Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ολοκληρώματα

Παράγουσα συνάρτηση

Έστω ένα διάστημα $A \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $F : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται αρχική ή παράγουσα συνάρτηση της f στο A, όταν είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει: $F'(x) = f(x), \forall x \in A$.
Παράδειγμα:
Η $F(x) = \frac{x^2}{2} - 3, x \in [0, 3]$, είναι παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = x$ στο $[0, 3]$.
*Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f σε ένα διάστημα $A \in \mathbb{R}$. Τότε μια συνάρτηση $G : A \to \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο A εάν και μόνο εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός c ($c \in \mathbb{R}$), τέτοιος ώστε: $G(x) = F(x) + c, \forall x \in A$.

Ορισμός

Έστω το διάστημα $A \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.
Το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων της f στο A ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο A και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$.
Από τα παραπάνω ισχύει ότι:
$\int f(x)dx = F(x) + c$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

Πίνακας Βασικών Αόριστων Ολοκληρωμάτων

- $\int 0dx = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int 1dx = x + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c,\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$
- $\int e^x dx = e^x + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c,\ \forall k, x \in \mathbb{R}$
- $\int sinxdx = -cosx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int cosxdx = sinx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tanx + c,\ \forall x \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$
- $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotx + c,\ \forall x \in (k\pi, (k+1)\pi)$

Παραδείγματα

- $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$
- $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = 2\sqrt{x} + c$
- $\int (sinx + 1/x + x) dx = -cosx + ln|x| + x^2/2 + c$

Ιδιότητες

Έστω οι συναρτήσεις f και g που έχουν αρχική συνάρτηση σε ένα διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ και $l, k \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $\int lf(x)dx = l \int f(x)dx$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int (lf(x) \pm kg(x))dx = l \int f(x)dx \pm k \int g(x)dx$

Παραδείγματα

- $\int (1+3x)dx = \int 1dx + 3\int xdx = x + 3\frac{x^2}{2} + c$
- $\int (5x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 1)dx =$
  $5\int x^3dx + \frac{1}{2}\int x^2dx - 2\int xdx + \int 1dx = \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x + c$
- $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{x^{1/2}}dx - \int \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int x^{1/2}dx - \int x^{-1/2}dx =$
  $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} + c$

Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση (Αλλαγή Μεταβλητής)

Ορισμός: Έστω η πραγματική συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $A \in \mathbb{R}$ και η πραγματική συνάρτηση g ορισμένη και παραγωγίσιση στο διάστημα $A' \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(A') \subseteq A$. Τότε, άν η F είναι μια παράγουσα της f στο Α ισχύει ότι:
$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c, c \in \Re$
Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής (ή ολοκλήρωσης με αντικατάσταση) βασίζεται στον τύπο:
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$
Παράδειγμα:
$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$
Έστω $u = x^2 + 1$ και $du = 2xdx$.
Οπότε $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{u}du = ln|u| + c = ln(x^2 + 1) + c$

Παραγοντική Ολοκλήρωση

Η μέθοδος βασίζεται στον τύπο:
$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Παράδειγμα:
$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

Άλλοι Τύποι Ολοκλήρωσης

- Παράδειγμα ολοκλήρωσης με χρήση του τύπου:
  $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  $\int (e^x sinx + e^x cosx)dx = \int ((e^x)' sinx + e^x (sinx)')dx =$
  $\int (e^x sinx)' dx = e^x sinx + c$
- Παράδειγμα ολοκλήρωσης με χρήση του τύπου:
  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$
  $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = ln(x^2 + 1) + c.$

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Η γενική μορφή των ρητών συναρτήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} \tag{1}$$

όπου $m, n \in N$.
Για την ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων χρησιμοποιούμε συνήθως μια μεθοδολογία που καθορίζεται από τον βαθμό του πολυωνύμου του αριθμητή (n) και του παρονομαστή (m).

Περιπτώσεις $n \geq m$

Τόσο στις περιπτώσεις που $n = m$ όσο και στις περιπτώσεις που $n > m$ συνήθως αναλύουμε σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων (ή εκτελούμε διαίρεση πολυωνύμων).

Παράδειγμα:

$\int \frac{3x+2}{x+1} dx = \int \frac{3x+2+1-1}{x+1} dx = \int (\frac{3x+3}{x+1} - \frac{1}{x+1}) dx = \int (3 - \frac{1}{x+1}) dx = 3x - ln|x+1| + C$

Περιπτώσεις $n < m$

Έστω $\frac{P(x)}{Q(x)}$

- Βήμα 1: Αναλύουμε το πολυώνυμο $Q(x)$ ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων πραγματικών παραγόντων
- Βήμα 2: Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - r_n} \tag{2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - r_n)^k} \tag{3}$$

- Βήμα 3: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ παράγουσα της f. Τότε:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^2 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

2ο Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ όπου:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx, \;\; x \in [a, b] \tag{5}$$

Τότε:
η F είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $F'(x) = f(x) \; \forall \; x \in [a, b]$

Ορισμός: Εμβαδόν μιας περιοχής μεταξύ καμπυλών

Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις, όπου $f(x) \geq g(x)$ στο $[a, b]$. Το εμβαδόν της περιοχής που οριοθετείται από τα γραφήματα των f και g στο a, b είναι:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \tag{6}$$

Διάστημα $[a, \infty)$

Εάν η f είναι συνεχής στο $[a, \infty)$, τότε:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

Παράδειγμα:

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx$$

Διάστημα $(-\infty, b]$

Εάν η f είναι συνεχής στο $(-\infty, b]$, τότε:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{8}$$

Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(2-x)^2} dx$$

Διάστημα $(-\infty, \infty)$

Εάν η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \infty)$, τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx \qquad (9)$$

Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$