Σφάλματα μέτρησης

Γεώργιος Χ. Σακελλαρόπουλος

Καθηγητής Ιατρικής Φυσικής – Ιατρικής Πληροφορικής
Τμήμα Ιατρικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

ΜΕΤΡΗΣΗ

Διαδικασία σύγκρισης κάποιου μεγέθους με κάποιο «πρότυπο» μέγεθος

Παράδειγμα: μέτρηση ύψους κουφώματος για τοποθέτηση πόρτας.

- **Ξυλουργός (μάτι)**: 205 cm ≤ h_1 ≤ 215 cm → h_1 = (210 ± 5) cm
- **Μέτρο**: 211.25 cm ≤ h_2 ≤ 211.35 cm → h_2 = (211.30 ± 0.05) cm
- **Φυσικός** (laser): 211.3001575 cm ≤ h_3 ≤ 211.3001585 cm → h_3 = (211.3001580 ± 0.0000005) cm
- Ποια είναι η σωστή μέτρηση;
  Διαφορά στην ακρίβεια
- Ποιο είναι το ύψος του κουφώματος;
  Πρέπει να ξέρουμε σε τι μας χρειάζεται το ύψος.

ΣΦΑΛΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Η αναπόφευκτη, αριθμητικά εκφρασμένη έλλειψη ακρίβειας στη μέτρηση ενός μεγέθους σε όλα τα πειράματά μας και οι τυχόν ατέλειες και επαναληπτικότητα των οργάνων και μεθόδων μας.

«Αναπόφευκτη» από αρχή απροσδιοριστίας:
$\Delta p \cdot \Delta x \geq h/(2\pi)$ (Heisenberg), $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$ erg·sec.

τιμή ± σφάλμα

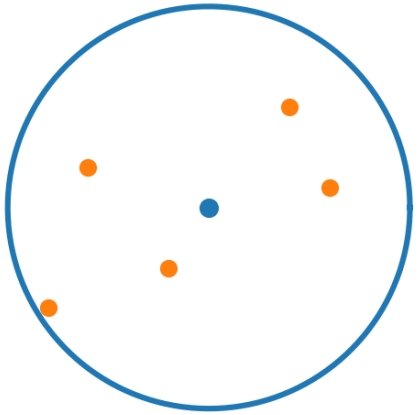
Συστηματικό σφάλμα (bias) ↔ πιστότητα ή ορθότητα (accuracy)

Τυχαίο σφάλμα (random error) ↔ ακρίβεια (precision)

ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΠΙΣΤΟΤΗΤΑ

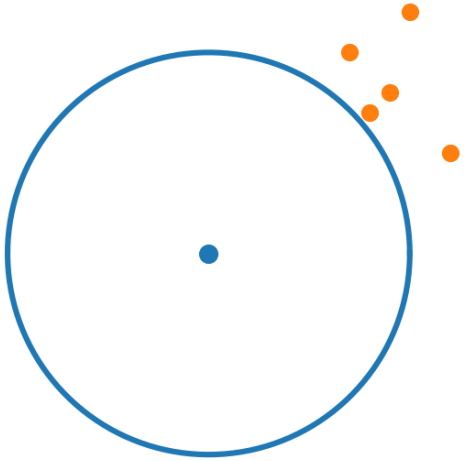
- Υψηλή πιστότητα (accuracy) ή μικρό συστηματικό σφάλμα: το κέντρο βάρους των μετρήσεων είναι κοντά στη θεωρητική τιμή (στόχος).
- Υψηλή ακρίβεια (precision) ή μικρό τυχαίο σφάλμα: οι μετρήσεις παρουσιάζουν μικρή διασπορά μεταξύ τους.

Τυχαίο ↑ Συστηματικό ↓



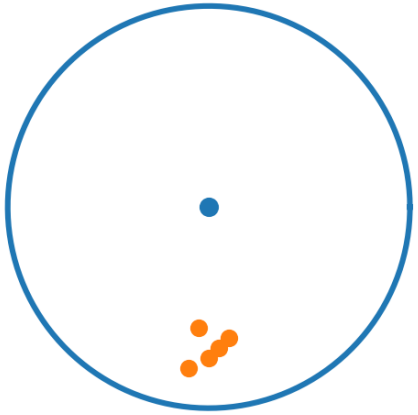
Χαμηλή ακρίβεια
Υψηλή πιστότητα

Τυχαίο ↑ Συστηματικό ↑



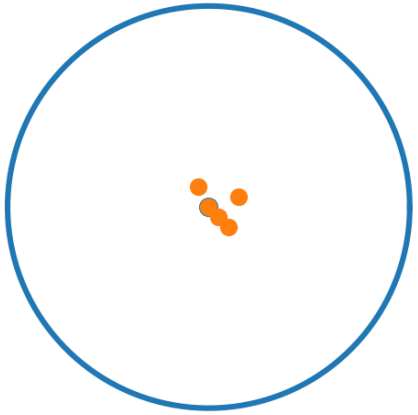
Χαμηλή ακρίβεια
Χαμηλή πιστότητα

Τυχαίο ↓ Συστηματικό ↑



Υψηλή ακρίβεια
Χαμηλή πιστότητα

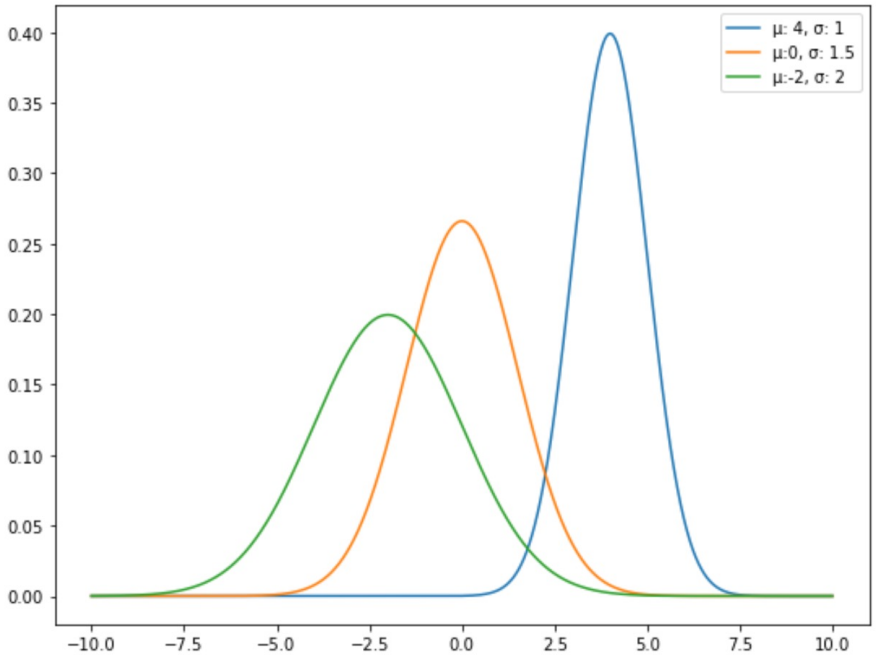
Τυχαίο ↓ Συστηματικό ↓



Υψηλή ακρίβεια
Υψηλή πιστότητα

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

- Η πραγματική κατανομή των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή ενδιαφέροντος (δλδ ο πληθυσμός των τιμών της), παραμένει άγνωστη.
- Τις περισσότερες φορές, ακολουθεί Κανονική (Normal ή Gaussian) κατανομή



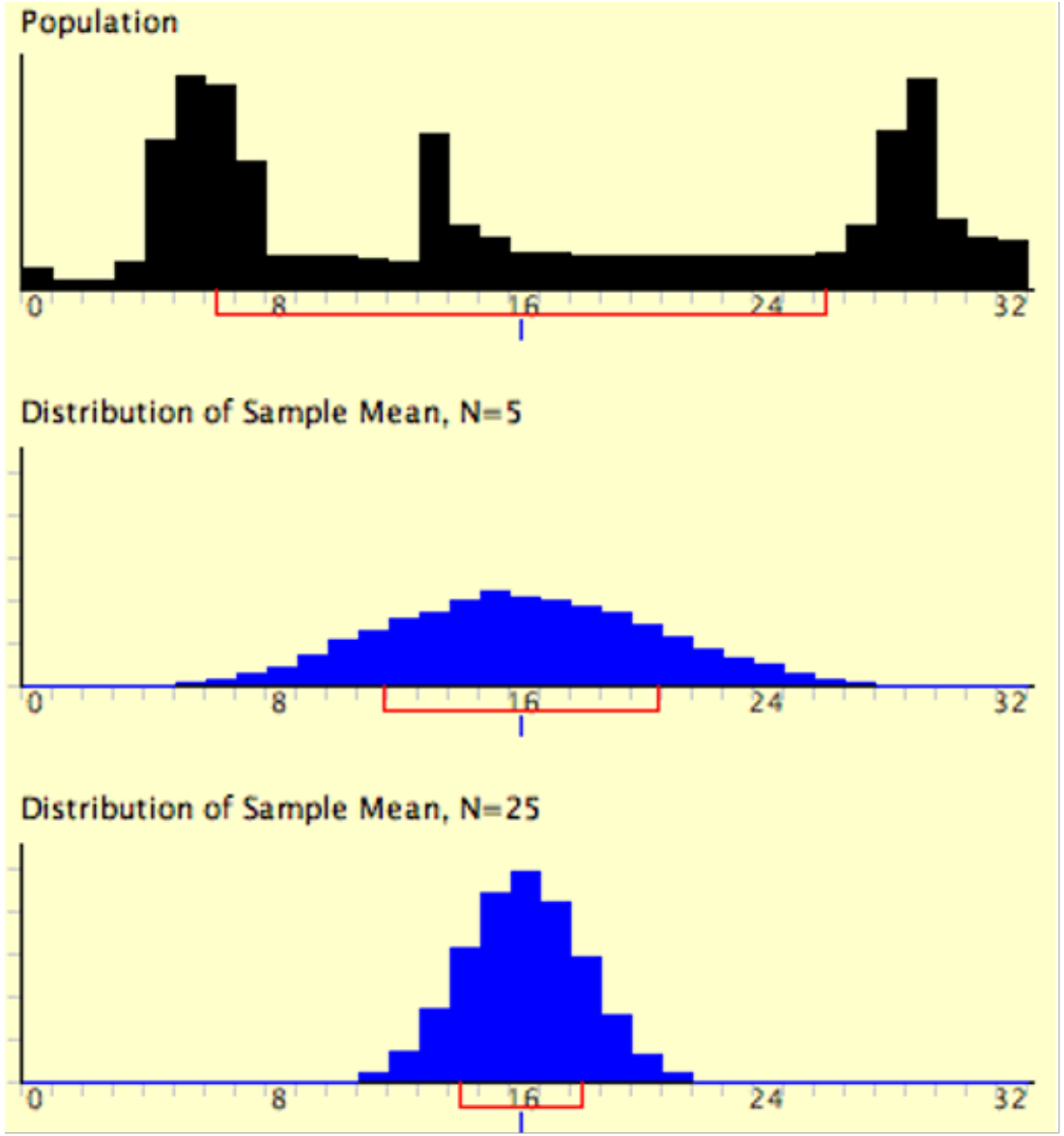
Normal Distribution Formula

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu =$ mean of x
$\sigma =$ standard deviation of x
$\pi \approx 3.14159 \ldots$
$e \approx 2.71828 \ldots$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

- Είτε η κατανομή του πληθυσμού των δυνατών τιμών της μεταβλητής ακολουθεί την κανονική κατανομή είτε όχι, έχει αποδειχθεί (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) **ότι η κατανομή των μέσων τιμών των δειγμάτων ($\bar{x}$) είναι κανονική**.
- Επιπρόσθετα, η μέση τιμή αυτής της κατανομής είναι **ίση** με τη μέση τιμή του πληθυσμού.
- Οι μετρήσεις μας αποτελούν ένα δείγμα που έχει αντληθεί από τον πληθυσμό των τιμών



ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

- Επομένως, χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή του δείγματος (δλδ των μετρήσεών μας) ως **εκτιμητή** της «πραγματικής» τιμής της μεταβλητής ενδιαφέροντος (δλδ της μέσης τιμής της κατανομής του πληθυσμού των δυνατών τιμών).
- Είναι εκτιμητής και άρα δεν ταυτίζεται με την πραγματική τιμή.
- Σφάλμα εκτίμησης $\delta\bar{x}$

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x}$$

$$\delta\bar{x} \equiv S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$\delta\bar{x}$ απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής (**N** το πλήθος των μετρήσεών μας)

$\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$ σχετικό σφάλμα μέσης τιμής

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Πλήθος σημαντικών ψηφίων: μέτρο ακρίβειας πειραματικού αποτελέσματος

- **Πρώτο** (και πλέον) σημαντικό ψηφίο: το αριστερότερο μη μηδενικό
- **Τελευταίο** (και λιγότερο) σημαντικό ψηφίο:
  - για ακέραιους, το δεξιότερο μη-μηδενικό ψηφίο
  - για δεκαδικούς, το δεξιότερο ψηφίο

Μέτρηση	Αριθμός σημαντικών ψηφίων
824,63	5
1480	3
1480,00	6
0,0058	2
0,730	3
$5{,}020 \cdot 10^{4}$	4
$6{,}00 \cdot 10^{-5}$	3

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Στόχος: έκφραση αποτελεσμάτων ως $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$.

- Υπολογίζουμε $\bar{x}$ με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια (μέγιστο αριθμό δεκαδικών ψηφίων)
- Χρησιμοποιούμε το $\bar{x}$ για τον υπολογισμό του $\delta\bar{x}$
- Επιλέγουμε τον αριθμό σημαντικών ψηφίων σύμφωνα με το πείραμά μας
  - για μικρό N (N<20), ΕΝΑ σημαντικό ψηφίο *(εκτός αν αυτό το ψηφίο είναι ο αριθμός 1 ή ο αριθμός 2 , οπότε επιλέγουμε ΔΥΟ σημαντικά ψηφία)*.
  - για μεγάλο N (N>20), ΔΥΟ σημαντικά ψηφία.
- **Στρογγυλοποιούμε το σφάλμα πρώτα**, και κατόπιν εκφράζουμε τη μέση τιμή με την ίδια ακρίβεια

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Στόχος: έκφραση αποτελεσμάτων ως $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$.

- Υπολογίζουμε $\bar{x}$ με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια (μέγιστο αριθμό δεκαδικών ψηφίων)
- Χρησιμοποιούμε το $\bar{x}$ για τον υπολογισμό του $\delta\bar{x}$.
- Επιλέγουμε τον αριθμό σημαντικών ψηφίων σύμφωνα με το πείραμά μας
  - για μικρό N (N<20), ΕΝΑ σημαντικό ψηφίο *(εκτός αν αυτό το ψηφίο είναι ο αριθμός 1 ή ο αριθμός 2 , οπότε επιλέγουμε ΔΥΟ σημαντικά ψηφία)*.
  - για μεγάλο N (N>20), ΔΥΟ σημαντικά ψηφία.
- **Στρογγυλοποιούμε το σφάλμα πρώτα**, και κατόπιν εκφράζουμε τη μέση τιμή με την ίδια ακρίβεια.

Παράδειγμα (N<20):

Μέση τιμή $\bar{x} = 2357.46$ m/s

Σφάλμα $\delta\bar{x}=58.432$ m/s → 2360±60 m/s.

Μέση τιμή $\bar{x} = 43.03149$ sec

Σφάλμα $\delta\bar{x}=0.0129$ sec → 43.031±0.013 sec

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στόχος: έκφραση αποτελεσμάτων ως $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$.

- Υπολογίζουμε $\bar{x}$ με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια (μέγιστο αριθμό δεκαδικών ψηφίων)
- Χρησιμοποιούμε το $\bar{x}$ για τον υπολογισμό του $\delta\bar{x}$.
- Επιλέγουμε τον αριθμό σημαντικών ψηφίων σύμφωνα με το πείραμά μας
  - για μικρό N (N<20), ΕΝΑ σημαντικό ψηφίο *(εκτός αν αυτό το ψηφίο είναι ο αριθμός 1 ή ο αριθμός 2 , οπότε επιλέγουμε ΔΥΟ σημαντικά ψηφία)*.
  - για μεγάλο N (N>20), ΔΥΟ σημαντικά ψηφία.
- **Στρογγυλοποιούμε το σφάλμα πρώτα**, και κατόπιν εκφράζουμε τη μέση τιμή με την ίδια ακρίβεια.

	Πριν την επιλογή σημαντικών ψηφίων		Μετά την επιλογή σημαντικών ψηφίων		Τελικό αποτέλεσμα
No.	**$\bar{x}$**	**δx**	**δx**	**$\bar{x}$**	**x**
1	263.2765	0.07813	0.08	263.28	263.28±0.08
2	12.2	0.03116	0.03	12.20	12.20±0.03
3	127.187	0.932	0.9	127.2	127.2±0.9
4	17.2362	0.232	0.23	17.24	17.24±0.23
5	1563	33.62	30	1560	1560±30
6	178936	589	600	178900	178900±600
7	11002380	9873	10000	11002000	11002000±10000
8	78654	2486	2500	78700	78700±2500
9	135067	1897	1900	135100	135100±1900

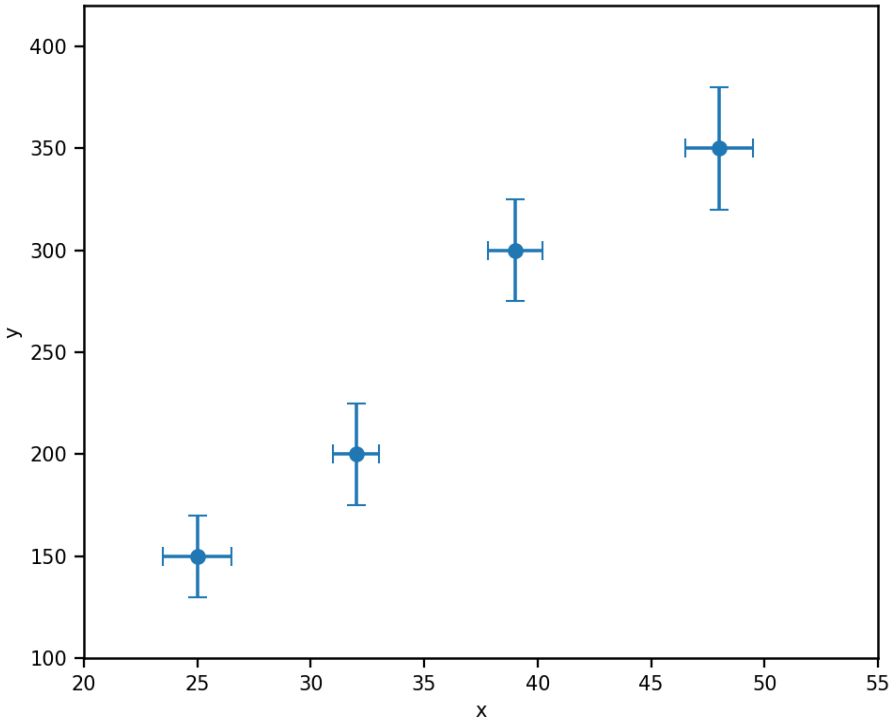
ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

- Λήψη μετρήσεων. Υπολογισμός εύρους μετρήσεων.
- Τοποθέτηση σημείου αρχής αξόνων με βάση το εύρος τιμών. Υποδιαιρέσεις στους άξονες με βάση την ακρίβεια μέτρησης.
- Τοποθέτηση πειραματικών σημείων με τα σφάλματά τους.
- Χαρτί «μιλιμετρέ».
- Δεν ενώνουμε τα διαδοχικά σημεία με ευθύγραμμα τμήματα.
- Δεν σημειώνουμε τις πειραματικές τιμές στους άξονες.

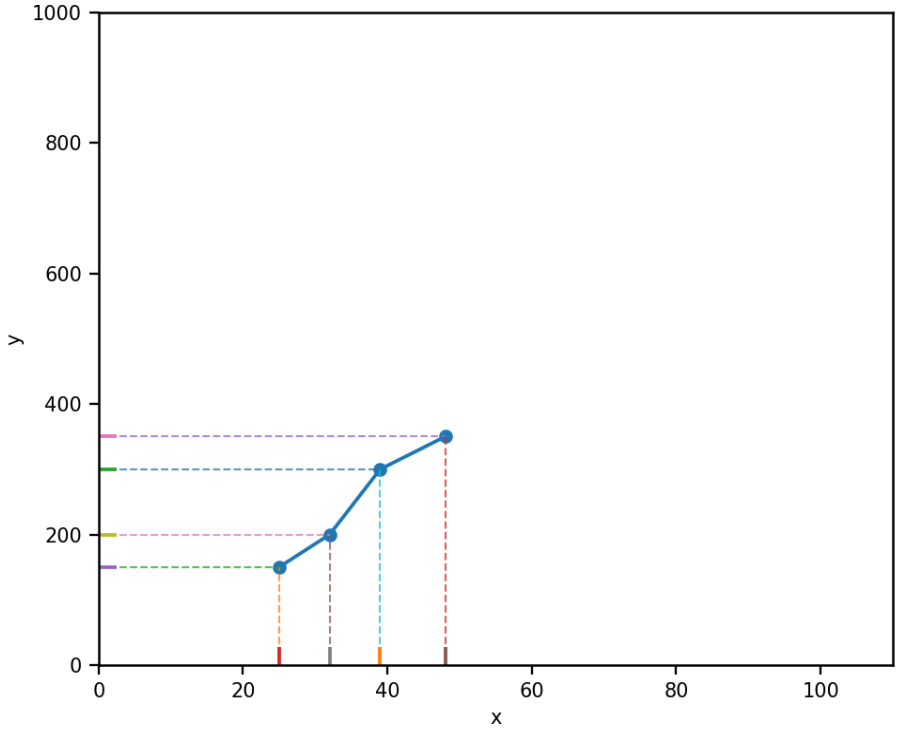
ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

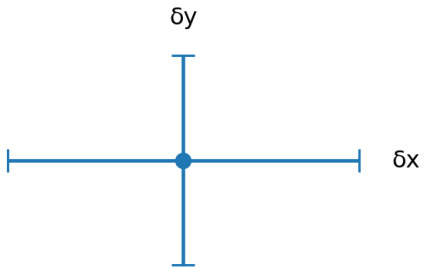
- Λήψη μετρήσεων. Υπολογισμός εύρους μετρήσεων.
- Τοποθέτηση σημείου αρχής αξόνων με βάση το εύρος τιμών. Υποδιαιρέσεις στους άξονες με βάση την ακρίβεια μέτρησης.
- Τοποθέτηση πειραματικών σημείων με τα σφάλματά τους.
- Χαρτί «μιλιμετρέ».
- Δεν ενώνουμε τα διαδοχικά σημεία με ευθύγραμμα τμήματα.
- Δεν σημειώνουμε τις πειραματικές τιμές στους άξονες.

ΣΩΣΤΟ



ΛΑΘΟΣ





ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Χάραξη καμπύλης με το μάτι:

- Επιδιώκουμε η καμπύλη να περάσει κοντά στα σημεία και μέσα από τις γραμμές των σφαλμάτων.
- Επιδιώκουμε να βρίσκεται ίσος αριθμός πειραματικών μετρήσεων «πάνω» και «κάτω» από την καμπύλη.

ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

$$\sum (y_{exp} - y_{model})^2 = \min$$

Για την ευθεία

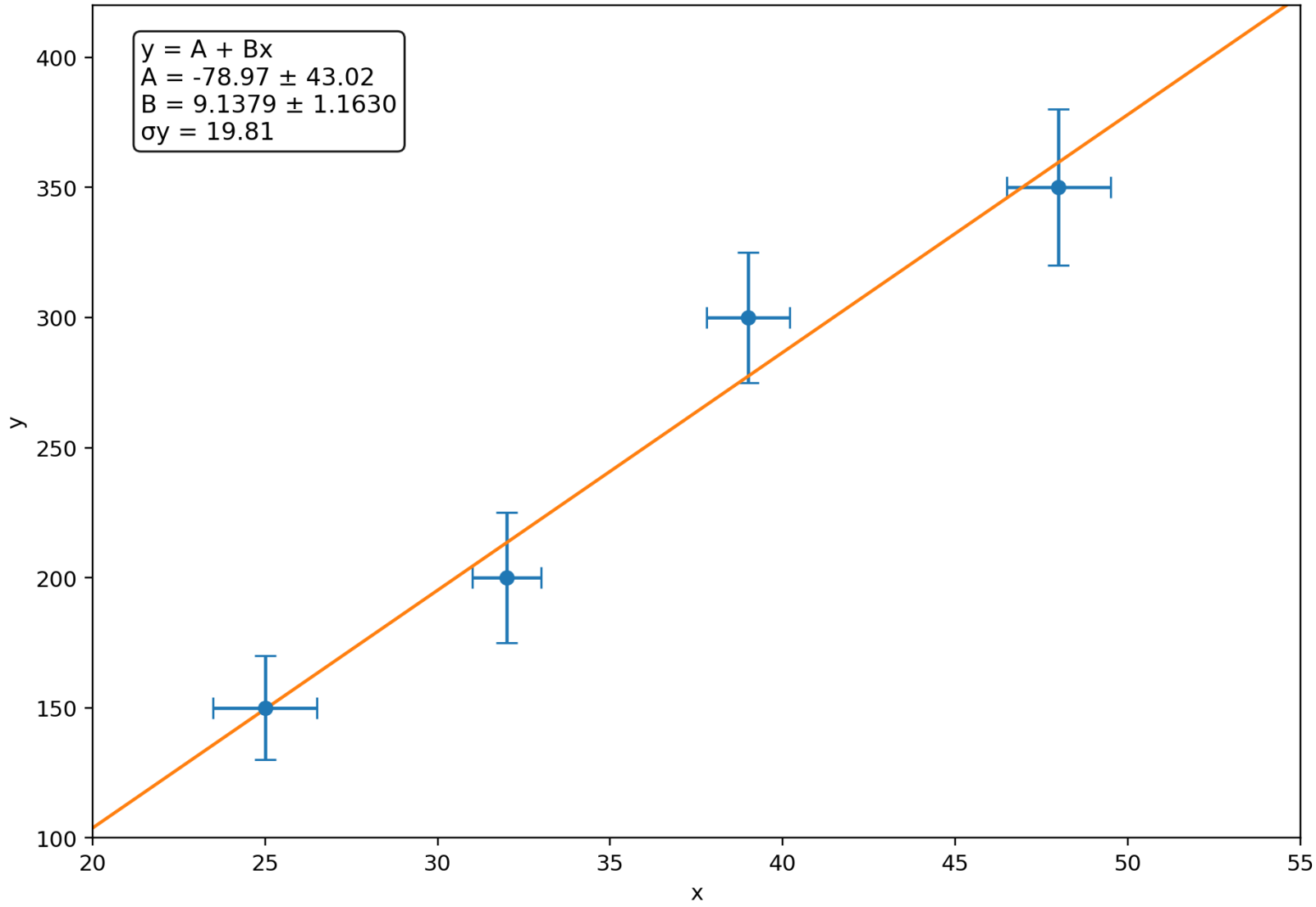
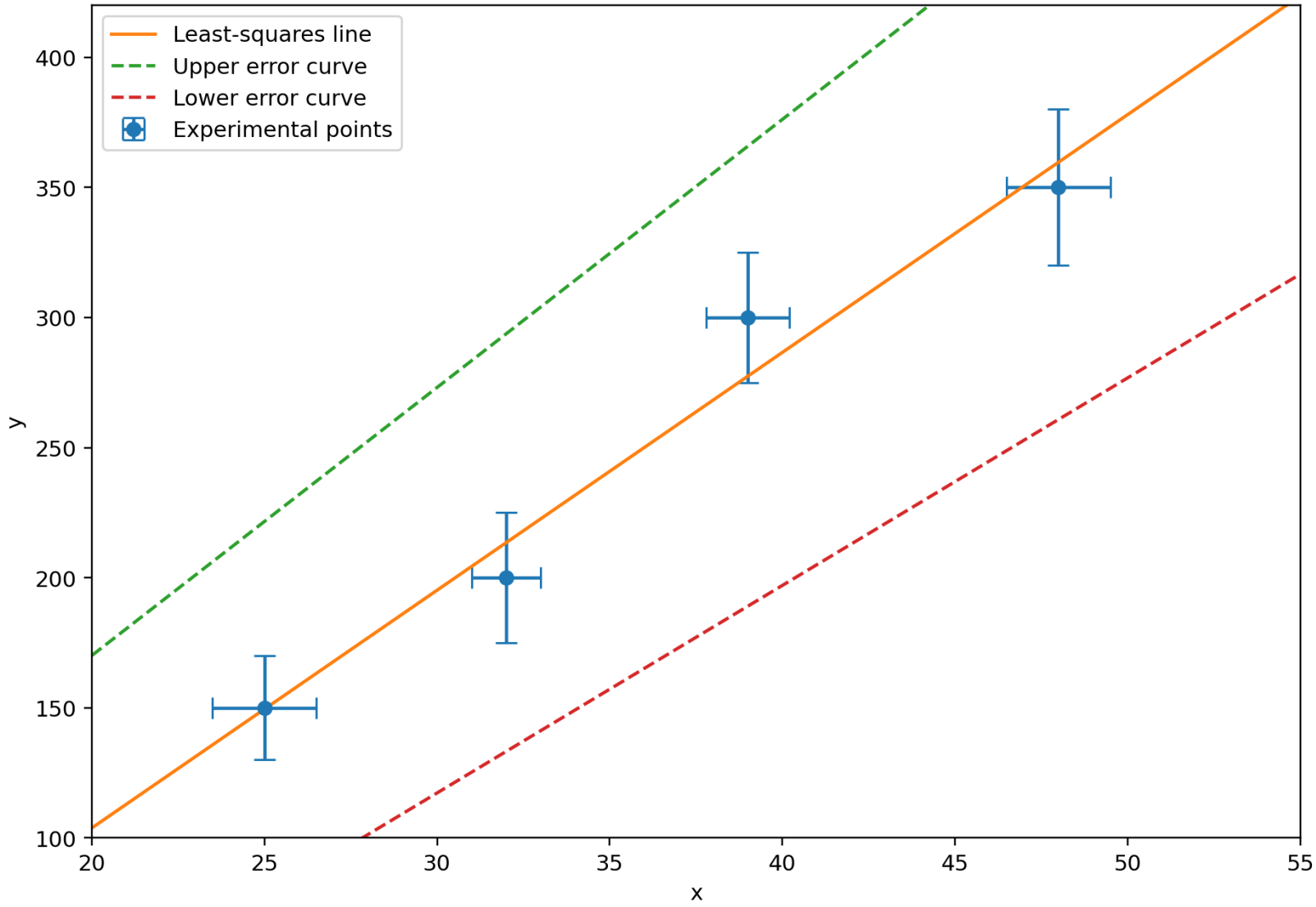
$$y = A + B \cdot x$$

$$A = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum (x_i y_i)}{D} \qquad \delta A = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}}$$

$$B = \frac{N \cdot \sum (x_i y_i) - \sum x_i \cdot \sum y_i}{D} \qquad \delta B = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{N}{D}}$$

$$D = N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - A - B x_i)^2}{N - 2}}$$

ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ



ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ