

1. Θεωρείστε τον διανυσματικό χώρο των μητρώων 3×3 . Ποια είναι η διάστασή του; Μπορείτε να βρείτε μια βάση; Το σύνολο όλων των συμμετρικών μητρώων 3×3 είναι υπόχωρος; Το σύνολο όλων των άνω τριγωνικών μητρώων 3×3 είναι υπόχωρος; Μπορείτε να βρείτε έναν υπόχωρο που να περιέχεται και στους δύο αυτούς υπόχωρους; Μπορείτε να βρείτε μια βάση και την διάσταση όλων αυτών των υποχώρων;

2. Δείξτε ότι το μητρώο $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιο, δηλαδή ότι $AA^T = A^T A = I$, όπου I το 2×2

ταυτοτικό μητρώο. Υπολογίστε την ορίζουσα του A . Είναι το A αντισυμμετρικό μητρώο;

3. Θεωρείστε τον χώρο R^2 (επίπεδο). (α) Βρείτε το μητρώο προβολής P_1 στην ευθεία του διανύσματος $(1,3)$ καθώς και το μητρώο προβολής P_2 στην κάθετη ευθεία. Υπολογίστε τα $P_1 + P_2$ και $P_1 P_2$ και εξηγήστε τα αποτελέσματα. (β) Βρείτε το 2×2 μητρώο προβολής στην ευθεία $x+y=0$.

4. Θεωρείστε τον τριδιάστατο χώρο R^3 . (α) Βρείτε το μητρώο προβολής P_{xy} στο επίπεδο xy , θεωρώντας σαν βάση του επιπέδου τα διανύσματα $(1,1,0)$ και $(2,3,0)$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο αποτέλεσμα που είδαμε στο μάθημα παίρνοντας την βάση $(1,0,0)$ και $(0,1,0)$. (β) Βρείτε το μητρώο προβολής στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα $(1,1,0)$ και $(1,1,1)$.

5. Από τον ορισμό ενός μητρώου προβολής $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, δείξτε ότι (α) $P^2 = P$ και (β) $P^T = P$.

6. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των οριζουσών (κανόνα του Cramer), δείξτε ότι η λύση του συστήματος των τριών εξισώσεων: $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3$, $x_2 + 3x_3 = -1$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = -1$.

7. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απαλοιφής Gauss, δείξτε ότι η λύση του συστήματος των τριών εξισώσεων: $2x_1 - 3x_2 = 3$, $4x_1 - 5x_2 + x_3 = 7$, $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5$, είναι $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$.

8. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του μητρώου $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Επαληθεύστε ότι το άθροισμα των

ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του μητρώου (δηλ. το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του) και το γινόμενο των ιδιοτιμών με την ορίζουσα του μητρώου. Δείξτε ότι τα ιδιοανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

9. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα των μητρώων $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.