Εισαγωγή

Στόχος του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά IV είναι η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται στα φυσικά προβλήματα.

Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι απεριόριστες. Τα φυσικά φαινόμενα που μελετάμε (π.χ. κύματα διαφόρων ειδών, ηλεκτρικό δυναμικό, διάδοση θερμότητας) λαμβάνουν χώρα στον τρισδιάστατο, εν γένει, χώρο, οπότε περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής:

$$u = u(x, y, z, t)$$

που εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες x, y, z του σημείου στο οποίο αναφερόμαστε και τη χρονική στιγμή t. Η μεγάλη πλειοψηφία των φυσικών προβλημάτων μπορεί να περιγραφεί (με ακρίβεια ή προσεγγιστικά) με μία από τις ακόλουθες 3 μερικές διαφορικές εξισώσεις

Κυματική εξίσωση: $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (u: μετατόπιση, ηλεκτρικό πεδίο κ.λ.π.)

Εξίσωση Laplace: $\nabla^2 u = 0$ (u: ηλεκτρικό δυναμικό)

Εξίσωση θερμότητας: $\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \nabla^2 u = 0$ (u: θερμοκρασία)

όπου η Λαπλασιανή ορίζεται ως

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ (καρτεσιανές συντεταγμένες)

Η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων της Μαθηματικής Φυσικής οδηγεί συστηματικά σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Προβλήματα ιδιοτιμών Sturm-Liouville

Πριν περιγράψουμε αναλυτικά τη θεωρία, θα ξεκινήσουμε με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα

Παράδειγμα 1: Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες έχει λύση η διαφορική εξίσωση

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

με συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(L) = 0,$$

και να βρεθούν οι αντίστοιχες λύσεις της δ.ε.

Λύση: Καταρχήν, να επισημάνουμε τη διαφορά μεταξύ του παραπάνω προβλήματος συνοριακών συνθηκών, όπου δίνονται οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος, $x=0$ και $x=L$, με το πρόβλημα αρχικών τιμών, όπου δίνονται οι τιμές των $y(0)$, $y'(0)$. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει πάντα λύση, ενώ ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών μπορεί να έχει καμία, μία, ή και άπειρες λύσεις

Οι λύσεις της δ.ε. $y'' + \lambda y = 0$ εξαρτώνται καίρια από το πρόσημο του λ, οπότε πρέπει να διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- $\lambda = -\gamma^2 < 0$

Η εξίσωση $y'' - \gamma^2 y = 0$ δίνει για $y = e^{\rho x}$

$$\rho^2 - \gamma^2 = 0 \rightarrow \rho = \pm\gamma$$

επομένως η γενική λύση της έχει τη μορφή

$$y(x) = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες

$$y(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (1)$$

$$y(L)=0 \Rightarrow c_1 e^{\gamma L} + c_2 e^{-\gamma L} = 0 \quad (2)$$

Για να έχει μη τετριμμένη λύση η δ.ε. θα πρέπει $c_1 \neq 0$ ή/και $c_2 \neq 0$, γιατί αν $c_1 = c_2 = 0$ τότε η λύση της δ.ε. είναι η $y=0$ (τετριμμένη λύση). Το ομογενές σύστημα (1), (2) έχει μη μηδενική λύση όταν

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\gamma L} & e^{-\gamma L} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\gamma L} - e^{\gamma L} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\gamma L} = e^{\gamma L}$$

$$\Rightarrow -\gamma L = \gamma L$$

$$\Rightarrow 2\gamma L = 0$$

$$\Rightarrow L = 0 \text{ , αφού } \gamma \neq 0$$

εναλλακτικά

(1) $\Rightarrow c_2 = -c_1$

(2) $\Rightarrow c_1 (e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}) = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0$ γιατί $\gamma L \neq 0$

οπότε $c_1 = c_2 = 0$

και επομένως στις τιμές $\lambda = -\gamma^2$ αντιστοιχεί μόνο η τετριμμένη λύση $y=0$

Όμως $L \neq 0$, επομένως όταν $\lambda = -\gamma^2$ το πρόβλημα έχει μόνο την τετριμμένη μηδενική λύση $y=0$

- $\lambda = 0$

Η γενική λύση της εξίσωσης $y''=0$ είναι

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

$$y(0)=0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(L)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 L = 0 \Rightarrow c_2 L = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα $c_1 = c_2 = 0$ και η δ.ε. έχει μόνο την τετριμμένη λύση $y=0$

• $\lambda = k^2 > 0$

Η δ.ε. γίνεται $y'' + k^2 y = 0$ και για $y = e^{\rho x}$ παίρνουμε $\rho^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \rho = \pm ik$
οπότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow c_1 \sin kL + c_2 \cos kL = 0 \Rightarrow c_1 \sin kL = 0$$

Για να έχουμε μη τετριμμένη λύση θα πρέπει $c_1 \neq 0$, οπότε τελικά

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Η τιμή $n = 0$ εξαιρείται γιατί οδηγεί στην τετριμμένη λύση $y = c_1 \sin(0L) = 0$. Οι αρνητικές τιμές $n = -1, -2, \ldots$ εξαιρούνται γιατί οδηγούν στις ίδιες λύσεις με τις $n = 1, 2, \ldots$ αφού $y = c_1 \sin\left(-\frac{n\pi x}{L}\right) = -c_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = c_1' \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Τελικό συμπέρασμα: το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν η παράμετρος λ παίρνει τη διακριτή ακολουθία τιμών

$$\lambda = \lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

με αντίστοιχες λύσεις

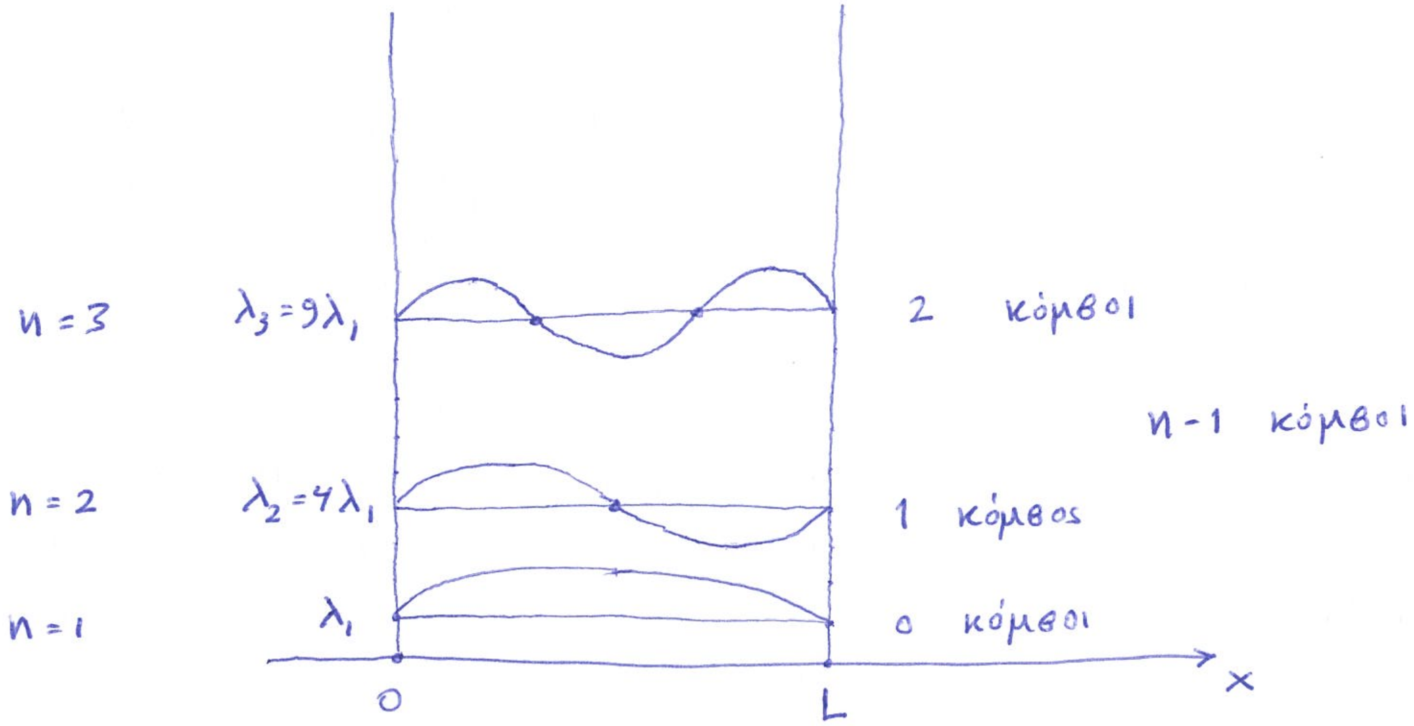
$$y_n(x) = c \sin \frac{n\pi x}{L} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Οι τιμές λ_n ονομάζονται <u>ιδιοτιμές</u> του προβλήματος ενώ οι αντίστοιχες λύσεις $y_n(x)$ <u>ιδιοσυναρτήσεις</u>

Προβλήματα όπως αυτό του παραδείγματος 1 ονομάζονται προβλήματα ιδιοτιμών με ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Προσέξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$ ορίζονται με την αυθαιρεσία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς c, που οφείλεται στο γραμμικό και ομογενή χαρακτήρα του προβλήματος ιδιοτιμών

Το σύνολο των ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ αποκαλείται φάσμα του προβλήματος. Π.χ. στην περίπτωση των ταλαντώσεων μιας γέφυρας αντιστοιχεί στις ιδιοσυχνότητες, ενώ στην περίπτωση της Κβαντομηχανικής, π.χ. άτομο του Υδρογόνου, στις ιδιοενέργειες.

Γραφική παράσταση των ιδιοσυναρτήσεων $y_n(x)$ για $n=1,2,3$



Κόμβοι: τα σημεία μηδενισμού της λύσης στο εσωτερικό του διαστήματος, $0<x<L$

Θεώρημα των κόμβων: ο αριθμός των κόμβων αυξάνει κατά μονάδα καθώς προχωράμε από την πρώτη ιδιοσυνάρτηση (0 κόμβοι) προς τις ανώτερες, ανεβαίνοντας στο φάσμα

Έχοντας παρουσιάσει τη βασική ορολογία χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο σημαντικό παράδειγμα, προχωράμε τώρα στη διατύπωση του γενικού προβλήματος ιδιοτιμών για συνήθεις δ.ε. δεύτερης τάξης.

Γενική διατύπωση του προβλήματος ιδιοτιμών για διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η διαφορική εξίσωση

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = \lambda y \quad , \quad 0 \le x \le L,$$

όταν ικανοποιεί ένα από τα ακόλουθα σετ ομογενών συνοριακών συνθηκών:

(α) Αμιγείς συνθήκες (ή συνοριακές συνθήκες Robin)

$$y'(0) = h\,y(0) \quad , \quad y'(L) = H\,y(L),$$

όπου h, H δοσμένες σταθερές που μπορεί να πάρουν και τις τιμές 0 ή ∞

(β) Περιοδικές συνθήκες

$$y(0) = y(L) \, , \qquad y'(0) = y'(L)$$

Παρατηρήσεις:

1) Οι αμιγείς συνοριακές συνθήκες ονομάζονται έτσι γιατί εμπλέκουν τιμές των y, y' στο ίδιο άκρο του διαστήματ δηλ. το $x=0$ ή το $x=L$.

2) Οι συνοριακές συνθήκες του παραδείγματος 1 προκύπτουν από τις γενικές εκφράσεις για τις αμιγείς συνθήκες αν πάρουμ. $h\to\infty$, $H\to\infty$, οπότε $y(0)=0$, $y(L)=0$ (για πεπερασμένες τιμές της παραγώγου y') Ονομάζονται και συνθήκες Dirichlet

3) Οι περιοδικές συνθήκες δεν είναι αμιγείς, αφού εμπλέκουν τιμές των y, y' σε διαφορετικά άκρα, αλλά μικτές

4) Συνοριακές συνθήκες Neumann ($h=H=0$ στις αμιγείς)

$$y'(0) = 0 \, , \qquad y'(L) = 0$$

<u>Πρόταση 1</u>: Το γενικό πρόβλημα ιδιοτιμών με ομογενείς συνοριακές συνθήκες (αμιγείς ή περιοδικές) έχει διακριτό φάσμα, δηλ. έχει μη τετριμμένη λύση $y \neq 0$ μόνο όταν η παράμετρος λ παίρνει μια διακριτή ακολουθία τιμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ("κβάντωση" των ιδιοτιμών).

<u>Απόδειξη</u>: Θα αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet, η απόδειξη για τις άλλες είναι ανάλογη

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(L) = 0$$

Η γενική λύση της δ.ε. δεύτερης τάξης

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = \lambda y$$

εκφράζεται ως γραμμικός συνδιασμός δύο ανεξάρτητων ειδικών λύσεων y_1, y_2 που εξαρτώνται και από την παράμετρο λ αφού αυτή είναι παρούσα στην εξίσωση

$$y(x,\lambda) = c_1\, y_1(x,\lambda) + c_2\, y_2(x,\lambda)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$y(0,\lambda) = 0 \implies c_1\, y_1(0,\lambda) + c_2\, y_2(0,\lambda) = 0 \qquad (1)$$

$$y(L,\lambda) = 0 \implies c_1\, y_1(L,\lambda) + c_2\, y_2(L,\lambda) = 0 \qquad (2)$$

Οι εξισώσεις (1), (2) αποτελούν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα για τους συντελεστές c_1, c_2, το οποίο έχει μη μηδενική λύση $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ μόνο όταν η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του μηδενίζεται, δηλ.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(0,\lambda) & y_2(0,\lambda) \\ y_1(L,\lambda) & y_2(L,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \implies y_1(0,\lambda)\, y_2(L,\lambda) - y_1(L,\lambda)\, y_2(0,\lambda) = 0$$

Αυτή η αλγεβρική εξίσωση ως προς λ έχει ένα διακριτό σύνολο λύσεων $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ (ιδιοτιμές) για τις οποίες ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Πρόταση 2: Η γενική διαφορική εξίσωση ιδιοτιμών

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + (c(x)-\lambda)\,y = 0$$

ανάγεται στην πρότυπη μορφή Liouville

$$p(x)\,y'' + p'(x)\,y' + (\lambda w(x) - u(x))\,y = 0$$

ή ισοδύναμα

$$(p y')' + (\lambda w - u)\,y = 0$$

όπου

$$p(x) = e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

$$w(x) = -\frac{1}{a(x)}\, e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \qquad \text{(συνάρτηση βάρους)}$$

$$u(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\, e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \qquad \text{(συνάρτηση δυναμικού)}$$

Απόδειξη: Η βασική ιδέα είναι να πολλαπλασιάσουμε τη γενική δ.ε. ιδιοτιμών με μία προσδιοριστέα συνάρτηση $\mu(x)$ που ονομάζουμε ολοκληρωτικό παράγοντα, ώστε στην νέα εξίσωση ο συντελεστής του y' να είναι η παράγωγος του συντελεστη y''. Δηλ. γράφουμε

$$\mu a y'' + \mu b y' + (\mu c - \mu\lambda)\,y = 0$$

και προσδιορίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x)$ από την απαίτηση

$$(\mu a)' = \mu b = (\mu a)\,\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{(\mu a)'}{\mu a} = \frac{b}{a} \Rightarrow (\ln(\mu a))' = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \ln(\mu a) = \int \frac{b}{a}\,dx \Rightarrow \mu a = e^{\int (b/a)\,dx}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{a}\, e^{\int (b/a)\,dx}$$

Αν θέσουμε

$$p(x) = \mu a = e^{\int (b/a)\,dx}$$

τότε

$$\mu b = (\mu a)' = p'(x)$$

Επίσης ορίζουμε

$$w(x) = -\mu(x) = -\frac{1}{a} e^{\int (b/a)\,dx}$$

$$v(x) = -\mu(x)\,c(x) = -\frac{c}{a} e^{\int (b/a)\,dx}$$

οπότε η εξίσωση

$$\mu a y'' + \mu b y' + (\mu c - \mu\lambda) y = 0$$

γίνεται

$$p y'' + p' y' + (\lambda w - v) y = 0$$

ή

$$(p y')' + (\lambda w - v) y = 0$$

Παρατηρήσεις:

1) Ο ολοκληρωτικός παράγοντας

$$\mu(x) = \frac{1}{a} e^{\int (b/a)\,dx}$$

υπολογίζεται με απροσδιοριστία μίας πολλαπλασιαστικής σταθεράς $k = e^c$, όπου c η αυθαίρετη σταθερά της αόριστης ολοκλήρωσης στο εκθετικό, η οποία πρέπει να επιλεγεί ώστε το βάρος $w(x) \geq 0$ στο διάστημα $[0, L]$

2) Η χρησιμότητα της πρότυπης μορφής Liouville έγκειται στην παρουσία του τέλειου διαφορικού $(py')'$ που μπορεί εύκολα να ολοκληρωθεί, διευκολύνοντας την απόδειξη χρήσιμων προτάσεων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2: Γράψτε στη μορφή Liouville τις παρακάτω εξισώσεις ιδιοτιμών και βρείτε σε κάθε περίπτωση τη συνάρτηση βάρους $w(x)$

(α) Εξίσωση Legendre $\quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

(β) Εξίσωση Hermite $\quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

(γ) Εξίσωση Bessel ν τάξης $\quad x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0$

Λύση:

(α) Είναι
$$a = 1 - x^2, \quad b = -2x$$
Παρατηρήστε ότι
$$b = -2x = (1-x^2)' = a'$$
οπότε η εξίσωση είναι ήδη στη μορφή Liouville με
$$p = a = 1 - x^2$$
Το βάρος είναι ίσο με το συντελεστή του λ, $w(x) = 1 > 0$, οπότε δε χρειάζεται αλλαγή προσήμου

(β) Εδώ $\quad a = 1, \quad b = -2x$

Ολοκληρωτικός παράγοντας
$$\mu = \frac{1}{a} e^{\int (b/a)\,dx} = e^{-2\int x\,dx} = e^{-x^2+c} = k e^{-x^2}$$
όπου $k = e^c$ η πολλαπλασιαστική σταθερά

Επιλέγουμε $k=1$ ώστε τελικά να βγαίνει το βάρος θετικό. Η μορφή Liouville είναι
$$e^{-x^2} y'' - 2x e^{-x^2} y' + \lambda e^{-x^2} y = 0$$
και το βάρος $\quad w(x) = e^{-x^2} > 0$

(γ) Διαιρώντας με x η εξίσωση Bessel έρχεται στη μορφή Liouville
$$x y'' + y' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0$$

με $\quad p(x) = x \quad$ και $\quad w(x) = x$, δυναμικό $U(x) = \dfrac{\nu^2}{x}$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) = h\, y(1)$$

για τις περιπτώσεις (α) $h<1$, (β) $h>1$, (γ) $h=1$

<u>Λύση</u>: Όπως και στο παράδειγμα 1, διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του λ.

- $\lambda = -\gamma^2 < 0$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}$$

ενώ

$$y'(x) = \gamma \left(c_1 e^{\gamma x} - c_2 e^{-\gamma x}\right)$$

$y(0) = 0 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \quad (1)$

$y'(1) = h y(1) \Rightarrow \gamma\left(c_1 e^{\gamma} - c_2 e^{-\gamma}\right) = \left(c_1 e^{\gamma} + c_2 e^{-\gamma}\right) h \quad (2)$

$$(2) \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \gamma\left(c_1 e^{\gamma} + c_1 e^{-\gamma}\right) = c_1\left(e^{\gamma} - e^{-\gamma}\right) h$$

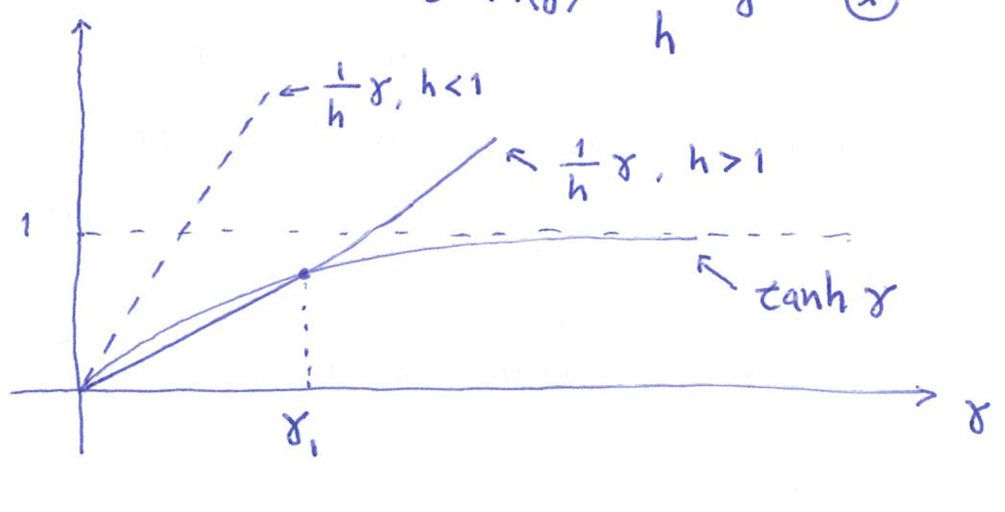
$$\Rightarrow \quad c_1 \gamma\left(e^{\gamma} + e^{-\gamma}\right) = c_1\left(e^{\gamma} - e^{-\gamma}\right) h$$

Για να έχουμε μη τετριμμένη λύση θα πρέπει $c_1 \neq 0$ οπότε

$$\gamma\left(e^{\gamma} + e^{-\gamma}\right) = \left(e^{\gamma} - e^{-\gamma}\right) h$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{e^{\gamma} + e^{-\gamma}} = \frac{1}{h}\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \tanh(\gamma) = \frac{1}{h}\gamma \quad (*)$$



Στο σχήμα απεικονίζεται η συνάρτηση $\tanh\gamma$ και η ευθεία $\frac{1}{h}\gamma$ για $h<1$ (διακεκομμένη) και $h>1$ (συνεχής).
Παρατηρούμε ότι για $h<1$, μοναδική λύση της εξίσωσης ⊛ είναι η $\gamma=0$. Επίσης, όταν $h=1$ η ευθεία εφάπτεται της $\tanh\gamma$ στο σημείο $\gamma=0$, που είναι πάλι η μοναδική λύση της ⊛. Για $\gamma=0$, και επειδή $c_2=-c_1$ από ①, βρίσκουμε την λύση

$$y(x) = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x} = c_1 e^{0\cdot x} - c_1 e^{-0\cdot x} = 0$$

Επομένως, για $h\le 1$ παίρνουμε μόνο την τετριμμένη λύση $y=0$

Για $h>1$, η ευθεία $\frac{1}{h}\gamma$ τέμνει την γραφ. παράσταση της $\tanh\gamma$ και σε ένα σημείο με μη μηδενική τετμημένη γ_1.
Η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση είναι

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x} \\ &= c_1 e^{\gamma_1 x} - c_1 e^{-\gamma_1 x} \\ &= c_1 (e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}) \\ &= 2c_1 \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \\ &= c_1' \sinh \gamma_1 x \qquad (c_1' = 2c_1) \end{aligned}$$

- $\lambda = 0$

Η γενική λύση της δ.ε. $y''=0$ είναι

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

$$y(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2\cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad ③$$

$$y'(1) = h\,y(1) \Rightarrow c_2 = h(c_1+c_2) \quad ④$$

$$④ \overset{③}{\Longrightarrow} c_2 = h c_2 \Rightarrow (1-h)c_2 = 0 \quad ⑤$$

Για $h\neq 1$ ⑤ $\Rightarrow c_2=0$, οπότε $y=0$ (τετριμμένη λύση)

Για $h=1$ βρίσκουμε την ιδιοσυνάρτηση

$$y(x) = 0 + c_2 x = c_2 x$$

- $\lambda = k^2 > 0$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

ενώ

$$y'(x) = k\,(c_1 \cos kx - c_2 \sin kx)$$

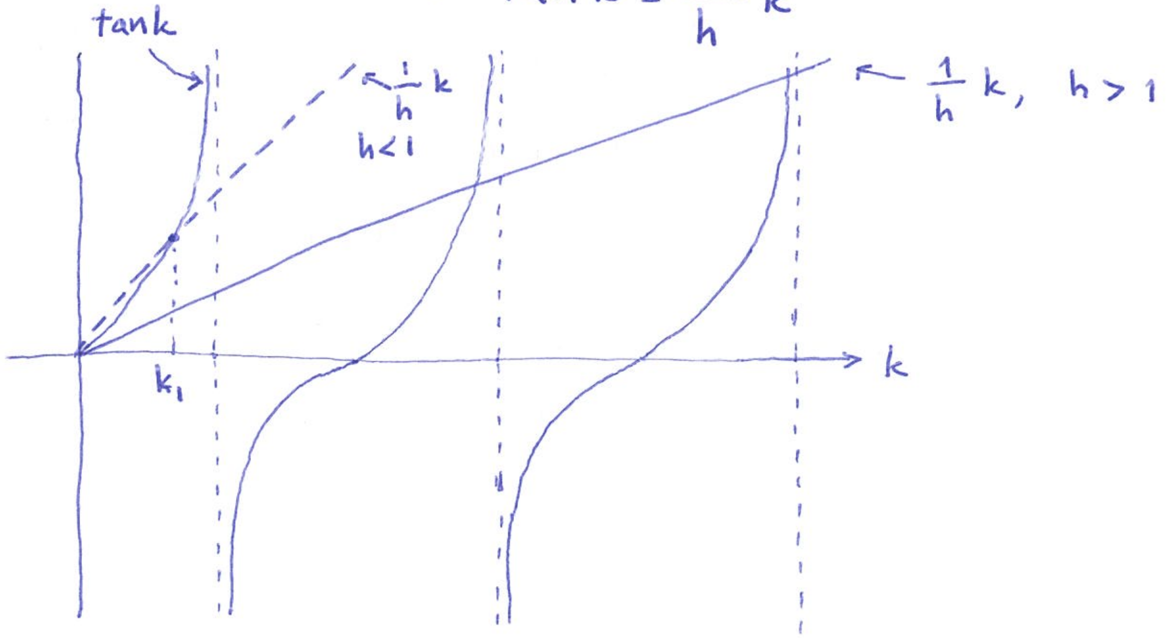
$y(0) = 0 \implies c_2 = 0$ ⑥

$y'(1) = h\,y(1) \overset{⑥}{\implies} c_1\, k \cos k = c_1\, h \sin k$

Για μη τετριμμένη λύση θα πρέπει $c_1 \neq 0$, οπότε

$$k \cos k = h \sin k$$

$$\implies \tan k = \frac{1}{h} k$$



Στο σχήμα απεικονίζονται οι κλάδοι της $\tan k$ και η ευθεία $\frac{1}{h}k$ για $h<1$ (διακεκομμένη) και $h>1$ (συνεχής). Παρατηρούμε ότι για $h<1$ η ευθεία τέμνει όλους τους κλάδους, συμπεριλαμβανομένου και του πρώτου, στα σημεία με θετικές τετμημένες $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Για $h \geq 1$, το μόνο κοινό σημείο με τον πρώτο κλάδο είναι το $k=0$, ενώ τέμνει τους υπόλοιπους κλάδους στα σημεία $k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$. Επειδή $c_2 = 0$, στις μη μηδενικές λύσεις αντιστοιχούν οι ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n(x) = \sin k_n x$$

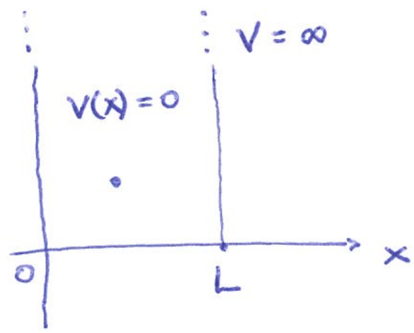
$n = 1, 2, 3, \ldots$ για $h<1$ και $n = 2, 3, \ldots$ για $h \geq 1$

Συνοψίζοντας τη λύση:

- $h < 1$ ιδιοτιμές $\lambda_n = k_n^2$
  ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x) = \sin k_n x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

- $h = 1$ ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_n = k_n^2$ $n = 2, 3, \ldots$
  ιδιοσυναρτήσεις $y_1(x) = x$, $y_n(x) = \sin k_n x$

- $h > 1$ ιδιοτιμές $\lambda_1 = -\gamma_1^2$, $\lambda_n = k_n^2$ $n = 2, 3, \ldots$
  ιδιοσυναρτήσεις $y_1(x) = \sinh \gamma_1 x$, $y_n(x) = \sin k_n x$



<u>Παράδειγμα 4</u>: Να βρεθούν οι ενεργειακές ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις σωματιδίου που κινείται στο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού του σχήματος υπακούοντας την εξίσωση Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} y'' + V(x) y = E y$$

με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(L) = 0$

<u>Λύση</u>: Εντός του πηγαδιού $V(x) = 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$-\frac{\hbar^2}{2m} y'' = E y \Rightarrow y'' + \frac{2mE}{\hbar^2} y = 0$$

που είναι της μορφής $y'' + \lambda y$ με $\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Οι συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ είναι ίδιες με του παραδείγματος 1, οπότε οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι

$$\frac{2mE_n}{\hbar^2} = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} n^2 \quad , n = 1, 2, \ldots$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x) = c \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$

Στην κβαντομηχανική ενδιαφερόμαστε για τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\int_0^L y_n^*(x) y_n(x) dx = 1 \Rightarrow |c|^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1 \Rightarrow |c|^2 \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow |c| = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

οπότε τελικά $y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, \ldots$

Παράδειγμα 5: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος $y'' + \lambda y = 0$ με συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y(1) + y'(1) = 0$$

Λύση:

- $\lambda = -\gamma^2 < 0$

$$y(x) = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}$$

$$y'(x) = \gamma (c_1 e^{\gamma x} - c_2 e^{-\gamma x})$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (1) \rightarrow c_2 = -c_1$$

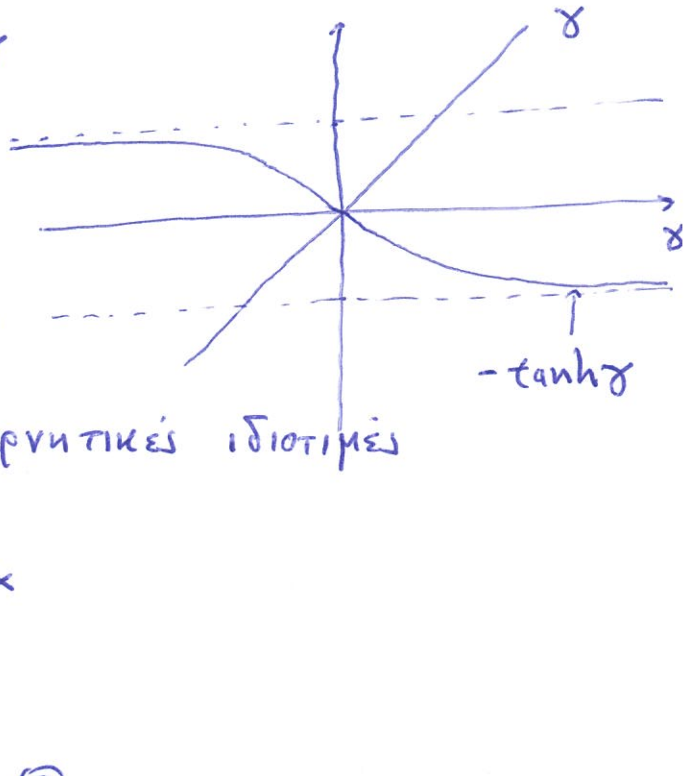
$$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\gamma} + c_2 e^{-\gamma} + c_1 \gamma e^{\gamma} - c_2 \gamma e^{-\gamma} = 0 \quad (2)$$

$$(2) \xRightarrow{(1)} c_1 e^{\gamma} - c_1 e^{-\gamma} + c_1 \gamma e^{\gamma} + c_1 \gamma e^{-\gamma} = 0$$

$$\xRightarrow{c_1 \neq 0} e^{\gamma} - e^{-\gamma} + \gamma (e^{\gamma} + e^{-\gamma}) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = - \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}$$

$$\Rightarrow \gamma = - \tanh \gamma$$



Μοναδικό σημείο τομής το $\gamma = 0$ που δίνει

$y(x) = c_1 + c_2 = 0$, την τετριμμένη λύση

οπότε το πρόβλημα δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές

- $\lambda = 0$

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

$$y'(x) = c_2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (3)$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_2 = 0 \xRightarrow{(3)} 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Μόνη λύση η τετριμμένη $y = 0$, οπότε $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή

• $\lambda = k^2 > 0$

$$y(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

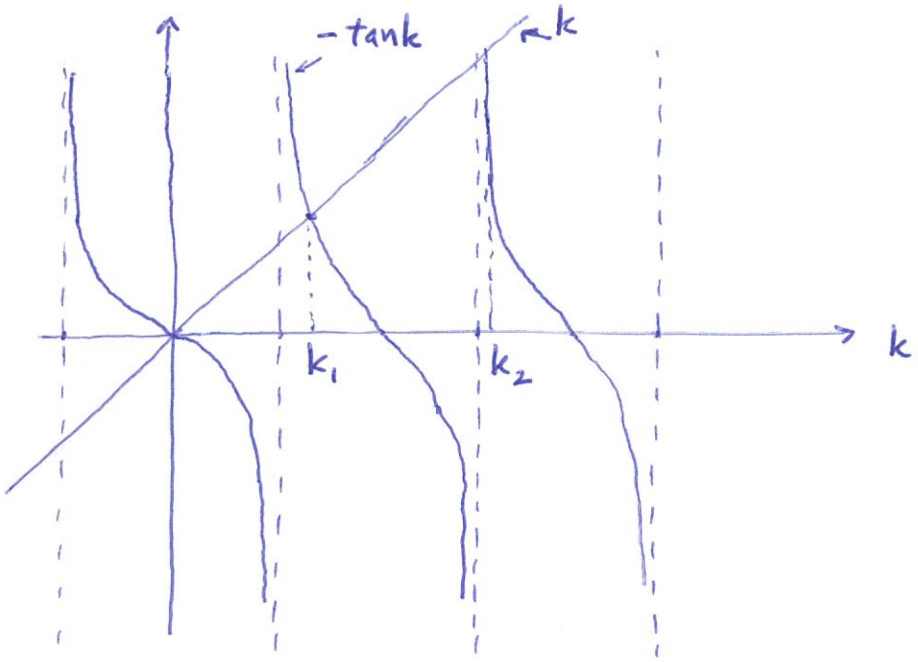
$$y'(x) = k\,(c_1 \cos kx - c_2 \sin kx)$$

$y(0) = 0 \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 \sin k + c_1 k \cos k = 0$

$\overset{c_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \sin k + k \cos k = 0$

$\Rightarrow \quad k = -\tan k$



Η ευθεία k τέμνει την γραφική παράσταση της $-\tan k$ σε άπειρο πλήθος σημείων με θετικές τετμημένες $k_1, k_2, \ldots$
Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι οι

$$\lambda_n = k_n^2 \,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι

$$y_n(x) = c_1 \sin k_n x \sim \sin k_n x$$

Παράδειγμα 6: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$$y^{(4)} + \lambda y'' = 0 \qquad (y^{(4)} = y'''')$$

με συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y''(L) = 0$$

Λύση: Βρίσκουμε τη γενική λύση της δ.ε. τέταρτης τάξης. Για $y(x) = e^{\rho x}$ παίρνουμε

$$\rho^4 + \lambda \rho^2 = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2(\rho^2 + \lambda) = 0$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του λ.

- $\lambda = -\gamma^2 < 0$. Η $\rho^2 - \gamma^2 = 0$ δίνει τη λύση $c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}$ ενώ στη διπλή ρίζα $\rho = 0$ αντιστοιχεί η $c_3 x + c_4$. Η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x} + c_3 x + c_4$$

ενώ

$$y'(x) = \gamma(c_1 e^{\gamma x} - c_2 e^{-\gamma x}) + c_3$$

$$y''(x) = \gamma^2(c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x})$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_4 = 0 \quad (1)$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow \gamma^2(c_1 + c_2) = 0 \xRightarrow{\gamma \neq 0} c_2 = -c_1 \quad (2)$$

$$(1) \xRightarrow{(2)} c_4 = 0$$

Επομένως

$$y(x) = c_1(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) + c_3 x$$

$$y''(x) = c_1 \gamma^2 (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})$$

Χρησιμοποιούμε αυτές τις εκφράσεις για να εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στο άκρο $x = L$.

$$y''(L)=0 \Rightarrow c_1\gamma^2(e^{\gamma L}-e^{-\gamma L})=0$$

$$\overset{\gamma L\neq 0}{\Longrightarrow} \quad c_1=0$$

$$y(L)=0 \Rightarrow c_1(e^{\gamma L}-e^{-\gamma L})+c_3L=0$$

$$\Rightarrow c_3L=0$$

$$\overset{L\neq 0}{\Longrightarrow} \quad c_3=0$$

Τελικά βρίσκουμε μόνο την τετριμμένη λύση $y=0$, οπότε το πρόβλημα δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές

- $\lambda=0$ Στην περίπτωση αυτή $\rho^4=0$ και στην τετραπλή ρίζα $\rho=0$ αντιστοιχεί η γενική λύση

$$y(x)=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

ενώ

$$y'(x)=3c_1x^2+2c_2x+c_3$$

$$y''(x)=6c_1x+2c_2$$

$$y(0)=0 \Rightarrow c_4=0$$

$$y''(0)=0 \Rightarrow 2c_2=0 \Rightarrow c_2=0$$

Επομένως

$$y(x)=c_1x^3+c_3x$$

$$y''(x)=6c_1x$$

$$y''(L)=0 \Rightarrow 6c_1L=0 \overset{L\neq 0}{\Longrightarrow} c_1=0$$

$$y(L)=0 \Rightarrow c_1L^3+c_3L=0 \Rightarrow c_3L=0 \overset{L\neq 0}{\Longrightarrow} c_3=0$$

Και εδώ λοιπόν βρίσκουμε μόνο την τετριμμένη λύση $y=0$, οπότε το πρόβλημα δεν έχει ως λύση τη μηδενική ιδιοτιμ

• $\lambda = k^2 > 0$ Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της δ.ε. γράφεται

$$y(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + c_3 x + c_4$$

ενώ

$$y'(x) = k(c_1 \cos kx - c_2 \sin kx) + c_3$$

$$y''(x) = -k^2 (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx)$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow -k^2 c_2 = 0 \overset{k \neq 0}{\Rightarrow} c_2 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

Επομένως

$$y(x) = c_1 \sin kx + c_3 x$$

$$y''(x) = -c_1 k^2 \sin kx$$

$$y''(L) = 0 \Rightarrow -c_1 k^2 \sin kL = 0 \overset{k \neq 0}{\Rightarrow} c_1 \sin kL = 0 \quad (*)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow c_1 \sin kL + c_3 L = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} c_3 L = 0 \overset{L \neq 0}{\Rightarrow} c_3 = 0$$

Για να έχει το πρόβλημα μη τετριμμένη λύση, αφού $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, θα πρέπει

$$c_1 \neq 0$$

οπότε η $(*)$ δίνει

$$\sin kL = 0$$

$$\Rightarrow k_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι οι

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις τις $\quad n = 1, 2, \ldots$

$$y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Εναλλακτικός τρόπος λύσης:

Αν θέσουμε $z(x) = y''(x)$ η δ.ε.

$$y^{(4)} + \lambda y'' = 0$$ γίνεται

$$z'' + \lambda z = 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες

$$y''(0) = y''(L) = 0$$

αντιστοιχούν σε

$$z(0) = z(L) = 0$$

και γνωρίζουμε από το παράδειγμα 1 ότι το πρόβλημα ως προς z δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές. Παίρνουμε λοιπόν κατευθείαν

$$\lambda = k^2 > 0$$

και τη γενική λύση

$$z(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

$$y''(x) = z(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \int y''(x)dx = \frac{1}{k}\left(-c_1 \cos kx + c_2 \sin kx\right) + c_3$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \int y'(x)dx = -\frac{1}{k^2}\left(c_1 \sin kx + c_2 \cos kx\right) + c_3 x + c_4$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \end{array}\right\} \text{ οπότε } \quad y(x) = -\frac{c_1}{k^2}\sin kx + c_3 x$$

$$y''(x) = c_1 \sin kx$$

$$y''(L) = 0 \Rightarrow c_1 \sin kL = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow -\frac{c_1}{k^2}\sin kL + c_3 L = 0 \Rightarrow c_3 L = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$c_1 \neq 0$ για $y \neq 0$ και τελικά

$$\sin kL = 0 \Rightarrow \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Παράδειγμα 7: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις για τη διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + 3xy' + \lambda y = 0, \qquad 1 \le x \le e$$

με συνοριακές συνθήκες

$$y(1) = 0 \quad \text{και} \quad y(e) = 0$$

Λύση: Βρίσκουμε τη γενική λύση της δ.ε. Για

$$y(x) = x^\rho$$

παίρνουμε

$$x^2 \cdot \rho(\rho-1) \cdot x^{\rho-2} + 3x \cdot \rho x^{\rho-1} + \lambda x^\rho = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho(\rho-1)x^\rho + 3\rho x^\rho + \lambda x^\rho = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho(\rho-1) + 3\rho + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2 + 2\rho + \lambda = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4(1-\lambda)$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1-\lambda)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του λ

- $\lambda < 1$ $(\Delta > 0)$ Στην περίπτωση αυτή έχουμε 2 πραγματικές ρίζες

Αν θέσουμε $\qquad 1-\lambda = \gamma^2 > 0$

παίρνουμε $\qquad \rho_{1,2} = -1 \pm \gamma$

Η γενική λύση της δ.ε είναι $\qquad y(x) = c_1 x^{\rho_1} + c_2 x^{\rho_2}$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1^{\rho_1} + c_2 \cdot 1^{\rho_2} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \quad (1)$$

$$y(e) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\rho_1} + c_2 e^{\rho_2} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} c_1 (e^{\rho_1} - e^{\rho_2}) = 0$$

Όμως $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ και $\rho_1 \neq \rho_2$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε $c_1 = 0$ και $c_2 = -c_1 = 0$. Άρα μόνο η τετριμμένη λύση $y = 0$ αντιστοιχεί για $\lambda < 1$

• $\lambda = 1$. Στην περίπτωση αυτή η δ.ε. γίνεται

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2y'' + 2xy' + xy' + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2y')' + (xy)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2y' + xy)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2y' + xy = c_1$$

$$\overset{x \neq 0}{\Rightarrow} \quad xy' + y = \frac{c_1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad (xy)' = c_1 (\ln x)'$$

$$\Rightarrow \quad xy = c_1 \ln x + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \frac{\ln x}{x} + \frac{c_2}{x}$$

αυτή η λύση αντιστοιχεί στην x^p, όπου $p = -1$ η διπλή ρίζα για $\lambda=$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 \frac{\ln 1}{1} + \frac{c_2}{1} = 0 \qquad (\ln 1 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$y(e) = 0 \Rightarrow c_1 \frac{\ln e}{e} + \frac{c_2}{e} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 \frac{1}{e} = 0 \qquad (\ln e = 1)$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Και σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε μόνο την τετριμμένη λύση $y = 0$, οπότε το $\lambda = 1$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος

• $\lambda > 1$ $(\Delta < 0)$ Δύο μιγαδικές ρίζες

Αν θέσουμε $1-\lambda = -k^2 < 0$

παίρνουμε $\rho_{1,2} = -1 \pm ik$

Γενική λύση Δ.Ε. $y(x) = c_1 x^{\rho_1} + c_2 x^{\rho_2}$

$$= c_1 x^{-1+ik} + c_2 x^{-1-ik}$$

$$= x^{-1}(c_1 x^{ik} + c_2 x^{-ik})$$

χρήση της $x = e^{\ln x}$

$$= \frac{1}{x}\left(c_1 e^{ik\ln x} + c_2 e^{-ik\ln x}\right)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1}\left(c_1 e^{ik\ln 1} + c_2 e^{-ik\ln 1}\right) = 0 \qquad \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = -c_1$$

οπότε

$$y(x) = \frac{c_1}{x}\left(e^{ik\ln x} - e^{-ik\ln x}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{c_1}{x}\left[\cancel{\cos(k\ln x)} + i\sin(k\ln x) - (\cancel{\cos(k\ln x)} - i\sin(k\ln x))\right]$$

$$= \frac{2ic_1}{x}\sin(k\ln x)$$

$$= c\,\frac{\sin(k\ln x)}{x} \qquad c = 2ic_1$$

$$y(e) = 0 \Rightarrow c\,\frac{\sin(k\ln e)}{e} = 0 \Rightarrow \frac{c}{e}\sin(k\ln e) = 0$$

$c \neq 0$ για μη τετριμμένη λύση, οπότε

$$\sin k = 0 \qquad (\ln e = 1)$$

$$\Rightarrow k_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ιδιοτιμές

$$1-\lambda_n = -k_n^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n = 1 + k_n^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n = 1 + (n\pi)^2 \quad , \quad n = 1, 2 \ldots$$

Ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n(x) = \frac{\sin(n\pi \ln x)}{x}$$

Επαλήθευση:

$$y_n' = \frac{n\pi \frac{1}{x}\cos(n\pi \ln x)\cdot x - \sin(n\pi \ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{n\pi \cos(n\pi \ln x) - \sin(n\pi \ln x)}{x^2}$$

$$y_n'' = \frac{\left[-\frac{n\pi}{x}\cdot n\pi \sin(n\pi \ln x) - \frac{n\pi}{x}\cos(n\pi \ln x)\right]x^2 - 2x\left[n\pi\cos(n\pi \ln x) - \sin(n\pi \ln x)\right]}{x^4}$$

$$= \frac{-(n\pi)^2 x \sin(n\pi \ln x) - n\pi\, x\cos(n\pi \ln x) - n\pi \cdot 2x\cos(n\pi \ln x) + 2x\sin(n\pi \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{[2-(n\pi)^2]\sin(n\pi \ln x) - 3n\pi\cos(n\pi \ln x)}{x^3}$$

$$x^2 y_n'' + 3x y_n' + \lambda_n y_n$$

$$= \frac{[2-(n\pi)^2]\sin() - 3n\pi\cos()}{x} + 3\,\frac{n\pi\cos() - \sin()}{x}$$

$$+ \, [1+(n\pi)^2]\,\frac{\sin()}{x}$$

$$= \frac{[2-(n\pi)^2 - 3 + 1 + (n\pi)^2]\sin() + (-3n\pi + 3n\pi)\cos()}{x}$$

$$= 0$$

Παρατήρηση: Το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί αν χρησιμοποιήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την

$$z = \ln x \implies x = e^{z}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{x} = e^{-z}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -e^{-2z}\frac{dy}{dz} + e^{-z}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= -e^{-2z}\frac{dy}{dz} + e^{-z}\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= -e^{-2z}\frac{dy}{dz} + e^{-2z}\frac{d^2y}{dz^2}$$

οπότε

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

$$\implies e^{2z}\cdot\left[-e^{-2z}\frac{dy}{dz} + e^{-2z}\frac{d^2y}{dz^2}\right] + 3e^{z}\cdot e^{-z}\frac{dy}{dz} + \lambda y = 0$$

$$\implies -\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} + 3\frac{dy}{dz} + \lambda y = 0$$

$$\implies y'' + 2y' + \lambda y = 0$$, δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

Συνοριακές συνθήκες: $x=1 \to z = \ln 1 = 0$

$x = e \to z = \ln e = 1$

$$\left.\begin{array}{l} y(x=1)=0 \to y(z=0)=0 \\ y(x=e)=0 \to y(z=1)=0 \end{array}\right\} \implies y(0)=y(1)=0$$