Πιθανογεννήτριες, Ροπογεννήτριες

Χριστόφορος Ραπτόπουλος και Σωτήρης Νικολετσέας

Απρίλιος 2018

Περιεχόμενα

1. Ροπές Moments - Διάφορα είδη

- ν-οστή ροπή περί την τιμή α: $\alpha_\nu = E\left[(X-\alpha)^\nu\right]$
- ν-οστή ροπή περί την αρχή: $\mu'_\nu = E\left[X^\nu\right]$
- ν-οστή ροπή περί τη μέση τιμή: $\mu_\nu = E\left[(X-\mu)^\nu\right]$
- ν-οστή παραγοντική ροπή:
  $E\left[X^{\underline{\nu}}\right] = E\left[X\cdot(X-1)\cdots(X-\nu+1)\right]$

οπότε

- μέση τιμή: 1η ροπή περί την αρχή
- διασπορά: 2η ροπή περί τη μέση τιμή

1. Ροπές Moments

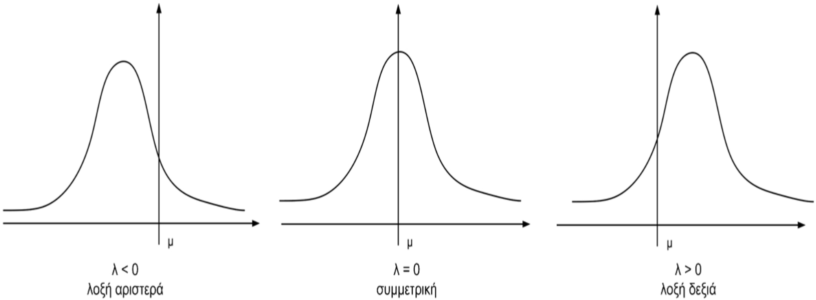
Συντελεστής λοξότητας:

$$\lambda = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

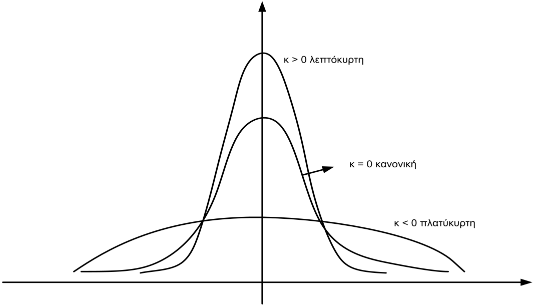
Συντελεστής κύρτωσης:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] - 3$$

1. Ροπές Moments



1. Ροπές Moments



2. Γενικά για γεννήτριες συναρτήσεις

Ορισμός

$< g_n >= g_0,\ \ g_1,\ \ \cdots\ \ g_n, \cdots$

$$\Rightarrow G(z) = g_0 + g_1 \cdot z + g_2 \cdot z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^n$$

π.χ. $< g_n >= 1 \Rightarrow G(z) = \sum_n z^n = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$

2. Γενικά για γεννήτριες συναρτήσεις

Σημασία:

Μια πυκνή αναραπαράσταση της ακολουθίας που την καθορίζει μονοσήμαντα

Δηλαδή $F(z) = G(z) \Leftrightarrow f_n = g_n, \forall n$

Αν ξέρουμε την γεννήτρια, μπορούμε να βρούμε την ακολουθία αφού g_n είναι ο συντελεστής του z^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας σε σειρά

2. Μερικές Ιδιότητες

- (άθροισμα) $f_n + g_n \Leftrightarrow F(z) + G(z)$
- (ολίσθηση)
  $c^n \cdot g_n \Leftrightarrow G(c \cdot z)$ $\qquad$ ($c = -1 \Rightarrow$ εναλλασσόμενα πρόσημα)
- convolution (συνέλιξη):

$$\begin{array}{llll} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ g_0 & g_1 & g_2 & \cdots \end{array} \qquad h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot g_{n-k} \Leftrightarrow F(z) \cdot G(z)$$

- άθροισμα πρώτων όρων ακολουθίας (συνέλιξη με 1):
  $$\sum_{k=0}^{n} f_k \Leftrightarrow F(z) \cdot \frac{1}{1-z}$$

2. Ένα παράδειγμα

Να βρεθεί η ακολουθία που έχει ως γεννήτρια της την $G(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

2. Ένα παράδειγμα

Να βρεθεί η ακολουθία που έχει ως γεννήτρια της την
$G(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

<u>Λύση (α′ τρόπος):</u>

$$G(z) = (-z+1)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-z)^n \cdot 1^{-2-n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-1)^n \cdot z^n$$

Άρα

$$\begin{aligned} g_n &= \binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{(-2)(-3)\dots(-2-n+1)}{n!}(-1)^n = \\ &= \frac{(-2)(-3)\dots(-n-1)}{n!}(-1)^n = \\ &= \frac{2\cdot 3\cdot \dots \cdot n\cdot (n+1)}{n!} = n+1 \end{aligned}$$

2. Ένα παράδειγμα - Συνέχεια

2. Ένα παράδειγμα - Συνέχεια

<u>β ′ τρόπος:</u> $G(z) = \dfrac{1}{1-z} \cdot \dfrac{1}{1-z}$ άρα είναι η συνέλιξη της $f_n =< 1, 1, \cdots >$ με την $f_n =< 1, 1, \cdots >$. Άρα

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot f_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n + 1$$

2. Ένα παράδειγμα - Συνέχεια

<u>β΄ τρόπος:</u> $G(z) = \dfrac{1}{1-z} \cdot \dfrac{1}{1-z}$ άρα είναι η συνέλιξη της $f_n =< 1, 1, \cdots >$ με την $f_n =< 1, 1, \cdots >$. Άρα

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot f_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n + 1$$

<u>Επαλήθευση:</u> $g_n = n + 1 =< 1, 2, 3, \cdots > \quad \Rightarrow$

$$G(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots$$

Αλλά $\quad 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-z}$

Παραγωγίζοντας: $\quad 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

2. Άλλο ένα παράδειγμα

Να βρεθεί η γεννήτρια της $g_n = 2^n =< 1, 2, 4, 8, \cdots >$

2. Άλλο ένα παράδειγμα

Να βρεθεί η γεννήτρια της $g_n = 2^n =< 1, 2, 4, 8, \cdots >$

Λύση:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}$$

2. Άλλο ένα παράδειγμα

Να βρεθεί η γεννήτρια της $g_n = 2^n = < 1, 2, 4, 8, \cdots >$

Λύση:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}$$

άλλος τρόπος:

Απευθείας από την ιδιότητα $\quad c^n \cdot g_n \Leftrightarrow G(cz)$

για $c = 2$ και $g_n = 1 \quad \Rightarrow \qquad G(2z) = \dfrac{1}{1-2z}$

3. Πιθανογεννήτριες

Ορισμός

$$\Pi(z) = E\left[z^X\right] = \sum_x z^x \cdot Pr\{X = x\}$$

3. Πιθανογεννήτριες

Ορισμός

$$\Pi(z) = E\left[z^X\right] = \sum_x z^x \cdot Pr\{X = x\}$$

Χρήσιμες Ιδιότητες

- $\Pi'(z) = \sum_x x \cdot z^{x-1} \cdot Pr\{X = x\}$

  $\Rightarrow \Pi'(1) = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\}$ δηλαδή $\Pi'(1) = E(X)$

- $\sigma^2 = \Pi''(1) + \Pi'(1) - \left(\Pi'(1)\right)^2$

3. Πιθανογεννήτριες

Διωνυμική

$$Pr\{X = x\} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{x=0}^{n} z^x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot (pz)^x \cdot q^{n-x} = (p \cdot z + q)^n$$

$$\Rightarrow \Pi'(1) = n \cdot (p \cdot z + q)^{n-1} \cdot p|_{z=1} = n \cdot (p \cdot 1 + q)^{n-1} \cdot p = n \cdot p$$

3. Ροπογεννήτριες

Ορισμός

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x} e^{tx} \cdot Pr\{X = x\}$$

Στη συνεχή περίπτωση: $M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

Παρατήρηση: πρόκειται όχι για αριθμό αλλά για συνάρτηση μιας παραμέτρου t.

3. Ροπογεννήτριες - Εξήγηση ονομασίας

Είναι: $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot f(x)$$

Παραγωγίζοντας:

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx} f(x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt}\left[e^{tx} f(x)\right] \Rightarrow$$

$$M'(t) = \sum_x x \cdot e^{tx} \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow M'(0) = \sum_x x \cdot f(x) = E(X)$$

Δηλαδή, η τιμή της πρώτης παραγώγου της ροπογεννήτριας στο 0 είναι η μέση τιμή (δηλαδή η ροπογεννήτρια "γεννά" την πρώτη ροπή).

3. Ροπογεννήτριες - Εξήγηση ονομασίας (2)

Ομοίως: $$M''(t) = \sum_x x^2 \cdot e^{tx} \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow M''(0) = E(X^2)$$

και γενικά η n−οστή παράγωγος γεννά την n−οστή ροπή περί την αρχή.

Παρατήρηση: Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν στη γενική περίπτωση.

4. Γεννήτριες Αθροισμάτων

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{X},\ \mathrm{Y}\ \text{ανεξάρτητες} \\ \mathrm{X} \Leftrightarrow \Pi_1(z),\ \ M_1(t) \\ \mathrm{Y} \Leftrightarrow \Pi_2(z),\ \ M_2(t) \end{array}\right\} : \mathrm{X}+\mathrm{Y} \Leftrightarrow \Pi_1(z)\Pi_2(z) \text{ και } M_1(t)M_2(t)$$

Απόδειξη (για ροπογεννήτριες):

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}]$$

Λόγω της ανεξαρτησίας είναι:

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}] = M_X(t) \cdot M_Y(t) \qquad \square$$

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση:

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

<u>Απάντηση</u>: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$\Pi_i(z) =$

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

<u>Απάντηση</u>: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) =$$

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) $=$?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(z + z^2 + \cdots + z^6\right)\right]^4$$

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

<u>Απάντηση</u>: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(z + z^2 + \cdots + z^6\right)\right]^4$$

Άρα P =

5. Παράδειγμα 1

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

<u>Απάντηση:</u> Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(z + z^2 + \cdots + z^6\right)\right]^4$$

Άρα P = ο συντελεστής του z^{17}

Υπολογισμός συντελεστή του z^{17}

$$\Pi(z) = \frac{1}{6^4} \cdot z^4 \cdot (1 + z + \cdots + z^5)^4 = \frac{1}{6^4} \cdot z^4 \cdot \left(\frac{1 - z^6}{1 - z}\right)^4$$

Αλλά $A = (1 - z^6)^4 = 1 - 4z^6 + 6z^{12} - 4z^{18} + z^{24}$

και $\quad B = (1 - z)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \cdot (-z)^n \cdot 1^{-4-n} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)(-5)\ldots(-4-n+1)}{n!} (-1)^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) z^n$$

Στο γινόμενο $A \cdot B$ ο συντελεστής του z^{13} είναι:

$$1 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 - 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 104$$

Τελικά, ο συντελεστής του z^{17}είναι $\dfrac{104}{6^4}$

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση: $M(t) = E\left[e^{tX}\right] =$

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση: $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u>

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u> $M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x} e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση</u>: $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

Μέσω της ροπογεννήτριας: $M'(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} + \frac{5}{3} \cdot e^{5t}$

5. Παράδειγμα 2

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u>
$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

Μέσω της ροπογεννήτριας: $M'(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} + \frac{5}{3} \cdot e^{5t}$
$$\Rightarrow E(X) = M'(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6}$$

5. Παράδειγμα 3

Έστω $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια της τ.μ. X. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της $Y = \alpha X + \beta$.

5. Παράδειγμα 3

Έστω $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια της τ.μ. X. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της $Y = \alpha X + \beta$.

Λύση: $M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t(\alpha X+\beta)}\right] =$

5. Παράδειγμα 3

Έστω $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια της τ.μ. X. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της $Y = \alpha X + \beta$.

Λύση:
$$M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t(\alpha X+\beta)}\right] =$$
$$= E\left[e^{t\cdot\alpha X} \cdot e^{t\cdot\beta}\right] = e^{t\cdot\beta} \cdot E\left[e^{t\cdot\alpha X}\right] =$$

5. Παράδειγμα 3

Έστω $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια της τ.μ. X. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της $Y = \alpha X + \beta$.

Λύση:
$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t(\alpha X+\beta)}\right] = \\
&= E\left[e^{t\cdot\alpha X}\cdot e^{t\cdot\beta}\right] = e^{t\cdot\beta}\cdot E\left[e^{t\cdot\alpha X}\right] = \\
&= e^{t\cdot\beta}M_X(\alpha t)
\end{aligned}
$$

5. Παράδειγμα 4
(Εύρεση κατανομής πιθανότητας από τη ροπογεννήτρια)

Η τ.μ. Χ έχει ροπογεννήτρια $M(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot e^{4t} + \frac{1}{8} \cdot e^{5t}$
Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας.

5. Παράδειγμα 4
(Εύρεση κατανομής πιθανότητας από τη ροπογεννήτρια)

Η τ.μ. X έχει ροπογεννήτρια $M(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot e^{4t} + \frac{1}{8} \cdot e^{5t}$
Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας.

Λύση:

5. Παράδειγμα 4
(Εύρεση κατανομής πιθανότητας από τη ροπογεννήτρια)

Η τ.μ. Χ έχει ροπογεννήτρια $M(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot e^{4t} + \frac{1}{8} \cdot e^{5t}$
Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας.

<u>Λύση</u>:

Η ροπογεννήτρια είναι γενικά: $M(t) = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\}$

5. Παράδειγμα 4 (Εύρεση κατανομής πιθανότητας από τη ροπογεννήτρια)

Η τ.μ. Χ έχει ροπογεννήτρια $M(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot e^{4t} + \frac{1}{8} \cdot e^{5t}$

Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας.

<u>Λύση</u>:

Η ροπογεννήτρια είναι γενικά: $M(t) = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\}$

Άρα (μέσω "pattern matching") είναι:

$$Pr\{X = -1\} = \frac{1}{4}$$

$$Pr\{X = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$Pr\{X = 4\} = \frac{1}{8}$$

$$Pr\{X = 5\} = \frac{1}{8}$$