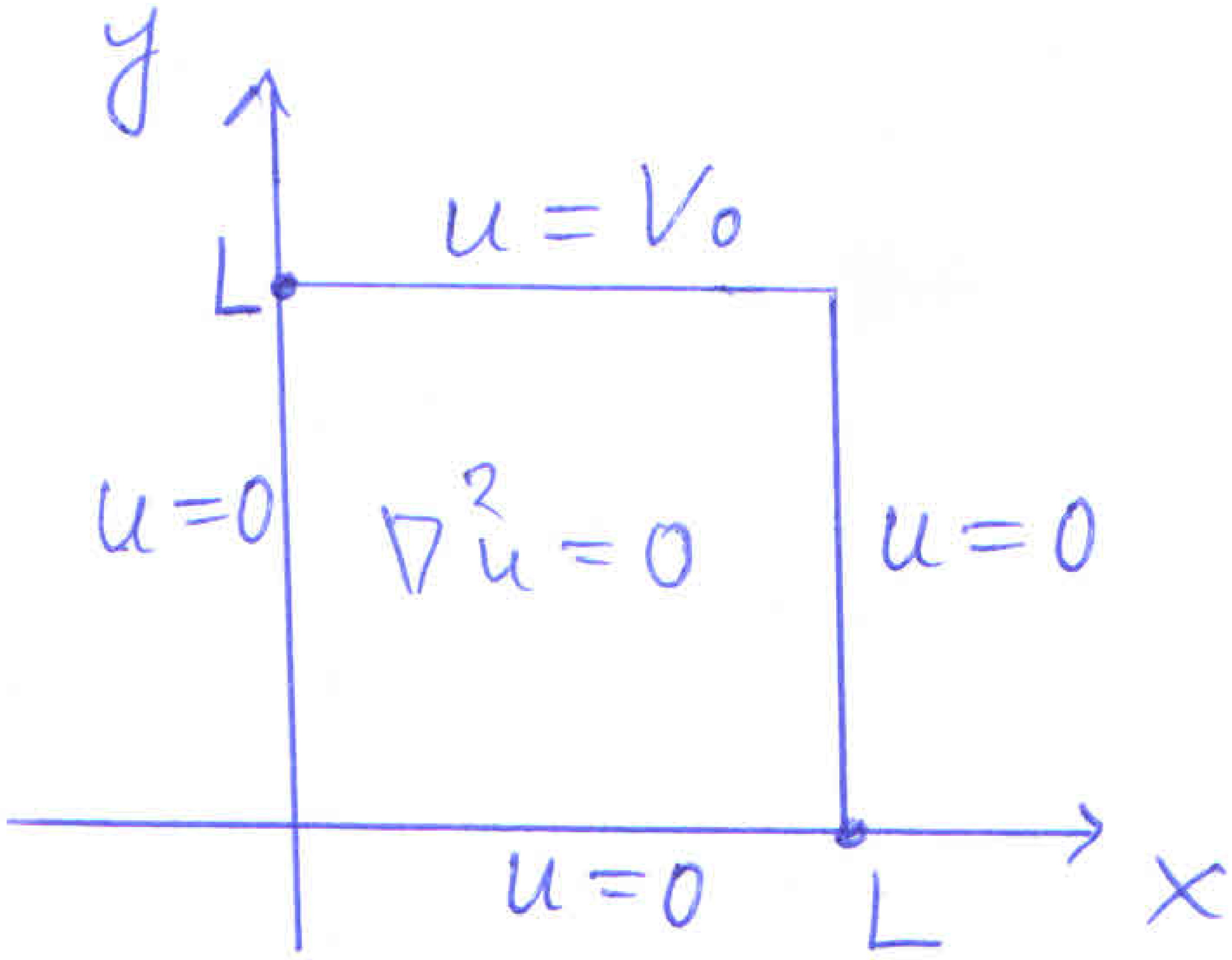
Η διδιάστατη εξίσωση Laplace. ①

Παράδειγμα 1: Η διδιάστατη εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Να λυθεί η εξίσωση

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \text{ με } \; u : u(x,y)$$

στο διάστημα $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα



Οπότε το πρόβλημα μας θα είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(Αφού σε καρτεσιανή συντεταγμένες στο επίπεδο x, y $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)

$x, y \in [0, L]$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες θα είναι

$u(0,y) = u(L,y) = 0$ (Ομογενείς)

$u(x,0) = 0$ (ομογενής)

$u(x,L) = V_0$ (μη-ομογενής)

Εδώ δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες αφού δεν υπάρχει η μεταβλητή του χρόνου στην εξίσωση. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι παρόμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα, όπου εφαρμόζουμε αρχικά τις ομογενείς συνθήκες. Έτσι βρίσκουμε τη γενική λύση που ικανοποιεί την εξίσωση και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες και σε αυτή τη λύση εφαρμόζουμε τις μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Οπότε θεωρούμε ότι

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Τότε $\quad Y(y)\dfrac{d^2X}{dx^2} + X(x)\dfrac{d^2Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} =$$

$$= \text{σταθερά} \quad (1)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(L,y) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$$

Για να μπορούν να ικανοποιηθούν οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες θα πρέπει η σταθερά της εξίσωσης (1) να είναι αρνητική. Οπότε θέτουμε τη σταθερά ως $-k^2$ ($\mu\varepsilon$ $k>0$). (4)

Τότε οι εξισώσεις που θα έχουμε είναι

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2 Y(y) = 0$$

Από την πρώτη θα έχουμε

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx),$$

όπου η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών μας δίνει

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Έτσι $X_n(x) = B_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$,

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Από τη δεύτερη εξίσωση θα έχουμε λύσεις της μορφής

$$Y_n(y) = A_n e^{k_n y} + B_n e^{-k_n y}$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

ή $$Y_n(y) = C_n \cosh(k_n y) + D \sinh(k_n y)$$

Η συνθήκη $u(x,0)=0$ μας δίνει

$$Y(0) = 0$$

Άρα με εφαρμογή της συνθήκης θα έχουμε

$$Y_n(0) = 0 \Rightarrow C_n = 0 .$$

Άρα $$Y_n(y) = D_n \sinh(k_n y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα οι ειδικές λύσεις θα είναι

$$u_n(x,y) = \underbrace{B_n D_n}_{a_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Έτσι η γενική λύση θα είναι

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Στην παραπάνω λύση θα εφαρμόσουμε την μη-ομογενή συνθήκη $u(x,L) = V_0$

Οπότε $$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Εδώ έχουμε μια σχέση της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

με $f(x) = V_0$ και $c_n = a_n \sinh(n\pi)$

Οπότε $$c_n = \frac{\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), f(x)\right)}{\underbrace{\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}_{L/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx$$

Άρα $\quad a_n \sinh(n\pi) = \frac{2V_0}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{2V_0}{L\sinh(n\pi)}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{2V_0}{L\sinh(n\pi)}\left(-\frac{L}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg]_0^L \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2V_0}{n\pi\sinh(n\pi)}\left[1-(-1)^n\right]$$

Άρα $\quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi\sinh(n\pi)}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

ή $\quad a_k = \dfrac{4V_0}{(2k+1)\pi\sinh\left[(2k+1)\pi\right]}$, με $k=0,1,2,\dots$

Οπότε $\quad u(x,y) = \dfrac{4V_0}{\pi}\sum\limits_{n \text{ περιττός}} \dfrac{1}{n\sinh(n\pi)}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\dfrac{n\pi y}{L}\right)$

Παράδειγμα 2: Η δισδιάστατη εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες.

Να λυθεί η εξίσωση

πολικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 u = 0 \qquad u : u(\rho, \theta)$$

στο εσωτερικό ενός κύκλου ακτίνας a

με συνοριακές συνθήκες

$$u \Big|_{\substack{\text{πάνω} \\ \text{ημιπεριφέρεια}}} = \frac{V_0}{2}$$

$$u \Big|_{\substack{\text{κάτω} \\ \text{ημιπεριφέρεια}}} = -\frac{V_0}{2}$$

Οι παραπάνω συνθήκες είναι ειδική περίπτωση της γενικότερης συνοριακής συνθήκης

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad , \text{ με } 0 \le \theta \le \pi$$

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τη λύση για τη γενικότερη συνοριακή συνθήκη και θα την εξειδικεύσουμε για την ανωτέρω συνοριακή συνθήκη.

Σε πολικές συντεταγμένες η Λαπλασιανή παίρνει τη μορφή

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Έτσι η εξίσωση θα έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με ρ^2 και παίρνουμε

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Θέτουμε $u(\rho,\theta) = \Theta(\theta) R(\rho)$

Τότε $\Theta(\theta)\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \Theta(\theta)\rho\frac{dR}{d\rho} + R(\rho)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho^2 \frac{1}{R(\rho)}\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho\frac{1}{R(\rho)}\frac{dR}{d\rho} = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \text{σταθερά}$$

Λόγω της μεταβλητής πολικής γωνίας θ, η συνάρτηση $\Theta(\theta)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη περιοδικότητας

$$\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$$

Η σταθερά της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει να είναι θετική, π.χ. k^2 (με $k \geq 0$) για να ικανοποιηθεί η συνθήκη περιοδικότητας.

Οι εξισώσεις θα γίνουν

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2\,\Theta(\theta) = 0$$

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - k^2 R(\rho) = 0$$

Οι λύσεις της πρώτης εξίσωσης είναι

$$\Theta(\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$$

Η συνθήκη $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$ δίνει

$$\Rightarrow A\cos(k\theta+2k\pi)+B\sin(k\theta+2k\pi)=$$

$$=A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cos(k\theta)\cos(2k\pi)-A\sin(k\theta)\sin(2k\pi)+$$

$$+B\sin(k\theta)\cos(2k\pi)+B\cos(k\theta)\sin(2k\pi)=$$

$$=A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ικανοποιούνται εάν το k είναι ακέραιο, δηλαδή $k=n=0,1,2,\ldots$ αφού τότε $\cos(2n\pi)=1$, $\sin(2n\pi)=0$

Οπότε $\Theta_n(\theta)=A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)$

με $n=0,1,2,\ldots$

Η ακτινική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-n^2R(\rho)=0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μορφής Euler για την οποία αναζητούμε λύσεις της μορφής $R(\rho)=\rho^s$.

$$\frac{dR}{d\rho}=s\rho^{s-1} \qquad \frac{d^2R}{d\rho^2}=s(s-1)\rho^{s-2}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση θα έχουμε

$$s(s-1)\rho^s+s\rho^s-n^2\rho^s=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(s-1)+s-n^2=0 \Rightarrow s^2-s+s-n^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2-n^2=0 \Rightarrow s=\pm n$$

Άρα $R_n(\rho)=C_n'\rho^{-n}+D_n\rho^n$

Θυμίζουμε ότι στο πρόβλημά μας το ρ παίρνει τιμές από 0 έως a (ακτίνα του κύκλου)

Για να έχουμε πεπερασμένη λύση στο $\rho=0$, θα πρέπει $C_n'=0$.

Άρα $R_n(\rho)=D_n\rho^n$, με $n=0,1,2,\ldots$

Οπότε οι ειδικές λύσεις θα είναι

$$u(\rho,\theta)=\rho^n\left[\overset{\to D_nA_n}{a_n}\cos(n\theta)+\overset{\to D_nB_n}{b_n}\sin(n\theta)\right]$$

με $n=0,1,2,\ldots$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right]$$

Εφαρμόζουμε την μη-ομογενή συνοριακή συνθήκη

$$\underset{\substack{\parallel \\ f(\theta)}}{u(a,\theta)}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right]$$

οπότε $$a_0=\frac{(1,f(\theta))}{(1,1)}$$

$$a^n a_n=\frac{(\cos(n\theta),f(\theta))}{(\cos(n\theta),\cos(n\theta))}$$

$$a^n b_n=\frac{(\sin(n\theta),f(\theta))}{(\sin(n\theta),\sin(n\theta))}$$

όπου $(1, f(\theta)) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$ (14)

$$(1,1) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$(\cos(n\theta), \cos(n\theta)) = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta = \pi$$

$$(\sin(n\theta), \sin(n\theta)) = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\, d\theta = \pi$$

$$(\cos(n\theta), f(\theta)) = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta)\, d\theta$$

$$(\sin(n\theta), f(\theta)) = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta)\, d\theta$$

Άρα $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta)\, d\theta \quad , n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta)\, d\theta \quad , n = 1, 2, 3, \dots$$

Η συνοριακή συνθήκη

$$u\Big|_{\substack{\text{πάνω}\\ \text{ημιπεριφέρεια}}} = \frac{V_0}{2} \qquad u\Big|_{\substack{\text{κάτω}\\ \text{ημιπεριφέρεια}}} = -\frac{V_0}{2}$$

θα είναι

$$u(a,\theta) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{2}, & 0<\theta<\pi \\ -\dfrac{V_0}{2}, & \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

Οπότε θα έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V_0}{2}\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(-\frac{V_0}{2}\right)d\theta = \frac{V_0}{4}-\frac{V_0}{4}=0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\,u(a,\theta)\,d\theta =$$

$$=\frac{1}{a^n\pi}\frac{V_0}{2}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos(n\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\frac{1}{n}\cancel{\sin(n\theta)}^{\,0}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\frac{1}{n}\cancel{\sin(n\theta)}^{\,0}\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad \mu\epsilon \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\, u(a,\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\int_0^{\pi} \sin(n\theta)\, d\theta - \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(n\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(n\theta)\Big|_0^{\pi} -$$

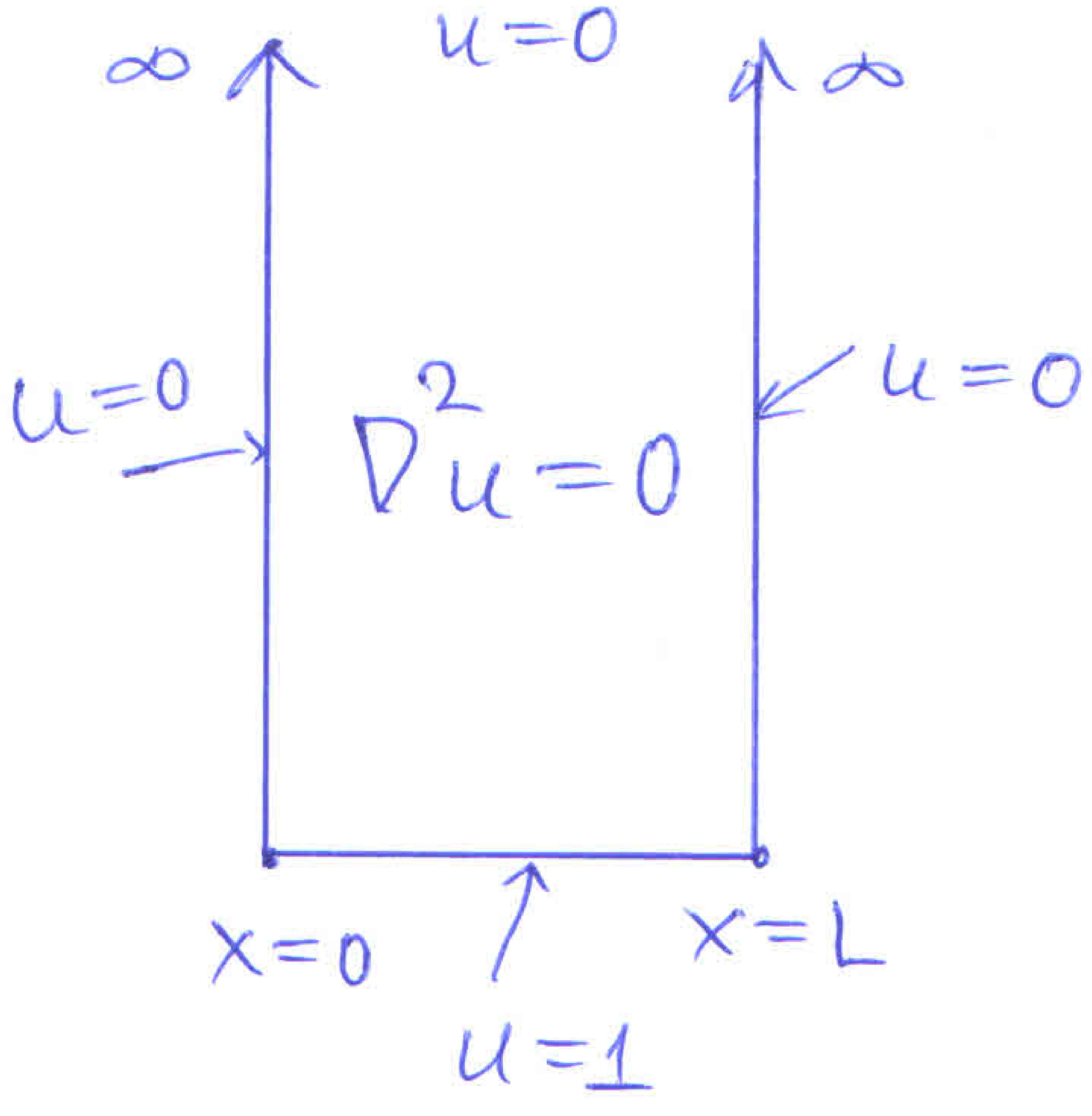
$$- \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(n\theta)\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2n}\left[1-(-1)^n\right] + \frac{1}{\pi a^n}\frac{V_0}{2n}\left[1-(-1)^n\right] =$$

$$= \frac{V_0}{\pi n a^n}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n = \text{άρτιος} \\ \dfrac{2V_0}{\pi n a^n}, & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

Έτσι $u(\rho,\theta) = \dfrac{2V_0}{\pi} \displaystyle\sum_{n:\text{περιττός}} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n \sin(n\theta)$

Άσκηση 1: Λύστε την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό της ημιάπειρης λωρίδας του σχήματος σε συνδυασμό με τις παρατιθέμενες συνοριακές συνθήκες



Η εξίσωση είναι $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\quad u: u(x,y)$

και οι συνοριακές συνθήκες είναι

$u(0,y) = u(L,y) = 0$

$u(x,0) = 1 \qquad u(x, y\to\infty) = 0$

Ακολουθούμε τη διαδικασία του παραδείγματος 1 και αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

οπότε οι εξισώσεις θα είναι

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0$$

Η πρώτη εξίσωση σε συνδυασμό με τις συνθήκες $u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)=0$ και $u(L,y)=0 \Rightarrow X(L)=0$ δίνει

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n=1,2,3,\dots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Η δεύτερη εξίσωση θα έχει λύση

$$Y_n(y) = \Gamma_n e^{k_n y} + \Delta_n e^{-k_n y}$$

Η συνοριακή συνθήκη $u(x, y\to\infty)=0$ θα δώσει $Y_n(y\to\infty)=0$ που σημαίνει όπι $\Gamma_n = 0$.

Άρα $Y_n(y) = \Delta_n e^{-k_n y} = \Delta_n e^{-\frac{n\pi y}{L}}$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα $u_n(x,y) = \underbrace{B_n \Delta_n}_{c_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n\pi y}{L}}$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n\pi y}{L}}$$

Η τελευταία συνοριακή συνθήκη θα δώσει

$$u(x,0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x,0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \left(-\frac{L}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^L \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n = \text{άρτιος} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

Έτσι $u(x,y) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n\ \text{περιττός}} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n\pi y}{L}}$