ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Συλλογή Διακριτών Ασκήσεων από Παλαιότερα Θέματα Εξετάσεων

Το παρόν συγκεντρώνει τις διακριτές (μη επαναλαμβανόμενες) ασκήσεις από τα θέματα εξετάσεων του μαθήματος **«Ειδικά Θέματα Μηχανικής»** των ετών 2022 έως 2026. Οι ασκήσεις έχουν ομαδοποιηθεί ώστε κάθε διακριτή εκφώνηση να εμφανίζεται μία φορά, με το αντίστοιχο σχήμα της (όπου υπάρχει).

Άσκηση 1

Ιοντικό στερεό — Δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης

Σε ένα ιοντικό στερεό, η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο ιόντων είναι

$$E(r) = -a/r + b/r^7$$

με a, b σταθερές.

(α) Να βρεθεί η απόσταση ισορροπίας.

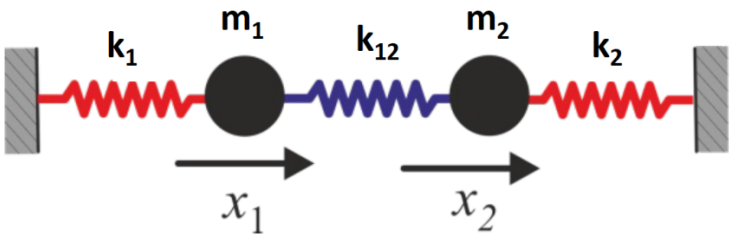
(β) Να συγκρίνετε τις ενέργειες άπωσης και έλξης όπως και τις δυνάμεις άπωσης και έλξης στην ευσταθή ισορροπία.

(γ) Ποια είναι η απόσταση που τα ιόντα διαχωρίζονται ευκολότερα, δηλ. με εφαρμογή της μικρότερης δυνατής δύναμης;

Άσκηση 2

Σύστημα δύο μαζών με τρία ελατήρια (k_1, k_{12}, k_2)

Θεωρώντας το σύστημα μαζών–ιδανικών ελατηρίων του παρακάτω σχήματος, να βρεθούν για διαμήκεις ταλαντώσεις:



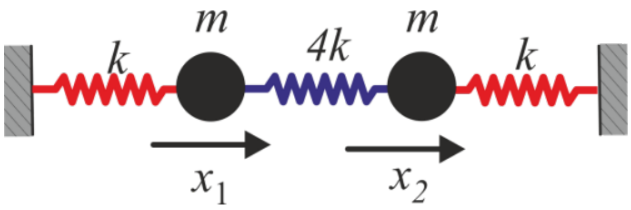
I. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος με τη μέθοδο της Λαγκραζιανής.

II. Οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος για $m_1=2m$, $m_2=m$, $k_1=4k$, $k_{12}=k$, και $k_2=2k$.

Άσκηση 3

Συμμετρικό σύστημα m, 4k, m με ελατήρια k στα άκρα

Θεωρώντας το σύστημα μαζών–ιδανικών ελατηρίων του παρακάτω σχήματος, να βρεθούν, για διαμήκεις ταλαντώσεις:



I. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος με χρήση Λαγκραζιανού φορμαλισμού.

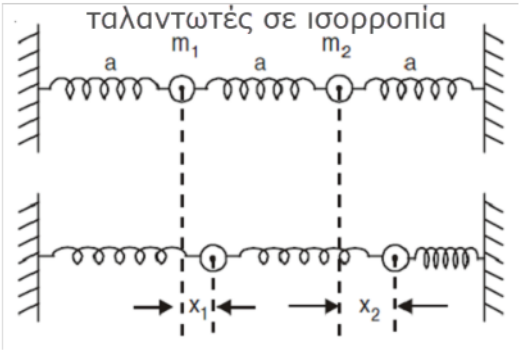
II. Οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

III. Οι απομακρύνσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ για γενικές αρχικές συνθήκες.

Άσκηση 4

Τρία όμοια ελατήρια μήκους a και δύο διαφορετικές μάζες

Το σύστημα μαζών–ελατηρίων του παρακάτω σχήματος περιέχει τρία όμοια ιδανικά ελατήρια μήκους a και σταθεράς ελατηρίου k και δύο διαφορετικές μάζες m_1, m_2.



Να βρεθούν:

I. Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

II. Οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

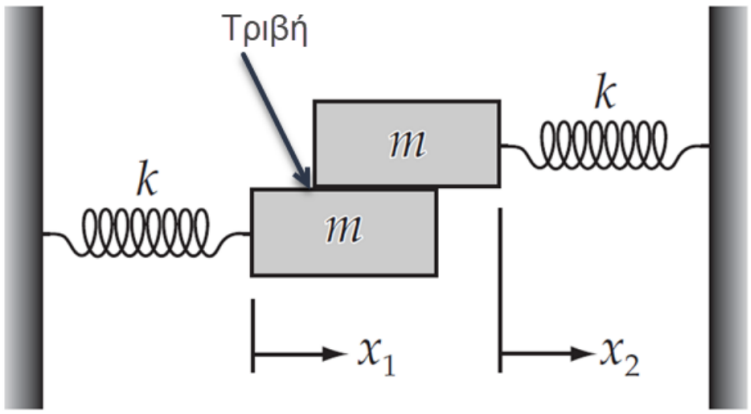
III. Οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

IV. Οι απομακρύνσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ για γενικές αρχικές συνθήκες, εάν $m_1=m$, $m_2=2m$. Εξειδικεύστε στην περίπτωση που $x_1(0)=x_0$, $x_2(0)=0$, $\dot{x}_1(0)=0$, $\dot{x}_2(0)=0$.

Άσκηση 5

Δύο μάζες σε επαφή με τριβή σύζευξης

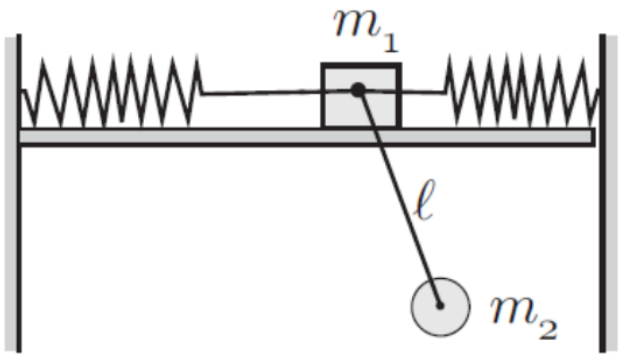
Το σύστημα μαζών–ελατηρίων του παρακάτω σχήματος περιέχει δύο όμοια ιδανικά ελατήρια με σταθερά ελατηρίου k και δύο ίδιες μάζες m. Οι δύο μάζες τοποθετούνται η μία πάνω στην άλλη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και ολισθαίνουν η μία σε σχέση με την άλλη. Η τριβή δημιουργεί σύζευξη στην κίνηση που είναι ανάλογη της στιγμιαίας σχετικής ταχύτητας. Βρείτε τις απομακρύνσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ για γενικές αρχικές συνθήκες και συζητήστε την συμπεριφορά κάθε όρου που εμφανίζεται σε αυτές.



Άσκηση 6

Σώμα με ελατήρια και εκκρεμές κρεμασμένο από αυτό

Σώμα μάζας $m_1=m$ συνδέεται με δύο ίδια ιδανικά ελατήρια σταθεράς k και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο πάγκο. Ένα άλλο σώμα μάζας $m_2=m$ συνδέεται με ελαφριά μπάρα μήκους ℓ στο πρώτο σώμα και μπορεί να ταλαντώνεται ελεύθερα όπως στο παρακάτω σχήμα. Όταν το σύστημα είναι σε ισορροπία τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος.



Αν το σύστημα κινείται έτσι ώστε οι γωνίες ταλάντωσης του εκκρεμούς να είναι μικρές και σας δίνεται επίσης ότι η σταθερά k έχει επιλεγεί ώστε να ισχύει $k = 2mg/\ell$ (τα αποτελέσματα να εκφραστούν συναρτήσει των g, ℓ):

I. Να γραφούν οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των δύο σωμάτων.

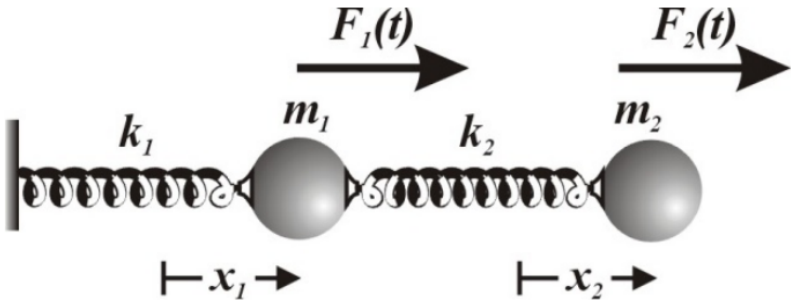
II. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

III. Να υπολογιστούν οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Άσκηση 7

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις δύο μαζών με αρμονικές δυνάμεις

Το σύστημα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δυο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 και από δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2. Στη θέση ισορροπίας των σωμάτων τα ελατήρια βρίσκονται στη θέση φυσικού μήκους τους. Στο σώμα μάζας m_1 ασκείται οριζόντια δύναμη της μορφής $F_1(t) = 3F_0 \cos(\omega t)$, ενώ στο δεύτερο σώμα μάζας m_2 ασκείται οριζόντια δύναμη της μορφής $F_2(t) = 6F_0 \sin(\omega t)$.



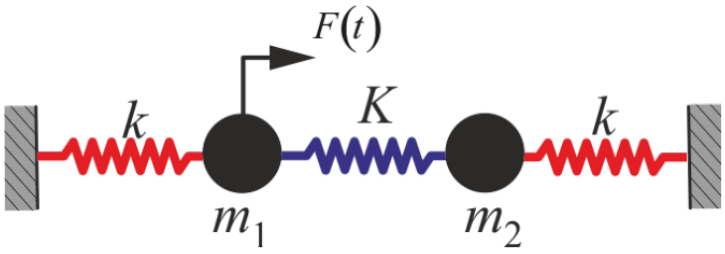
I. Να γραφτούν οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος.

II. Να υπολογιστούν οι εξαναγκασμένες μετατοπίσεις των δύο μαζών (δηλαδή αυτές που αντιστοιχούν στη μερική λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων), στην ειδική περίπτωση όπου $k_1=k_2=k$, $m_1=2m_2=2m$, και $\omega = \sqrt{(3k/m)}$.

Άσκηση 8

Εξαναγκασμένες–αποσβενόμενες ταλαντώσεις (δύναμη μόνο στη m_1)

Στο σύστημα μαζών–ελατηρίων του παρακάτω σχήματος ασκείται δύναμη της μορφής $F(t) = F_0 \cos \omega t$ μόνο στην αριστερή μάζα (m_1) στη διαμήκη διεύθυνση.



Αν θεωρήσουμε επίσης ότι μόνο η αριστερή μάζα εμφανίζει και δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας:

I. Να υπολογίσετε τις εξαναγκασμένες μετατοπίσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ των δύο μαζών λόγω της δύναμης παίρνοντας $m_1 = m_2 = m$.

II. Να υπολογίσετε την χρονικά μέση κινητική ενέργεια της μάζας m_1. Ποια η τιμή αυτή για $\omega = \sqrt{((k+K)/m)}$ αν $K = 0$ και ποια η τιμή αν $K \neq 0$.

Άσκηση 9

Κυματική εξίσωση — Λύσεις τύπου cos·cos + sin·sin

I. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης (με A, u, ξ, ω, k θετικές σταθερές):

(A) $y(x,t) = A(1+\xi)\cos(kx)\cos(\omega t) + A(1-\xi)\sin(kx)\sin(\omega t)$

(B) $y(x,t) = A(x^2 - ut^2)$

II. Στη συνέχεια γράψτε τις όποιες λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης του ερωτήματος I στη μορφή $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ και καθορίστε τις συναρτησιακές μορφές των f, g καθώς και τις ταχύτητες φάσης.

Υπόδειξη: *Χρησιμοποιήστε ότι*

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$,

$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$.

Άσκηση 10

Κυματική εξίσωση — Λύσεις γκαουσιανής μορφής

I. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω εκφράσεις είναι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης (με A, B, u θετικές σταθερές):

(A) $y(x,t) = A\, e^{-(Bx-ut)^2}$

(B) $y(x,t) = A(x^2 - ut^2)$

II. Στη συνέχεια γράψτε τις όποιες λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης του ερωτήματος I στη μορφή $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ και καθορίστε τις συναρτησιακές μορφές των f, g και τις ταχύτητες φάσης.

Άσκηση 11

Κυματική εξίσωση — Λύσεις με τρεις εκφράσεις

I. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω εκφράσεις είναι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης (με a, b θετικές σταθερές):

(Α) $y(x,t) = e^{-(x^2+a^2b^2t^2-2abxt)}$

(Β) $y(x,t) = \sin(ax^2 + bt^2)$

(Γ) $y(x,t) = ax \cdot bt - bt$

II. Στη συνέχεια γράψτε τις όποιες λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης του ερωτήματος I στη μορφή $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ και καθορίστε τις συναρτησιακές μορφές των f, g και τις ταχύτητες φάσης.

Άσκηση 12

Επιφανειακά κύματα σε υγρό

Η ταχύτητα φάσης για επιφανειακά κύματα σε ένα υγρό δίνεται από τη σχέση

$$v_p^{\,2} = g\lambda/(2\pi) + 2\pi S/(\lambda\rho),$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, S η επιφανειακή τάση, ρ η πυκνότητα του υγρού και λ το μήκος κύματος.

I. Να βρεθεί η σχέση διασποράς και η ταχύτητα ομάδας των επιφανειακών κυμάτων στο υγρό.

II. Να βρεθεί το μήκος κύματος που ελαχιστοποιεί την ταχύτητα φάσης. Ποιες οι τιμές των ταχυτήτων φάσης και ομάδας για αυτό το μήκος κύματος;

Άσκηση 13

Γενική σχέση διασποράς για κύματα στο νερό

Η γενική σχέση διασποράς για κύματα στο νερό είναι

$$\omega^2 = (gk + (S/\rho)\, k^3)\, \tanh(kh),$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, h το βάθος του νερού, S η επιφανειακή τάση, ρ η πυκνότητα του νερού και k ο κυματάριθμος.

I. Να βρεθούν (προσεγγιστικά) η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας σε ρηχά νερά ($kh \ll 1$), εάν επιπλέον ισχύει ότι $Sk^2 \ll g\rho$.

II. Να βρεθεί (προσεγγιστικά) ο λόγος της ταχύτητας ομάδας προς την ταχύτητα φάσης σε βαθιά νερά ($kh \gg 1$). Πώς συμπεριφέρεται ο λόγος για πολύ υψηλά και πολύ χαμηλά μήκη κύματος;

III. Πώς αλλάζουν οι ταχύτητες φάσης και ομάδας αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ρηχά νερά αλλά με μεγαλύτερο βάθος νερού από την περίπτωση I. Τι παρατηρείτε;

Υπόδειξη: *Χρησιμοποιήστε ότι*

$\tanh(kh) \simeq kh - (kh)^3/3 + \ldots$ και $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) \approx 1,\ x \gg 1.$

Άσκηση 14

Φωτονικό υλικό — ταχύτητα φάσης

Η ταχύτητα φάσης σε ένα φωτονικό υλικό δίνεται από τη σχέση

$$v_p = (\lambda/2\pi)\,[\omega_g + (\omega_g/k_0^{\,2})\,(2\pi/\lambda - k_0)^2],$$

όπου k_0, ω_g σταθερές με $k = 2\pi/\lambda > k_0$, $k_0 > 0$, $\omega_g > 0$ και λ το μήκος κύματος.

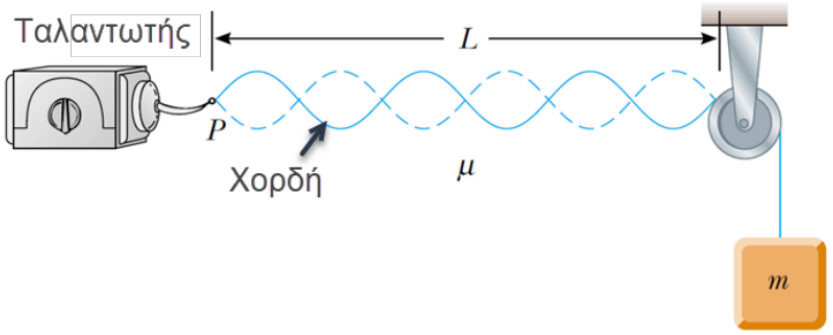
I. Να βρεθεί η σχέση διασποράς και η ταχύτητα ομάδας των κυμάτων στο υλικό.

II. Ποιά η τιμή της ταχύτητας ομάδας για μήκη κύματος όπου $\lambda = 2\pi/(k_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon \ll k_0$, και για μήκη κύματος όπου $\lambda \gg 2\pi/k_0$;

Άσκηση 15

Στάσιμα κύματα σε νήμα με τροχαλία και αναρτημένη μάζα

Στο σύστημα που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα ένα αντικείμενο μάζας m κρέμεται από ένα νήμα μέσω μιας μικρής και ελαφριάς τροχαλίας. Το άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ένα μηχανικό ταλαντωτή σταθερής συχνότητας f. Η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι 0.002 kg/m και το μήκος L από το σημείο P έως και την τροχαλία είναι 2 m. Όταν η μάζα m είναι είτε 16 kg είτε 25 kg παρατηρούμε στάσιμα κύματα, ενώ δεν παρατηρούμε στάσιμα κύματα για καμία άλλη μάζα μεταξύ των παραπάνω τιμών. Σημειώνουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τάση στο νήμα, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κόμβων των στάσιμων κυμάτων. Θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας g = 9.8 m/s^2.



I. Να βρείτε τη συχνότητα f του μηχανικού ταλαντωτή.

II. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της μάζας του αντικειμένου m για την οποία παρατηρούνται στάσιμα κύματα.

Άσκηση 16

Εγκάρσιο κύμα σε σκοινί που κρέμεται από οροφή

Ένα ομοιόμορφο σκοινί μάζας m και μήκους L κρέμεται από μία οροφή.

α) Δείξτε ότι η ταχύτητα ενός εγκάρσιου κύματος στο σκοινί είναι συνάρτηση της απόστασης από το κατώτατο άκρο y και δίνεται από τη σχέση $v = \sqrt{(gy)}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

β) Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται το κύμα για να διανύσει όλο το μήκος του σκοινιού.

Άσκηση 17

Τανυστής τάσεων — επιφάνεια παράλληλη στην x+2y−3z=1

Έστω τανυστής τάσεων

2	3	1
3	−2	−1
1	−1	0

σε τυχαίο σημείο Γ.

I. Ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια στο σημείο Γ που είναι παράλληλη στην επιφάνεια $x + 2y - 3z = 1$;

II. Ποιο το μέτρο της ορθής και διατμητικής τάσης και ποια η γωνία που σχηματίζει η τάση με την ορθή τάση;

Άσκηση 18

Τανυστής τάσεων — Κύριες τιμές (3, 12, 9, −12)

Να βρεθούν οι κύριες τιμές του τανυστή τάσεων

3	0	0
0	12	9
0	9	−12

Ποιος ο πίνακας στροφής που εκφράζει το μετασχηματισμό στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων; Ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων του τανυστή τάσεων;

Άσκηση 19

Τανυστής τάσεων — Κύριες τιμές (6, 24, 18, −24)

Να βρεθούν οι κύριες τιμές του τανυστή τάσεων

6	0	0
0	24	18
0	18	−24

Ποιος ο πίνακας στροφής που εκφράζει το μετασχηματισμό στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων; Ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων του τανυστή τάσεων;

Άσκηση 20

Τανυστής τάσεων — Κύριες τιμές (1, 4, 3, −4)

Έστω τανυστής τάσεων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

I. Να βρεθούν οι κύριες τιμές του τανυστή τάσεων.

II. Ποιος ο πίνακας στροφής που εκφράζει το μετασχηματισμό στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων;

III. Ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων του τανυστή τάσεων;

Άσκηση 21

Τανυστής τάσεων εξαρτώμενος από συντεταγμένες σ(x,y,z)

Έστω τανυστής τάσεων

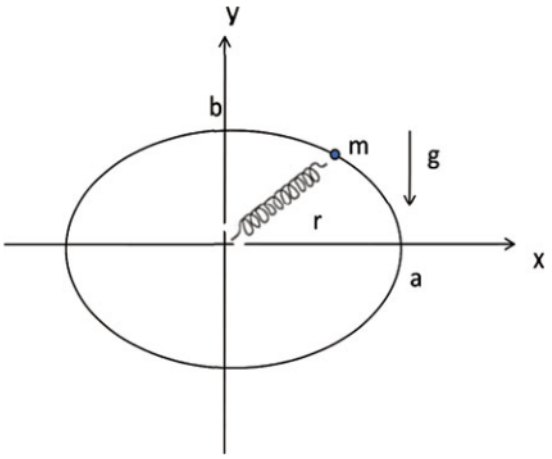
$$\begin{bmatrix} xy & y & 0 \\ y & -2 & -y \\ 0 & -y & z^2 \end{bmatrix}$$

Ποια η τάση σε στοιχειώδη επιφάνεια στο σημείο Γ(1,1,1) για επιφάνεια παράλληλη με την $x^2 = y - zx$;

Άσκηση 22

Σωματίδιο σε έλλειψη με ελατήριο και βαρύτητα

Ένα σωματίδιο μάζας m υποχρεούται να κινηθεί σε μια έλλειψη σε ένα κατακόρυφο επίπεδο, που παραμετροποιείται με $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, όπου $a, b > 0$ και $a \neq b$ και η θετική κατεύθυνση y είναι η κατακόρυφη προς τα πάνω. Το σωματίδιο συνδέεται με την αρχή των αξόνων με ελατήριο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και υπόκειται στη βαρύτητα. Η δυναμική ενέργεια στο ελατήριο είναι $kr^2/2$ όπου r είναι η απόσταση του σημείου μάζας από την αρχή των αξόνων.



α) Χρησιμοποιώντας το θ ως συντεταγμένη, βρείτε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου όταν κινείται πάνω στην έλλειψη. Γράψτε τη Λαγκραζιανή και την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου.

β) Δείξτε ότι $\theta = \pm\pi/2$ είναι δύο σημεία ισορροπίας και βρείτε τυχόν άλλα σημεία ισορροπίας, δίνοντας προσεκτικά τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχουν.

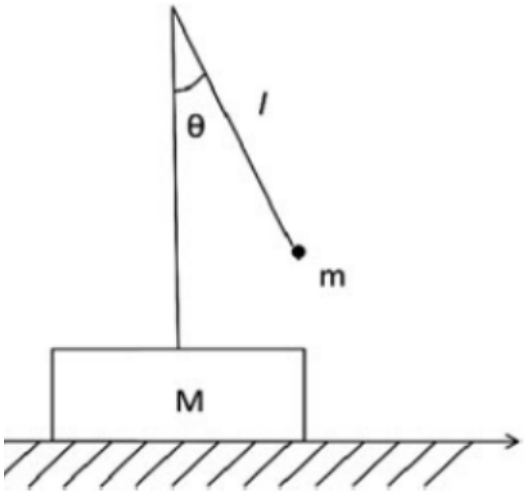
γ) Προσδιορίστε τη σταθερότητα καθενός από τα δύο σημεία ισορροπίας $\theta = \pm\pi/2$ (μπορεί να σας βοηθήσει να εξετάσετε τις περιπτώσεις $a > b$ και $a < b$ χωριστά).

δ) Όταν το σημείο ισορροπίας στο $\theta = -\pi/2$ είναι σταθερό, προσδιορίστε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων.

Άσκηση 23

Εκκρεμές πάνω σε σώμα Μ που ολισθαίνει χωρίς τριβές

Ένα εκκρεμές μήκους l και μάζας m είναι προσαρμοσμένο πάνω σε ένα σώμα μάζας M, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σώμα είναι ελεύθερο να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε μία οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



I. Βρείτε την Λαγκραζιανή του συστήματος.

II. Γράψτε την Λαγκραζιανή που βρήκατε στο I. στην προσέγγιση μικρών ταλαντώσεων του εκκρεμούς.

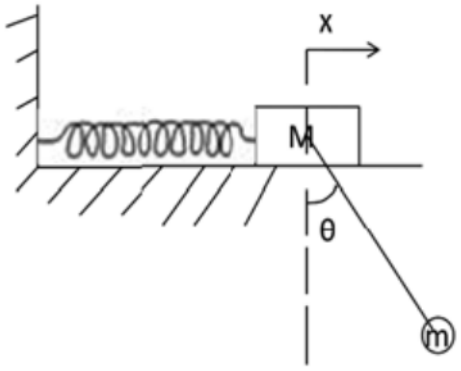
III. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας την Λαγκραζιανή που βρήκατε στο II.

IV. Βρείτε την συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς για μικρές ταλαντώσεις.

Άσκηση 24

Εκκρεμές σε μάζα Μ συνδεδεμένη με ελατήριο Κ

Εκκρεμές μήκους l και μάζας m είναι στερεωμένο σε μάζα M, η οποία μπορεί να γλιστράει πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το ελατήριο έχει σταθερά ελατηρίου K. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για τις δυο μάζες με Λαγκραζιανό φορμαλισμό.



Άσκηση 25

Καμπύλη ελάχιστης απόστασης μεταξύ δύο σημείων

Να βρεθεί η καμπύλη η οποία δίνει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε καρτεσιανό επίπεδο xz (αντίστοιχη διατύπωση εμφανίζεται και για το επίπεδο yz).

Άσκηση 26

Ειδική Σχετικότητα — Από Λαγκραζιανή σε Χαμιλτονιανή

Σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, η Λαγκραζιανή ενός σωματιδίου με μάζα ηρεμίας m_0, το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση ενός δυναμικού $V(x)$ δίνεται από την σχέση

$$L = m_0 c^2 \left(1 - (1 - \dot{x}^2/c^2)^{1/2} \right) - V(x).$$

Δείξτε ότι η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή δίνεται από την σχέση

$$H = m_0 c^2 \left(1 + (p_x/(m_0 c))^2 \right)^{1/2} - m_0 c^2 + V(x),$$

όπου p_x είναι η γενικευμένη ορμή ως προς x.

Άσκηση 27

Εξίσωση κίνησης σε διατηρητικό πεδίο 2D — μέθοδος Χαμιλτονιανής

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Χαμιλτονιανής βρείτε την εξίσωση κίνησης για σωμάτιο που κινείται σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων σε δυο διαστάσεις.

Άσκηση 28

Εξίσωση κίνησης σε διατηρητικό πεδίο 2D — Πολικές συντεταγμένες

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Χαμιλτονιανής βρείτε την εξίσωση κίνησης για σωμάτιο που κινείται σε δισδιάστατο διατηρητικό πεδίο δυνάμεων σε πολικές συντεταγμένες.

Άσκηση 29

Σωμάτιο σε ημισφαιρική επιφάνεια (Lagrange)

Θεωρήστε ότι ένα σωμάτιο κινείται πάνω σε μια ημισφαιρική επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό Lagrange να μελετήσετε την κίνηση του σωματίου:

I. Να υπολογίσετε την δύναμη περιορισμού που υπόκειται το σωμάτιο.

II. Να υπολογίσετε την γωνία που το σωμάτιο θα φύγει από την ημισφαιρική επιφάνεια θεωρώντας ότι αρχικά ξεκινά από την ισορροπία στην κορυφή της ημισφαιρικής επιφάνειας.