. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης της f λύνουμε την ακόλουθη εξίσωση ως προς x.
$y = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow y^2 = x - 2 \Leftrightarrow x = y^2 + 2$. Οπότε έχουμε:
$f^{-1}(x) = x^2 + 2$ όπου $f^{-1} : [0, +\infty) \to [2+\infty)$

Συναρτήσεις Εκθετικής Μορφής

Μια συνάρτηση εκθετικής μορφής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ περιγράφεται από τον τύπο $f(x) = \alpha^x$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

- Αν $\alpha > 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Αν $0 < \alpha < 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
- Η εκθετική συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

Λογαριθμική Συνάρτηση

Η λογαριθμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ περιγράφεται από τον τύπο $f(x) = log_\alpha x$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

- $y = \log_\alpha x \Leftrightarrow \alpha^y = x$, όπου $x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}$. Ο εκθέτης y καλείται λογάριθμος του x με βάση α.
- Αν $\alpha > 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} log_\alpha x = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} log_\alpha x = -\infty$
- Αν $0 < \alpha < 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} log_\alpha x = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} log_\alpha x = +\infty$
- Η λογαριθμική συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.
- Η λογαριθμική συνάρτηση διέρχεται από το σημείο (1,0) και έχει μοναδική ρίζα το 1 ($log_\alpha x = 0 \Leftrightarrow x = 1$).
- Αν $\alpha := 10$ τότε, αντί για $log_{10}x$ χρησιμοποιούμε $logx$. Επίσης αν $\alpha := e$ χρησιμοποιούμε τον φυσικό λογάριθμο του x, lnx

Ιδιότητες Λογαριθμικής Συνάρτησης

- $log_{\alpha} 1 = 0$
- $log_{\alpha} a = 1$
- $log_{\alpha} x_1 x_2 = log_{\alpha} x_1 + log_{\alpha} x_2 = 0$
- $log_{\alpha} x_1 : x_2 = log_{\alpha} x_1 - log_{\alpha} x_2 = 0$
- $log_{\alpha} x^k = klog_{\alpha} x, k \in \Re$
- $log_{\alpha} x = \frac{log_{\beta} x}{log_{\beta} a}$