

Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfrap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Έννοια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω δύο σύνολα A, B διάφορα του κενού συνόλου και ένας κανόνας f με τον οποίο αντιστοιχίζουμε σε κάθε στοιχείο του συνόλου A ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου B . Τότε λέμε ότι έχει οριστεί μια μονότιμη (ή μονοσήμαντη) συνάρτηση ή απλώς συνάρτηση f του A στο B .

Αν το A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και B είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η f ονομάζεται (επίσης) πραγματική συνάρτηση.

$$f : A \rightarrow B$$

Έστω $z = f(x, y) = xy + 3y$ μια συνάρτηση 2 μεταβλητών,
όπου

x, y : οι ανεξάρτητες μεταβλητές,

z : η εξαρτημένη μεταβλητή.

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(1, 3) = 12$$

$$f(3, 1) = 6$$

Ορισμός

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x, y , που είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$

($f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) και (x_0, y_0) ένα εσωτερικό σημείο του A .

Η συνάρτηση f λέγεται μερικώς παραγωγίσιμη ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (x_0, y_0) , όταν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

και λαμβάνει πεπερασμένη (πραγματική) τιμή.

Εναλλακτικά, η Εξ. (1), γράφεται (για $h = x - x_0$):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Την οριακή αυτή τιμή την ονομάζουμε μερική παράγωγο της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) και τη συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ ή } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \text{ ή } f_x(x_0, y_0) \text{ ή } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} \text{ ή } D_x f(x_0, y_0)$$

Ανάλογα ορίζεται και η $f_y(x_0, y_0)$

- Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου μιας συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς μια εκ των δύο μεταβλητών της, θεωρούμε την άλλη μεταβλητή σταθερά. πχ όταν παραγωγίσουμε την συνάρτηση f ως προς x (f_x), θεωρούμε την μεταβλητή y σταθερά.
- Αν μια συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x σε ένα σημείο (x_0, y_0) του A , τότε η f είναι μερικώς συνεχής ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) .

Αν f και g συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x και y , που ορίζονται στο ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν για κάθε σημείο (x, y) του A , τότε

- $\frac{\partial}{\partial x}(f + g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$
- $\frac{\partial}{\partial x}(af) = a \frac{\partial f}{\partial x}$
- $\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial g}{\partial x}f = f_x g + g_x f$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - \frac{\partial g}{\partial x}f}{g^2}, \quad g(x, y) \neq 0$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x, y , που είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι η f έχει μερική παράγωγο πρώτης τάξης στο σημείο (x_0, y_0) του A ως προς x , δηλαδή υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Αν η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x στο (x_0, y_0) του A , τότε η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της f ως προς x στο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ ή $f_{xx}(x_0, y_0)$.

Ομοίως η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της f ως προς y στο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ ή $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Ομοίως η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της f ως προς y και x στο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ ή $f_{yx}(x_0, y_0)$.

* Οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ονομάζονται μικτές μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης f .

Παραδείγματα μερικών παραγώγων τρίτης τάξης

Έστω ότι οι μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης μιας συνάρτησης $f(x, y)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{yxx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx}$$

Αντίστοιχα προκύπτουν οι f_{yyy} , f_{xxy} , f_{yxy} , f_{xyy}

Αν D είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D , τότε:

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad \text{στο } D$$

* Με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος σε μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ που εξαρτάται από n ανεξάρτητες μεταβλητές, για την οποία υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και τάξης k και είναι συνεχείς συναρτήσεις σε μια περιοχή ενός σημείου $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$, τότε οι μικτές παράγωγοι μέχρι και τάξης k είναι ανεξάρτητες από τη σειρά παραγωγίσισης ως προς τις διάφορες μεταβλητές.

Διαφορίσιμη συνάρτηση

Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) σημείο του A . Η συνάρτηση f θα λέγεται διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) , αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

και είναι αληθής η έκφραση

$$\Delta f = df + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

όπου

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ df &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} k\end{aligned}$$

ϵ_1, ϵ_2 είναι συναρτήσεις των h, k , τέτοιες ώστε $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ καθώς $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x, y) , τότε το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης (ή διαφορικό) της $f(x, y)$ είναι η συνάρτηση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Έστω $x = x(t)$ και $y = y(t)$ διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις ως προς την πραγματική μεταβλητή t . Αν $z = f(x, y)$ είναι πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$, δύο πραγματικών μεταβλητών x, y , διαφορίσιμη στο σημείο $(x(t), y(t))$, τότε η συνάρτηση με τύπο $z = f(x(t), y(t))$ είναι διαφορίσιμη ως προς τη μεταβλητή t και ισχύει

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Εσσιανός Πίνακας (Hessian matrix)

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση των n μεταβλητών $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο D . Τότε η συναρτησιακή ορίζουσα με στοιχεία $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ονομάζεται ορίζουσα Hesse. Ο αντίστοιχος πίνακας

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται Εσσιανός πίνακας.

Για μια συνάρτηση $f(x, y)$ ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα Fermat για τοπικά ακρότατα

Αν $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y στο σημείο (x_0, y_0) του ανοικτού υποσυνόλου D του $\mathbb{R}^2$, η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό, τότε ισχύει

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Αν $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y όπου D ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, ένα σημείο $P(x_0, y_0)$ λέγεται κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f , όταν η f είναι διαφορίσιμη στο $P(x_0, y_0)$ με $\vec{\nabla} f(P) = \vec{0}$, δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$$

ή

όταν η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο P .

Αν $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y όπου D ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, ένα σημείο $P(x_0, y_0)$ λέγεται σαγματικό σημείο της συνάρτησης f , όταν το P είναι κρίσιμο σημείο της f και η συνάρτηση f δεν έχει στο P τοπικό ακρότατο.

Κριτήριο δεύτερων παραγώγων για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Αν $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y , ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$, η οποία είναι τάξης C^2 στο κρίσιμο σημείο $P(x_0, y_0)$ του D , δηλαδή $f'(x_0, y_0) = 0$, που σημαίνει

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

τότε ισχύει

- Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $P(x_0, y_0)$, αν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \text{ και } \det f''(x_0, y_0) > 0$$

- Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $P(x_0, y_0)$, αν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \text{ και } \det f''(x_0, y_0) > 0$$

- Η συνάρτηση f έχει σαγματικό σημείο στο σημείο $P(x_0, y_0)$, αν

$$\det f''(x_0, y_0) < 0$$

δηλαδή η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $P(x_0, y_0)$,

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2$$

Λύση:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 3 + y^2$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2xy$$

Οπότε:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3 + y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Για να βρούμε τα στάσιμα σημεία

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 - 3 + y^2 \\ 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτουν τα εξής στάσιμα σημεία:

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3}), (1, 0), (-1, 0)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2y$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα είναι

$$\det(\nabla^2 f(x, y)) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 12x^2 - 4y^2$$

Οπότε έχουμε:

Το σημείο $(0, \sqrt{3})$ είναι σαγματικό σημείο διότι

$$|\nabla^2 f(0, \sqrt{3})| = -12 < 0$$

Το σημείο $(0, \sqrt{3})$ είναι σαγματικό σημείο διότι

$$|\nabla^2 f(0, \sqrt{3})| = -12 < 0$$

Το σημείο $(1, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο διότι

$$f_{xx}(1, 0) = 6 > 0$$

$$|\nabla^2 f(1, 0)| = 12 > 0$$

Το σημείο $(-1, 0)$ είναι τοπικό μέγιστο διότι

$$f_{xx}(-1, 0) = -6 < 0$$

$$|\nabla^2 f(-1, 0)| = 12 > 0$$