ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΓΕΝΙΚΑ

Διαφορική εξίσωση n-τάξης : $f(y^n, y^{n-1}, ..., y'', y', y) = R(x)$

Αν $R(x) = 0$ τότε ομογενής ΔΕ

- Η γενική λύση μιας ΔΕ περιέχει τόσες αυθαίρετες παραμέτρους όσο και η τάξη της
- Η γενική λύση μιας γραμμικής ΔΕ [$y(x)$] ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς [$y_o(x)$] και μίας ειδικής λύσης της μη-ομογενούς [$y_p(x)$]

ΠΡΩΤΟΤΑΞΙΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Διαχωρίσιμη $y' = A(x)B(y)$

   Η λύση δίνεται από την εξίσωση $\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx$

2. Ομογενής $y' = f(\frac{x}{y})$

   Θέτουμε $u = \frac{x}{y}$ και η εξίσωση μετατρέπεται στην $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$, η οποία είναι διαχωρίσιμη

3. Γραμμική ομογενής $y' + P(x)y = 0$

   Η προφανής γενική λύση είναι $y_o = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$

4. Γραμμική μη-ομογενής $y' + P(x)y = R(x)$

   η λύση δίνεται από την σχέση $y = y_o \int \frac{R(x)}{y_o} dx$ όπου $y_o = e^{-\int P(x)dx}$

5. Εξίσωση Bernoulli (μη-γραμμική ΔΕ) $y' = a(x)y + b(x)y^v$

   Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με y^{-v} και θέτουμε $u = y^{1-v}$ οπότε παίρνουμε τελικά την εξίσωση $u' - (1-v)a(x)u = (1-v)b(x)$ η οποία είναι γραμμική μη-ομογενής (περίπτωση 4)

6. Εξίσωση Ricatti (μη-γραμμική ΔΕ) $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

   Καταρχάς βρίσκουμε μία ειδική λύση h και ύστερα θέτουμε $y = gY + h$. Αντικαθιστούμε στην ΔΕ και απαιτούμε πάλι ο συντελεστής του όρου Y να ισούται με το μηδέν, δηλαδή $\frac{g'}{g} = b + 2ah$ και υπολογίζουμε τη συνάρτηση g (περίπτωση 3). Στο τέλος η συνάρτηση Y υπολογίζεται από την διαχωρίσιμη ΔΕ: $Y' = agY^2 \Rightarrow Y = -\frac{1}{\int a(x)g(x)dx}$

ΔΕΥΤΕΡΟΤΑΞΙΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7. Γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές

   $ay'' + by' + cy = 0$ όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

   Αναζητούμε λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\rho x}$. Αντικαθιστώντας στην ΔΕ καταλήγουμε στην εξίσωση $a\rho^2 + b\rho + c = 0$. Αν υπάρχουν δύο λύσεις ρ_1, ρ_2 τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1e^{\rho_1 x} + c_2e^{\rho_2 x}$. Αν η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν και υπάρχει μόνο μία ρίζα ρ, τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1 e^{\rho x} + c_2 x e^{\rho x}$.

8. Γραμμική μη-ομογενής με σταθερούς συντελεστές
   $ay'' + by' + cy = R(x)$
   Λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή σύμφωνα με το 7. Για την ειδική λύση της μη ομογενούς ψάχνουμε λύση y_p που έχει την ίδια μορφή με την $R(x)$.
   Αντικαθιστούμε στην ΔΕ και θέτουμε τους συντελεστές κάθε συνάρτησης του x ίσους με το μηδέν.
   Π.Χ. i) αν $R(x) = \cos(3x)$ ή $R(x) = \sin(3x)$ τότε $y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$
   ii) αν $R(x) = e^{2x}$ τότε $y_p(x) = Ae^{2x}$
   iii) αν $R(x) = e^{2x} + e^{-3x}$ τότε $y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$
   iv) αν $R(x) = 2x^2 + 4$ τότε $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$
   v) αν $R(x) = e^{2x} + \sin(2x) + 2x^2 + 4$ τότε
   $y_p(x) = Ae^{2x} + B\cos(2x) + C\sin(2x) + Dx^2 + Ex + F$
9. Γραμμική ομογενής του Euler
   $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$ όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.
   Αναζητούμε λύσεις της μορφής $y(x) = x^s$. Αντικαθιστώντας στην ΔΕ καταλήγουμε με την εξίσωση $as^2 + (b-a)s + c = 0$. Αν υπάρχουν δύο λύσεις s_1, s_2 τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}$. Αν η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν και υπάρχει μόνο μία ρίζα s, τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1 x^s + c_2 x^s \ln x$.

10. Γραμμική ομογενής $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ αν γνωρίζουμε μία λύση y_1.
    Καταρχάς υπολογίζουμε την Βροσκιανή $W(x) = e^{-\int P(x)dx}$.
    Η δεύτερη λύση δίνεται από την σχέση $y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{y_1^2} dx$ και η γενική λύση
    $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

11. Γραμμική μη-ομογενής $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ αν γνωρίζουμε μία λύση y_1 της αντίστοιχης ομογενούς. Καταρχάς λύνουμε την ομογενή εξίσωση όπως στο 10. Η μερική λύση της μη-ομογενούς δίνεται από την σχέση
    $y_p = y_2 \int \frac{Ry_1}{W} dx - y_1 \int \frac{Ry_2}{W} dx$, όπου $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ η Βροσκιανή.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΕ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

12. Ομογενής ΔΕ $Ly = 0$ όπου $L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$
    με τους συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ ανεξάρτητους του x.
    Αναζητούμε λύσεις της μορφής $e^{\rho x}$ όπου τα ρ είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης
    $F(\rho) = a_n \rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots + a_2 \rho^2 + a_1 \rho + a_0 = 0$. Αν μία από τις ρίζες, η ρ_0, είναι πολλαπλότητας r τότε είναι λύσεις και οι $x^k e^{\rho_0 x}, k = 0, 1, \ldots, r-1$.

13. Μη-ομογενής ΔΕ $Ly = R(x)$.

Η ειδική λύση $y_p(x)$ εξαρτάται από την μορφή της $R(x)$

- Αν η $R(x)$ είναι εκθετικό της μορφής $e^{\lambda x}$ τότε η ειδική λύση είναι $y_p(x) = \dfrac{1}{F(\lambda)} e^{\lambda x}$. Αν το λ συντονίζεται με την ρίζα ρ_0 πολλαπλότητας r, τότε η ειδική λύση που αναζητάμε είναι η $y_p(x) = \dfrac{x^r e^{\lambda x}}{F^{(r)}(\lambda)}$.
- Αν η $R(x)$ είναι πολυώνυμο, αναζητούμε μερική λύση που είναι πολυώνυμο ιδίου βαθμού.
- Αν η $R(x)$ είναι ένα πολυώνυμο επί ένα εκθετικό, αναζητούμε ειδική λύση που είναι επίσης γινόμενο ενός πολυωνύμου ιδίας τάξης με το ίδιο εκθετικό.
- Σε περίπτωση που η $R(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων, ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός θα δίνει και την $y_p(x)$.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Ορισμός : $F(S) = \mathrm{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

Γραμμικότητα : $\mathrm{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathrm{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathrm{L}\{f_2(t)\}$

Θεώρημα Παραγώγων : $\mathrm{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) ... - f^{(n-1)}(0)$

Θεώρημα Συνέλιξης : $\mathrm{L}\{\int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt'\} = F_1(s) F_2(s)$

Βασικές Ιδιότητες: $\mathrm{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$, $\mathrm{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην ΔΕ, ενσωματώνοντας τις αρχικές συνθήκες και την λύνουμε. Με τον ανάστροφο μετασχ. Laplace βρισκουμε την *f*(*t*).

Βασικοί Μετασχηματισμοί $[f(t), F(s)]$:

$$[1, \frac{1}{s}], [e^{at}, \frac{1}{s-a}], [\sin at, \frac{a}{s^2+a^2}], [\cos at, \frac{s}{s^2+a^2}], [\sinh at, \frac{a}{s^2-a^2}], [\cosh at, \frac{s}{s^2-a^2}],$$

$$[t^n, \frac{n!}{s^{n+1}}], [e^{at}\sin bt, \frac{b}{(s-a)^2+b^2}], [e^{at}\cos bt, \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}], [t^n e^{at}, \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}]$$

ΔΕ 2^{ης} τάξης με συμμετρίες, που ανάγονται σε ΔΕ 1^{ης} τάξης

1. Συμμετρία μετατόπισης ως προς y (αμετάβλητες όταν y → y+α): $y'' = F(x, y')$
   Θέτουμε $u = y'$, $u' = y'' \Rightarrow u' = F(x, u)$
2. Συμμετρία κλίμακας ως προς y (αμετάβλητες όταν y → λy)
   Θέτουμε $Y = e^Y$, $y' = Y'e^Y$, $y'' = (Y'' + Y'^2)e^Y \Rightarrow Y'' = F(x, Y')$ (περίπτωση 1)
3. Συμμετρία μετατόπισης ως προς x (αμετάβλητες όταν x → x+α): $y'' = F(y, y')$
   (αυτόνομες εξισώσεις). Θέτουμε $u \equiv u(y) = y'$, $y'' = u\dfrac{du}{dy} \Rightarrow u\dfrac{du}{dy} = F(y, u)$
4. Συμμετρία κλίμακας ως προς x (αμετάβλητες όταν x → λx)
   Θέτουμε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}u(y)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(u\dfrac{du}{dy} - u\right)$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Θεώρημα σειρών Fourier

Εάν μια συνάρτηση $f(x)$ και η $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχείς στο $(-L,L)$, τότε το ανάπτυγμα της $f(x)$ σε σειρά Fourier στο διάστημα $(-L,L)$, είναι:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

όπου οι *συντελεστές Fourier* a_n και b_n δίνονται από:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Αν το x είναι σημείο συνέχειας της συνάρτησης, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην τιμή $f(x)$.

Αν το x είναι σημείο ασυνέχειας, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στο $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$

Εναλλακτικός τύπος συντελεστών Fourier

Αν η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$, οι συντελεστές Fourier δίνονται και από τις σχέσεις:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

όπου c είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων

Μια σειρά ημιτόνων είναι μια σειρά Fourier που περιέχει μόνο ημίτονα, στην οποία αναπτύσσεται μια περιττή συνάρτηση $f(x)$ [δηλ. $f(-x)=-f(x)$]:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\qquad \text{με}\qquad b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Μια σειρά συνημιτόνων είναι μια σειρά Fourier που περιέχει μόνο συνημίτονα, στην οποία αναπτύσσεται μια άρτια συνάρτηση $f(x)$ [δηλ. $f(-x)=f(x)$]:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\qquad \text{με}\quad a_0=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)dx\quad \text{και}\quad a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

Ταυτότητα του Parseval

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Μιγαδική μορφή σειράς Fourier

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(in\pi x/L)\qquad \text{όπου}\qquad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\exp(-in\pi x/L)dx$$