Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

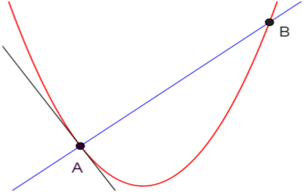
Παράγωγος

Φυσική ερμηνεία παραγώγου

Έστω ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και έστω ότι η συνάρτηση $s(t)$ εκφράζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t.
Αν κατά τη χρονική στιγμή $t0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $s(t_0)$, και ο χρόνος μεταβάλλεται κατά h τότε η θέση του σώματος μετατοπίζεται κατά $s(t_0 + h) - s(t_0)$. Η μέση ταχύτητα του σώματος ορίζεται στο χρονικό διάστημα t_0 και $t_0 + h$ ως $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$.
Η στιγμιαία ταχύτητα (ή ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης) του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ορίζεται ως:
$\upsilon(t_0) = s'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Έστω η συνάρτηση f (καμπύλη του γραφήματος) και $A(x_0, f(x_0)), B(x, f(x))$ δύο σημεία της καμπύλης.
Το ευθύγραμμο τμήμα AB ονομάζεται χορδή (τέμνουσα της καμπύλης), ενώ η ευθεία που τέμνει την καμπύλη μόνο στο σημείο A ονομάζεται εφαπτομένη στο σημείο A.



Καθώς κινούμαστε από το σημείο B στο σημείο A τόσο η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος AB προσεγγίζει την κλίση της εφαπτομένης στο A.
Η κλίση της ευθείας AB ορίζεται ως: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Εξίσωση εφαπτομένης

Έστω η συνάρτηση f και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \in \Re$, τότε η ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από το σημείο Α καλείται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Α.

- Η ευθεία (εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$) δίνεται από την εξίσωση $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
- Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ ή $+\infty$ και η f είναι συνεχής στο x_0 τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία $x = x_0$.
- Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και οι πλευρικοί παράγωγοί της υπάρχουν στο $\Re$ και δεν είναι ίσοι τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ καλείται γωνιακό σημείο της γραφικής παράστασης της f. Στα γωνιακά σημεία δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Ορισμός Παραγώγου

- Για μια πραγματική συνάρτηση $f : A \to \Re$ με πεδίο ορισμού $A \subseteq \Re$ και $x_0 \in A$ το όριο $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, εφόσον υπάρχει ονομάζεται παράγωγος αριθμός της f στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο x_0.
- Ισοδύναμα αν θέσουμε: $h = x - x_0 \Leftrightarrow x = h + x_0$ προκύπτει $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \Re$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ (το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα).

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο σημείο $x_0 = 3$.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x + 3 = 6$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x_0 + h = 6$

Πλευρικές Παράγωγοι

- Οι πλευρικοί παράγωγοι της f στο x_0 (εφόσον υπάρχουν) δίνονται από τις σχέσεις:
$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Αν οι πλευρικές παράγωγοι στο x_0 υπάρχουν στο $\Re$ και είναι ίσες ($f'_r(x_0) = f'_l(x_0) = l$), τότε υπάρχει ο παράγωγος αριθμός $f'(x_0)$ και ισχύει $f'(x_0) = l$.

Θεώρημα Fermat

Αν μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Α τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$

*Το τοπικό ακρότατο θα είναι:

- τοπικό μέγιστο, όταν $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.
- τοπικό ελάχιστο, όταν $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

** Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος Α και ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε το σημείο x_0 ονομάζεται στάσιμο σημείο της f. Επίσης, τα στάσιμα σημεία καθώς και τα σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται (αλλά είναι συνεχής), λέγονται κρίσιμα σημεία.

Παράδειγμα

Για μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:
$f(x) = -3x^2 - 12x + 3, -1 < x < 0$ και
$f(x) = -3x^2 + 12x + 3, 0 \leq x < 5$ να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία.
Για την f ισχύει ότι $lim_{x \to 0^+} f(x) = lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 3$.
Άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
Επίσης ισχύει ότι $lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -12$ και
$lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 12$. Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Η παράγωγος της f δίνεται από τις σχέσεις:
$f'(x) = -6x - 12, -1 < x < 0$ και $f'(x) = -6x + 12, 0 < x < 5$,
οπότε:
Αν $-1 < x < 0, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, όμως
$-2 \notin (-1, 0)$.
Αν $0 < x < 5, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, όπου
$2 \in (0, 5)$.
Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $x_0 = 0$ και το $x_1 = 2$.

Θεώρημα Rolle

Για μια συνάρτηση f υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$, αν για την f ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $[a, b]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Για μια συνάρτηση f υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, αν για την f ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $[a, b]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)

*Επίσης σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής ισχύουν τα εξής:

- Αν f συνεχής σ'ένα διάστημα A και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in A$, $f'(x) = 0$, τότε η f είναι σταθερή στο A.
- Αν f και g συνεχείς σ'ένα διάστημα A και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in A$, $f'(x) = g'(x)$, τότε $\exists c \in \Re : f(x) = g(x) + c, \forall x \in A$.
- Αν f ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$, τότε $\forall x \in (a, b)$, αν $f'(x) > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και αν $f'(x) < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$.

Ακρότατα Συνάρτησης

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει:
  - τοπικό μέγιστο, αν $\forall x \in (a, x_0], f'(x) \geq 0$ και $\forall x \in [x_0, b), f'(x) \leq 0$.
  - τοπικό ελάχιστο, αν $\forall x \in (a, x_0], f'(x) \leq 0$ και $\forall x \in [x_0, b), f'(x) \geq 0$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι:
  - τοπικό μέγιστο της f, αν $f''(x_0) < 0$.
  - τοπικό ελάχιστο της f, αν $f''(x_0) > 0$.

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x.x \in \Re$.
Έχουμε ότι
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x-2)(x-4)$.
Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x		2		4	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	-	$\|\|$	$+$

Οπότε $\forall x \leq 2, f'(x) \geq 0$ και $\forall x \in [2,4], f'(x) \leq 0$. Άρα η f' παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 2$ με $f(2) = 20$.
Επίσης, $\forall x \geq 4, f'(x) \geq 0$ και $\forall x \in [2,4], f'(x) \leq 0$. Άρα η f' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 4$ με $f(4) = 16$.

Κυρτότητα Συνάρτησης

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και ισχύει ότι:
  - η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b), τότε η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο $[a, b]$.
  - η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b), τότε η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο $[a, b]$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και ισχύει ότι:
  - $f''(x) > 0$, τότε η f είναι κυρτή στο $[a, b]$.
  - $f''(x) < 0$. τότε η f είναι κοίλη στο $[a, b]$.
- Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι ένα σημείο καμπής στο της f, τότε $f''(x_0) = 0$ ή η f'' δεν υπάρχει στο x_0.

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κυρτότητα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x. x \in \Re$.
Έχουμε ότι:
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ και
$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.
Άρα $f''(x) = 0$ για $x_0 = 1$. Επίσης έχουμε ότι $f''(x) > 0$, για $x > 1$ και $f''(x) < 0$, για $x < 1$.
Συνεπώς η f είναι κυρτή για $x > 1$ και κοίλη για $x < 1$. Επίσης παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$, με σημείο καμπής το $(x_0, f(x_0)) = (1, 0)$.

Κανόνας de L'Hospital

- Αν για $a \in \Re$ ή $a = \pm\infty$ ισχύει ότι, $lim_{x \to a} f(x) = 0$ και $lim_{x \to a} g(x) = 0$, όπου f και g παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού (εκτός ίσως του a) τότε $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Αν για $a \in \Re$ ή $a = \pm\infty$ ισχύει ότι, $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ και $lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, όπου f και g παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού (εκτός ίσως του a) τότε $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.