Εφαρμογές της συνάρτησης Green

Παράδειγμα 1: Στατική. Μια σημαντική εξίσωση της στατικής είναι η

$$T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L$$

με συνοριακές συνθήκες $u(0) = u(L) = 0$

T: ομοιόμορφη δύναμη τάσης

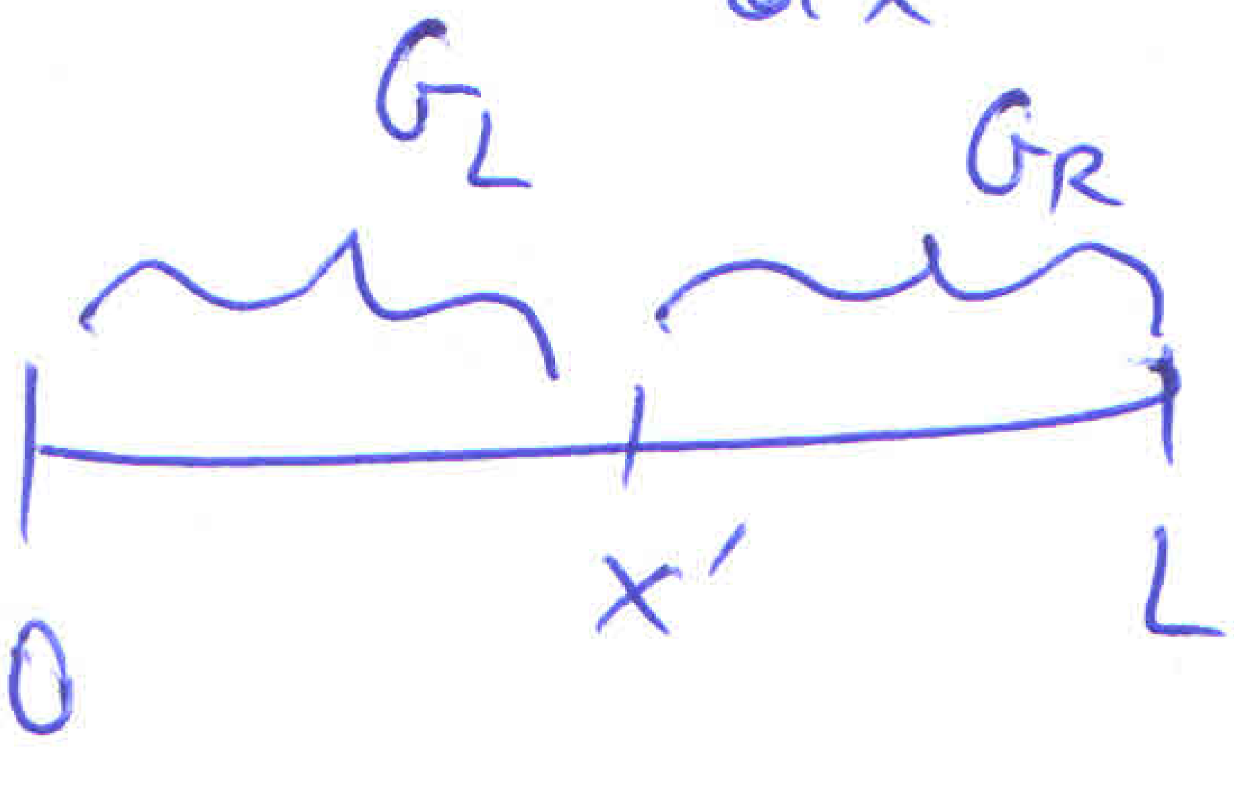
$u(x)$: μετατόπιση

$f(x)$: ασκούμενο φορτίο

Η εξίσωση μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο της συνάρτησης Green.

Η συνάρτηση Green θα ικανοποιεί τη σχέση

$$T \frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x - x')$$



$$G(x,x') = \begin{cases} G_L(x,x') & , 0 \leq x < x' \\ G_R(x,x') & , x' < x \leq L \end{cases}$$

$$\frac{d^2 G_L}{dx^2} = 0 \Rightarrow G_L(x,x') = Ax + B$$

$$\frac{d^2 G_R}{dx^2} = 0 \Rightarrow G_R(x,x') = \Gamma x + \Delta$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$G_L(0,x') = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$G_R(L,x') = 0 \Rightarrow \Gamma L + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -\Gamma L$$

Άρα $G_L(x,x') = Ax$ $\quad G_L'(x,x') = A$

$G_R(x,x') = \Gamma(x-L)$ $\quad G_R'(x,x') = \Gamma$

Συνθήκες συναρμογής

Για $x = x'$, $G_L = G_R \Rightarrow Ax' = \Gamma(x'-L)$

$$G_R' - G_L' = \frac{1}{T} \Rightarrow \Gamma - A = \frac{1}{T}$$

Οπότε $A = \Gamma \dfrac{x'-L}{x'}$

και $\Gamma - \Gamma \dfrac{x'-L}{x'} = \dfrac{1}{T} \Rightarrow \Gamma \dfrac{x'-x'+L}{x'} = \dfrac{1}{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \Gamma = \dfrac{x'}{LT}$ και $A = \dfrac{x'-L}{x'} \dfrac{x'}{LT} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \frac{x'-L}{LT}$$

Οπότε $G_L(x,x') = \dfrac{x(x'-L)}{LT}$

$G_R(x,x') = \dfrac{(x-L)x'}{LT}$

Οπότε $G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{x(x'-L)}{LT}, & 0 \le x \le x' \\ \dfrac{(x-L)x'}{LT}, & x' < x \le L \end{cases}$

Οπότε

$$u(x) = \int_0^x G_R(x,x') f(x') dx' +$$

$$+ \int_x^L G_L(x,x') f(x') dx' =$$

$$= \frac{(x-L)}{LT} \int_0^x x' f(x') dx' + \frac{x}{LT} \int_x^L (x'-L) f(x') dx'$$

Παράδειγμα 2: Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση και εξωτερική δύναμη.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι αρχικών τιμών και όχι συνοριακών τιμών. Όμως, η συνάρτηση Green μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτή την περίπτωση.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx(t)=f(t) \qquad t>0$$

$\gamma\frac{dx}{dt}$: όρος απόσβεσης (τριβή)

$kx(t)$: δύναμη αρμονικού ταλαντωτή (ελατηρίου)

$f(t)$: εξωτερική δύναμη

Εδώ γράφουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Green ως

$$m\frac{d^2G}{dt^2}+\gamma\frac{dG}{dt}+kG(t,t')=\delta(t-t') \qquad t>0$$

και επίσης θα έχουμε $G(0,t')=\dot{G}(0,t')=0$

Θα χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική, αλλά επίσης χρήσιμη, μέθοδο για τον υπολογισμό της συνάρτησης Green. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Fourier.

Εαν $\tilde{G}(\omega, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')\, e^{-i\omega t}\, dt$

ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης Green, τότε

$$G(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(\omega,t')\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Θυμίζουμε από το μετασχηματισμό Fourier ότι

$$F\left[\frac{dG}{dt}\right] = i\omega\, \tilde{G}(\omega,t')$$

$$F\left[\frac{d^2G}{dt^2}\right] = -\omega^2 \tilde{G}(\omega,t')$$

Επίσης $F\left[\delta(t-t')\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t')\, e^{-i\omega t}\, dt =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i\omega t'}$$

Οπότε ο μετασχηματισμός Fourier της εξίσωσης της συνάρτησης Green θα είναι

$$-m\omega^2 \tilde{G}(\omega,t') + i\omega\gamma \tilde{G}(\omega,t') + k\tilde{G}(\omega,t') =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\omega,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t'}}{k + i\omega\gamma - m\omega^2}$$

Θέτουμε $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Τότε $\tilde{G}(\omega,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t'}}{m\left(\omega_0^2 + i\frac{\gamma}{m}\omega - \omega^2\right)}$

Οπότε $G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t'} e^{i\omega t}}{\omega_0^2 + i\frac{\gamma}{m}\omega - \omega^2} d\omega =$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - i\frac{\gamma}{m}\omega - \omega_0^2} d\omega$$

Έχουμε

$$\omega^2 - i\frac{\gamma}{m}\omega - \omega_0^2 = (\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2) \quad \text{με}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{i\gamma}{2m} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} = i\gamma' \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma'^2}$$

με $\gamma' = \frac{\gamma}{2m}$.

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}\,d\omega$$

υπολογίζεται με μιγαδική ολοκλήρωση, συγκεκριμένα με ολοκληρωτικά υπόλοιπα (κάντε μια επανάληψη για να τα θυμηθείτε)

Εαν $t<t'$ το ολοκλήρωμα δίνει μηδέν.

Εαν $t>t'$ έχουμε δύο πόλους ω_1 και ω_2 (εάν $\omega_0 \neq \gamma'$) και το ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}\,d\omega = 2\pi i\left[\frac{e^{i\omega_1(t-t')}}{\omega_1-\omega_2} + \frac{e^{i\omega_2(t-t')}}{\omega_2-\omega_1}\right] = \frac{2\pi i}{\omega_1-\omega_2}\left[e^{i\omega_1(t-t')} - e^{i\omega_2(t-t')}\right]$$

Οπότε $G(t,t') = \frac{-i}{(\omega_1-\omega_2)m}\left[e^{i\omega_1(t-t')} - e^{i\omega_2(t-t')}\right]$.

Αντικαθιστούμε τα ω_1 και ω_2 και έχουμε

$$G(t,t') = \frac{1}{m} \frac{e^{-\gamma'(t-t')} \sin\left[(t-t')\sqrt{\omega_0^2-\gamma'^2}\right]}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma'^2}} \theta(t-t')$$

εαν $\omega_0 > \gamma'$

με

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{εάν } t<t' \\ 1 & \text{εάν } t \geq t' \end{cases}$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι

$$2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$

Επίσης εαν $\omega_0 < \gamma'$ θα έχουμε

$$G(t-t') = \frac{1}{m} \frac{e^{-\gamma'(t-t')} \sinh\left[(t-t')\sqrt{\gamma'^2-\omega_0^2}\right]}{\sqrt{\gamma'^2-\omega_0^2}} \theta(t-t')$$

Τέλος αν $\omega_0 = \gamma'$ τότε θα έχουμε ένα πόλο δεύτερης τάξης και το ολοκλήρωμα πρέπει πάλι να υπολογισθεί ξανά με ολοκληρωτικά υπόλοιπα και οδηγεί στη σχέση

$$G(t-t') = \frac{1}{m}(t-t')\, e^{-\gamma'(t-t')}\, \theta(t-t')$$

και $$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')\, f(t')\, dt'$$

Παράδειγμα 3: Εξίσωση Poisson. Μια γνωστή εξίσωση του ηλεκτρομαγνητισμού (της ηλεκτροστατικής) είναι η εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\rho(\vec{r})$: συνάρτηση κατανομής φορτίου

Έστω $V(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{r},\vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'$ $\to dV'$

Η συνάρτηση Green $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ λύνει το εκφυλισμένο πρόβλημα Poisson

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Η συνάρτηση Green ονομάζεται και θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace ή και συνάρτηση Green στον ελεύθερο χώρο.

Εδώ $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$

Για να βρούμε τη λύση της παραπάνω εξίσωσης στον τρισδιάστατο χώρο θέτουμε $\vec{r}\,' = 0$.

Τότε $\nabla^2 G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$

Εάν $\vec{r} \neq 0$ θα έχουμε

$$\nabla^2 G = 0$$

Επειδή η σημειακή πηγή δεν έχει δομή, δεν περιμένουμε να έχει δομή (γωνιακή εξάρτηση) και η συνάρτηση $G(\vec{r})$, δηλαδή η συνάρτηση $G(\vec{r})$ θα πρέπει να είναι σφαιρικά συμμετρική, δηλαδή $G(\vec{r}) = G(r) = G(|\vec{r}|)$

Θυμόμαστε ότι

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

Αφού θα έχουμε σφαιρικά συμμετρική $G(r)$ τότε

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rG) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dr^2}(rG) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rG) = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rG = br + a \Rightarrow G(r) = \frac{a}{r} + b$$

Η $G(r)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη μηδενισμού στο άπειρο, οπότε θα πρέπει

$b = 0$.

Την άλλη σταθερά την υπολογίζουμε με ολοκλήρωση της βασικής εξίσωσης σε ένα τυχόντα όγκο

$$\int (\nabla^2 G)\, dV = -\int \delta(\vec{r})\, dV = -1$$

με χρήση της σχέσης της συνάρτησης δέλτα

Οπότε

$$\int (\nabla^2 G)\, dV = -1$$

Όμως $\nabla^2 G = \nabla \cdot \nabla G$

Οπότε $\int \nabla^2 G\, dV = \int \nabla \cdot (\nabla G)\, dV$

Με χρήση του θεωρήματος Gauss

$$\int (\nabla \cdot \vec{A})\, dV = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

και με $\vec{A} = \nabla G$ θα πάρουμε

$$\int \nabla^2 G \, dV = \oint \nabla G \cdot d\vec{S} = -1$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα γίνεται πάνω στην επιφάνεια που περικλύει τον προηγούμενο όγκο. Επειδή το ολοκλήρωμα θα είναι το ίδιο για όλες τις κλειστές επιφάνειες που περικλείουν την αρχή, μπορούμε να το υπολογίσουμε για μια σφαιρική επιφάνεια.

Έτσι αφού $G(r) = \frac{a}{r}$, $\nabla G = -\frac{a}{r^2}\hat{r}$

$$\oint \left(-\frac{a}{r^2}\hat{r}\right) d\vec{S} = -a \oint \frac{dS}{r^2} = -1$$

Όμως $dS = r^2 \underbrace{\sin^2\theta \, d\theta \, d\varphi}$

$d\Omega$: στοιχειώδης στερεά γωνία

Άρα $$-a \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -a\, 4\pi = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4\pi}$$

Άρα $$G(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|}$$

Οπότε $G(\vec{r}, 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|}$

Με αντικατάσταση $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}'$ θα έχουμε

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Που είναι γνωστή σχέση από τον ηλεκτρομαγνητισμό.

Παράδειγμα 4: Η συνάρτηση Green του τελεστή $\nabla^2 + k^2$ στον άπειρο χώρο. Λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης Helmholtz

Η τρισδιάστατη εξίσωση Helmholtz (μη-ομογενής) είναι $(\nabla^2 + k^2)\, u(\vec{r}) = f(\vec{r})$

Η συνάρτηση Green θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\nabla^2 + k^2)\, G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Θέτουμε και εδώ $\vec{r}' = 0$ και θα έχουμε

$$(\nabla^2 + k^2)\, G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

Εάν $\vec{r} \neq 0$ $(\nabla^2 + k^2)\, G = 0$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα η $G(\vec{r})$ θα πρέπει να είναι σφαιρικά συμμετρική, δηλαδή $G(\vec{r}) = G(r)$, άρα η εξίσωση θα γίνει

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2 G = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2(rG) = 0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(r) = r\,G(r)$

τότε $$\frac{d^2 g}{dr^2} + k^2 g(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(r) = A\sin(kr) + B\sin(kr) \quad \text{ή}$$

$$g(r) = C e^{ikr} + D e^{-ikr}$$

Οπότε $$G(r) = A\frac{\sin(kr)}{r} + B\frac{\sin(kr)}{r}$$

ή $$G(r) = C\frac{e^{ikr}}{r} + D\frac{e^{-ikr}}{r}$$

Για ένα κύμα που απομακρύνεται από την αρχή τότε $D = 0$ μια και η μορφή του σφαιρικού κύματος είναι

$$G(r) = C \frac{e^{ikr}}{r}$$

Επειδή για $k=0$ η εξίσωση είναι

$$\nabla^2 G = \delta(\vec{r})$$

και η λύση στην περίπτωση που $k=0$ θα πρέπει να είναι η αντίστοιχη αυτή του παραδείγματος 3, $G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$.

Άρα είναι φανερό ότι $C = -\frac{1}{4\pi}$.

Έτσι $G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$

ή $G(\vec{r},0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$

και με την αντικατάσταση $\vec{r} \to \vec{r}-\vec{r}'$ έχουμε

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Παράδειγμα 5: Η συνάρτηση Green για την κυματική εξίσωση σε μια διάσταση σε άπειρα χωρία.

Η συνάρτηση Green για την μονοδιάστατη κυματική εξίσωση ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-x')\,\delta(t-t')$$

όπου στον άπειρο χώρο $-\infty < x, x' < +\infty$

και $t, t' > 0$

$$G : G(x, x'; t, t')$$

Ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Green ως

$$g(x, x'; s, t') = \int_0^\infty G(x, x'; t, t')\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right] = s^2 g(x, x'; s, t') - s\, G(x, x'; 0, t') -$$

$$- G_t(x, x'; 0, t')$$

Θεωρούμε ότι $G(x, x'; 0, t') = 0$

και $G_t(x, x'; 0, t') = 0$

ως αρχικές συνθήκες.

Επίσης

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-t')\right] = \int_0^\infty \delta(t-t')\, e^{-st}\, dt =$$

$$= e^{-st'}$$

Οπότε με μετασχηματισμό Laplace (ως προς t) της εξίσωσης της συνάρτησης Green θα έχουμε

$$\frac{s^2}{c^2} g - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \delta(x-x')\, e^{-st'}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της $g(x,x';s,t)$

$$\tilde{g}(k,x';s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,x';s,t)\, e^{-ikx}\, dx$$

Θυμίζουμε ότι

$$F\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right] = -k^2 \tilde{g}(k,x';s,t)$$

και $$F\left[\delta(x-x')\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx'}$$

Οπότε με μετασχηματισμό Fourier της

παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\frac{s^2\tilde{g}}{c^2} + k^2\tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx'} e^{-st'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(k,x';s,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ikx'-st'}}{k^2+s^2/c^2}$$

μετασχηματισμός Laplace–Fourier της συνάρτησης Green.

Οπότε το $g(x,x';s,t')$ από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier θα δίνεται από τη σχέση

$$g(x,x';s,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k,x';s,t') e^{ikx} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-st'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+\frac{s^2}{c^2}} dk$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ολοκληρωτικά υπόλοιπα και είναι

$$g(x,x';s,t') = \frac{c\, e^{-st'-s\frac{|x-x'|}{c}}}{2s}$$

Ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνει

$$G(x,x';t,t') = \frac{c}{2}\,\theta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right)$$

με $\Theta(x)$ τη συνάρτηση βήματος.

Για τον παραπάνω αντίστροφο μετασχηματισμό χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα που μας λέει ότι αν ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ είναι $F(s)$ τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)e^{-bs}$ με b σταθερά θα είναι $f(t-b)\,\Theta(t-b)$.

Επίσης θυμίζω ότι ο μετασχηματισμός Laplace του 1 είναι $1/s$, για $s>0$.

Παράδειγμα 6: Η συνάρτηση Green για την εξίσωση αγωγής θερμότητας σε μια διάσταση σε άπειρα χωρία.

Η συνάρτηση Green για τη μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-x')\,\delta(t-t')$$

στο διάστημα $-\infty < x, x' < \infty$, $t, t' > 0$

με συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{|x|\to\infty} G(x, x'; t, t') = 0 \quad , \quad t > 0$$

και αρχικές συνθήκες $G(x, x'; 0, t') = 0$

Ορίζω το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Green ως

$$g(x, x'; s, t') = \int_0^\infty G(x, x'; t, t') e^{-st} dt$$

Έχουμε

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial G}{\partial t}\right] = s g(x, x'; s, t') - G(x, x'; 0, t') =$$

$$= s g(x, x'; s, t')$$

Άρα $$s g - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \delta(x - x') e^{-st'}$$

Με μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$s\tilde{g} + k^2 \tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx'} e^{-st'}$$

οπότε

$$\tilde{g}(k,x';s,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ikx'-st'}}{s+k^2}$$

Οπότε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier θα έχουμε

$$g(x,x';s,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k,x';s,t')\, e^{ikx}\, dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-st'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{s+k^2}\, dk$$

Με ολοκληρωτικά υπόλοιπα παίρνουμε

$$g(x,x';s,t') = \frac{e^{-|x-x'|\sqrt{s}-st'}}{2\sqrt{s}}$$

Ενώ από τους πίνακες του μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε

$$G(x,x';t,t') = e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')}} \frac{\theta(t-t')}{\sqrt{4\pi(t-t')}}$$

Παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα δεύτερης μετατόπισης που αναφέραμε στο προηγούμενο παράδειγμα και επίσης χρησιμοποιήσαμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\lambda\sqrt{s}} \quad (\lambda \geq 0)$$ που είναι

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} .$$