
5

Αεροδυναμική Πτέρυγας

Περιεχόμενα

5	Αεροδυναμική Πτέρυγας	140
5.1	Γεωμετρία Πτέρυγας	142
5.2	Η Ροή γύρω από Πτέρυγα	150
5.3	Επαγόμενη Αντίσταση	152
5.4	Θεωρία Γραμμής Άντωσης ("Lifting line")	154
5.4.1	Ελλειπτική Κατανομή της Άντωσης.....	160
5.4.2	Γενική Περίπτωση για την Κατανομή Κυκλοφορίας $\Gamma(y)$	165
5.4.2.1	Υπολογισμός της Άντωσης	167
5.4.2.2	Υπολογισμός της Επαγόμενης Αντίστασης	168
5.4.3	Σύγκριση συντελεστών άντωσης στις δυο και τρεις διαστάσεις	174
5.5	Ολική Αντίσταση Πτέρυγας.....	176
5.6	Αεροδυναμικές Επεμβάσεις στην Πτέρυγα	177
5.6.1	Ακροπτερύγια ("winglets") για την μείωση της επαγόμενης αντίστασης 178	
5.6.2	Διατάξεις ελέγχου του οριακού στρώματος για την αποφυγή αποκόλλησης	179
5.6.3	Άλλες διατάξεις.....	182
5.7	Παραδείγματα – Ασκήσεις.....	183
5.7.1	Αεροδυναμική ανάλυση ελλειπτικής πτέρυγας	183
5.7.2	Κλίση της καμπύλης $C_L - \alpha$ σε ελλειπτική πτέρυγα	185
5.7.3	Εφαρμογή θεωρίας γραμμής άντωσης για ορθογωνική πτέρυγα	188

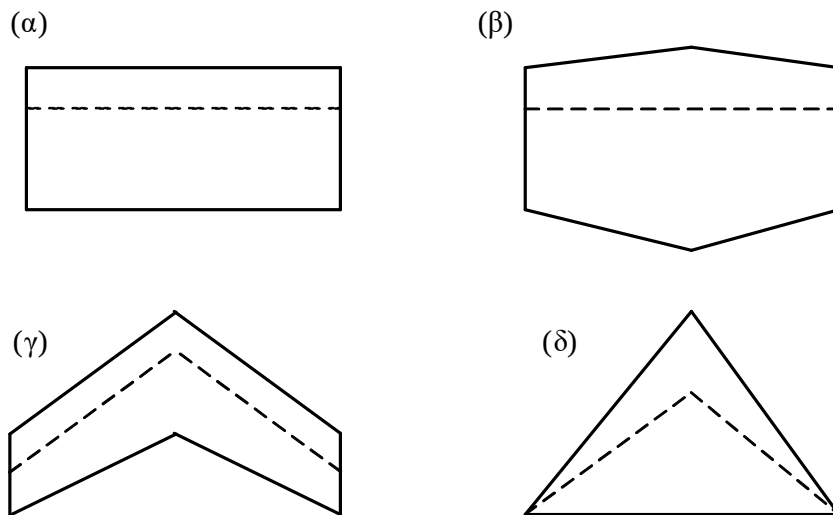
5.7.4	Επίδραση του εδάφους στο κατώρευμα πτέρυγας.....	191
	Βιβλιογραφία	195

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή ή η μετάφραση όλου ή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου και με οποιοδήποτε τρόπο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας αεροσκάφους. Κατόπιν θα προχωρήσουμε στην μελέτη της αεροδυναμικής συμπεριφοράς της με έμφαση στη λεγόμενη επαγόμενη αντίσταση. Επίσης, θα παρουσιαστούν διατάξεις που προστίθενται στην πτέρυγα με σκοπό τη βελτίωση των αεροδυναμικών της χαρακτηριστικών.

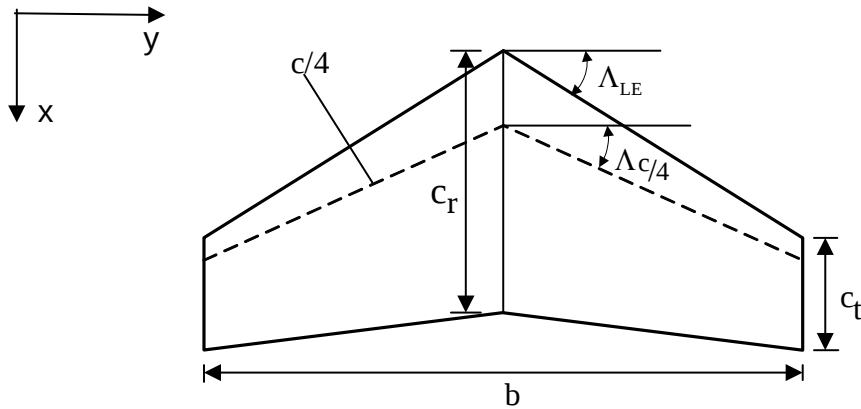
5.1 Γεωμετρία Πτέρυγας

Η ροή γύρω από την πτέρυγα έχει τρισδιάστατο χαρακτήρα με ισχυρούς στρόβιλους στα άκρα της. Οι στρόβιλοι αυτοί αυξάνουν την οπισθέλκουσα. Η θεωρία της *Γραμμής Άντωσης* που παρουσιάζεται εδώ υπολογίζει την αντίσταση αυτή. Υπάρχουν διάφορων ειδών πτέρυγες ανάλογα με την μορφή της κάτοψής τους. Στο Σχήμα 5.1 απεικονίζονται μερικά είδη πτερύγων.



Σχήμα 5.1: Τύποι πτερύγων με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους: (α) Ορθογωνική πτέρυγα ("Rectangular wing"), (β) τραπεζοειδής πτέρυγα ("Tapered wing"), (γ) οπισθοκλινής πτέρυγα ("Swept back wing"), και (δ) πτέρυγα τύπου "Δέλτα" ("Delta wing"). Η διακεκομμένη γραμμή απεικονίζει τις θέσεις του τέταρτου των τοπικών χορδών ($c / 4$).

Στο Σχήμα 5.2 παρίστανται μια οπισθοκλινής πτέρυγα και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της τα οποία περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω.



Σχήμα 5.2: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά πτέρυγας.

- (i) *Επιφάνεια της πτέρυγας ("Wing Area").*

Η επιφάνεια της πτέρυγας (S) είναι η επιφάνεια της κάτοψής της.

- (ii) *Εκπέτασμα της Πτέρυγας ("Wing Span").*

Το εκπέτασμα (b) είναι η απόσταση μεταξύ των δυο άκρων της πτέρυγας μετρημένη κάθετα στον διαμήκη άξονα του αεροσκάφους.

- (iii) *Λόγος Επιμήκους της Πτέρυγας ("Wing Aspect Ratio").*

Ο λόγος επιμήκους (A) ορίζεται ως:

$$A \equiv \frac{b^2}{S} \quad (5.1)$$

Ο λόγος αυτός επίσης ονομάζεται *λόγος εκπετάσματος* ή και *λόγος διατάματος*.

- (iv) *Μέση Γεωμετρική Χορδή της Πτέρυγας ("Mean Geometric Chord").*

Η Μέση Γεωμετρική Χορδή της πτέρυγας (c_g) ορίζεται ως η χορδή μιας αντίστοιχης ορθογωνικής πτέρυγας που έχει το ίδιο εκπέτασμα b και την ίδια επιφάνεια S με την πραγματική πτέρυγα.

$$c_g = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} c(y) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} dy} = \frac{2}{b} \int_0^{b/2} c(y) dy = \frac{S}{b} \quad (5.2)$$

(v) *Μέση Αεροδυναμική Χορδή της Πτέρυγας ("Mean Aerodynamic Chord").*

Η Μέση Αεροδυναμική Χορδή της Πτέρυγας (c_{mac}) ορίζεται από τη σχέση:

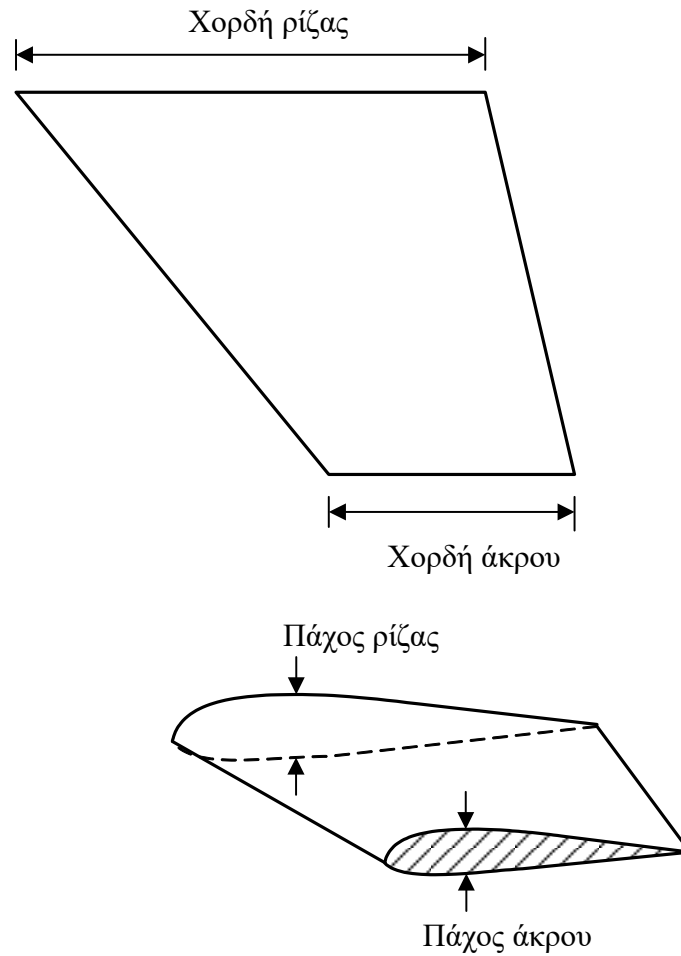
$$c_{mac} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [c(y)]^2 dy \quad (5.3)$$

Η μέση αεροδυναμική χορδή είναι σημαντικό μέγεθος για την ανάλυση ευστάθειας ενός αεροσκάφους. Ο λόγος είναι ότι η θέση του αεροδυναμικού κέντρου της πτέρυγας είναι περίπου στο τέταρτο της μέσης αεροδυναμικής χορδής ($X_{ac} \approx c_{mac}/4$). Ανάλογο αποτέλεσμα είχε βρεθεί και για την αεροτομή, όπου είχε αποδειχθεί πως το αεροδυναμικό κέντρο βρίσκεται στο τέταρτο της χορδής. Για αυτόν τον λόγο, η c_{mac} είναι το χαρακτηριστικό μήκος που χρησιμοποιείται πιο συχνά στον ορισμό της ροπής πρόνευσης της πτέρυγας:

$$C_M \equiv \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \cdot c_{mac}}$$

(vi) *Εκλέπτυνση της Πτέρυγας ("Wing Taper")*

Η εκλέπτυνση της πτέρυγας (λ) είναι η μείωση της χορδής και του πάχους της τοπικής αεροτομής της καθώς προχωρούμε από τη ρίζα της πτέρυγας προς τα άκρα της (Σχήμα 5.3).

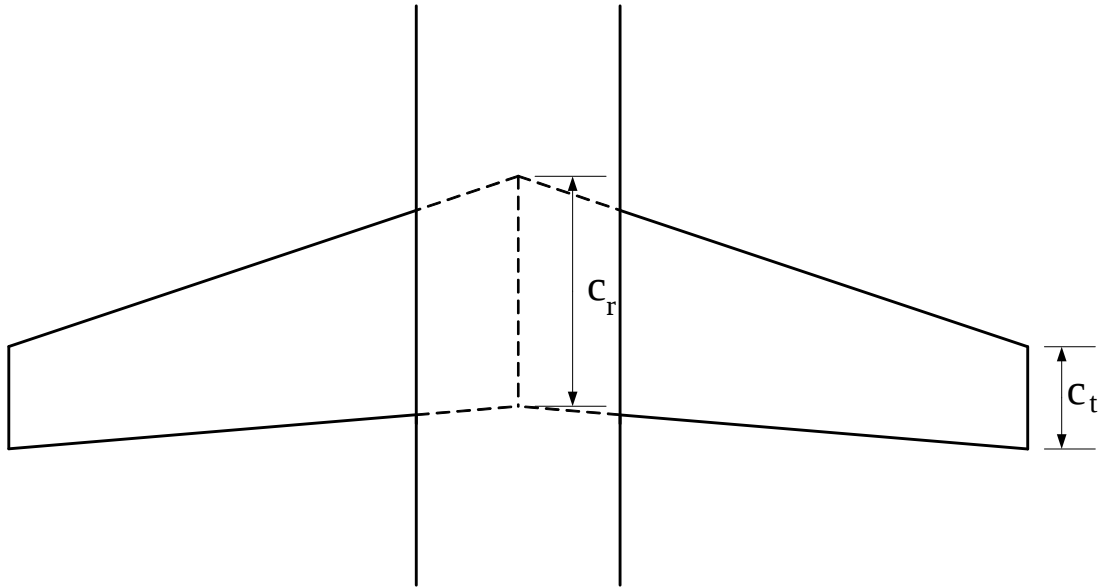


Σχήμα 5.3: Εκλέπτυνση πτέρυγας με μείωση της χορδής και μείωση του πάχους της κατά το εκπέτασμα.

Ο λόγος εκλέπτυνσης της πτέρυγας (λ) ορίζεται ως ο λόγος της χορδής (c_t) στο άκρο της πτέρυγας ("wing tip") προς τη χορδή (c_r) στη ρίζα της ("wing root").

$$\lambda \equiv \frac{c_t}{c_r} \quad (5.4)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η χορδή στη ρίζα της πτέρυγας είναι θεωρητικό μέγεθος και αναφέρεται στο μήκος της χορδής που θα είχε η πτέρυγα στο μέσο του εκπετάσματος, αν δεν “διακοπτόταν” από την άτρακτο, όπως δείχνει το Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Χορδή στη ρίζα και στο άκρο της πτέρυγας.

(vii) Γωνία Οπισθόκλισης της Πτέρυγας ("Wing Sweep Angle")

Η γωνία οπισθόκλισης της πτέρυγας είναι η γωνία μεταξύ της ακμής προσβολής της πτέρυγας και της καθέτου στο διαμήκη άξονα του αεροσκάφους (Λ_{LE}), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε την οπισθόκλιση σαν τη γωνία μεταξύ της ευθείας που περνά από τα σημεία τετάρτου των χορδών της πτέρυγας και της καθέτου στον άξονα του αεροσκάφους ($\Lambda_{c/4}$), όπως δείχνει το Σχήμα 5.2.

(viii) Διέδρος Γωνία της Πτέρυγας ("Wing Dihedral Angle")

Η διέδρος γωνία της πτέρυγας (Γ) είναι η γωνία μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου που περιέχει τη χορδή στη ρίζα της και του επιπέδου που είναι στο μέσον της πάνω και της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας, όπως απεικονίζει το Σχήμα 5.5.

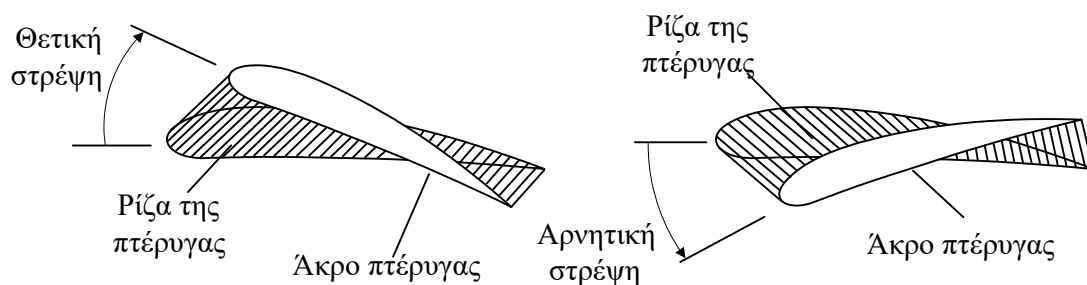


Σχήμα 5.5: Διέδρος γωνία της πτέρυγας (Γ_w).

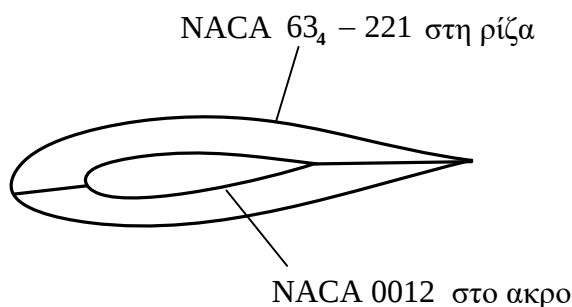
(ix) *Στρέψη της Πτέρυγας ("Wing Twist")*

Η στρέψη μιας πτέρυγας διακρίνεται σε δυο τύπους:

1. *Γεωμετρική Στρέψη ("Geometrical Twist")*, έχουμε όταν μεταβάλλεται η γωνία πρόσπτωσης της τοπικής αεροτομής κατά το εκπέτασμα. Η γωνία πρόσπτωσης είναι η γωνία που σχηματίζει η χορδή της αεροτομής με το οριζόντιο επίπεδο. Όταν η γωνία πρόσπτωσης της αεροτομής αυξάνει καθώς προχωρούμε από τη ρίζα προς το άκρο της πτέρυγας τότε έχουμε θετική στρέψη ("wash-in"), ενώ όταν η γωνία αυτή μειώνεται έχουμε αρνητική στρέψη ("wash-out") (Σχήμα 5.6).
2. *Αεροδυναμική στρέψη ("Aerodynamic Twist")* έχουμε όταν υπάρχει διαφορετικός τύπος αεροτομής κατά το εκπέτασμα (Σχήμα 5.7). Στην περίπτωση αυτή, η γωνία μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$) μεταβάλλεται.



Σχήμα 5.6: Η γεωμετρική στρέψη πτέρυγας μεταβάλλει τη γωνία πρόσπτωσης.



Σχήμα 5.7: Η αλλαγή του τύπου της αεροτομής κατά το εκπέτασμα (αεροδυναμική στρέψη) μεταβάλλει τη γωνία της μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$).

Σημειώνεται ότι οι πτέρυγες κατασκευάζονται συνήθως με μικρή αρνητική γεωμετρική στρέψη. Αυτό γίνεται έτσι ώστε η γωνία προσβολής, δηλαδή η γωνία που σχηματίζει η V_∞ με την τοπική χορδή της αεροτομής, να είναι μικρότερη στις περιοχές των άκρων της πτέρυγας σε σχέση με τη ρίζα. Η μικρή γωνία προσβολής στις περιοχές των άκρων συνεπάγεται ότι η απώλεια στήριξης επέρχεται πιο δύσκολα εκεί, κάτι που είναι σημαντικό για την ευστάθεια της πτήσης, διότι σε αυτές τις περιοχές βρίσκονται τα πηδάκια κλίσης (“aileron”) τα οποία δεν είναι λειτουργικά όταν έχει επέλθει απώλεια στήριξης. Για την αποφυγή της απώλειας στήριξης στα άκρα, χρησιμοποιείται συχνά και αεροδυναμική στρέψη, τοποθετώντας εκεί αεροτομές με μικρότερη καμπυλότητα σε σχέση με τις αεροτομές στη ρίζα. Σημειώνεται βέβαια πως οι ανωτέρω τεχνικές, παρ’ ότι συμβάλλουν στην ευστάθεια, οδηγούν σε μείωση της άντωσης που παράγεται στις περιοχές των άκρων της πτέρυγας.

5.1.1 Γεωμετρικές Σχέσεις

Στη συνέχεια αναφέρουμε σχέσεις που συνδέουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει στρέψη και ότι οι ακμές προσβολής και εκφυγής είναι ευθείες γραμμές.

Η χορδή στη ρίζα πτέρυγας με λόγο εκλέπτυνσης (λ), εκπέτασμα (b) και λόγο επιμήκους (A) είναι:

$$c_r = \frac{2b}{A(1+\lambda)} \quad (5.5)$$

Η μέση γεωμετρική χορδή πτέρυγας με λόγο εκλέπτυνσης (λ), και χορδή στη ρίζα (c_r) δίνεται από τη σχέση:

$$c_g = \frac{c_r}{2} (1+\lambda) \quad (5.6)$$

Η επιφάνεια πτέρυγας με λόγο εκλέπτυνσης (λ), και χορδή στη ρίζα (c_r) δίνεται από τη σχέση:

$$S = \frac{b}{2} c_r (1+\lambda) \quad (5.7)$$

Η μέση αεροδυναμική χορδή πτέρυγας με λόγο εκλέπτυνσης (λ), δίνεται από τη σχέση:

$$c_{mac} = \frac{2}{3} c_r \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda} = \frac{4}{3} \sqrt{(S/A)} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \right) \quad (5.8)$$

Η θέση στο εκπέτασμα ($\bar{y}$) της μέσης αεροδυναμικής χορδής πτέρυγας με λόγο εκλέπτυνσης (λ), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\bar{y}}{b} = \frac{1}{6} \frac{1+2\lambda}{1+\lambda} \quad (5.9)$$

Γνωρίζοντας τη γωνία οπισθόκλισης η οποία ορίζεται στη θέση (m/c) των χορδών της πτέρυγας, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία οπισθόκλισης για κάποια άλλη θέση (n/c) των χορδών μέσω της σχέσης:

$$\tan \Lambda_n = \tan \Lambda_m - \frac{4}{A} \left[(n-m) \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right] \quad (5.10)$$

Ειδικότερα, οι γωνίες οπισθόκλισης ως προς το τέταρτο της χορδής ($\Lambda_{c/4}$) και την ακμή προσβολής (Λ_{LE}) συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan \Lambda_{c/4} = \tan \Lambda_{LE} - \frac{1}{4} \frac{2 c_r}{b} (1-\lambda) \quad (5.11)$$

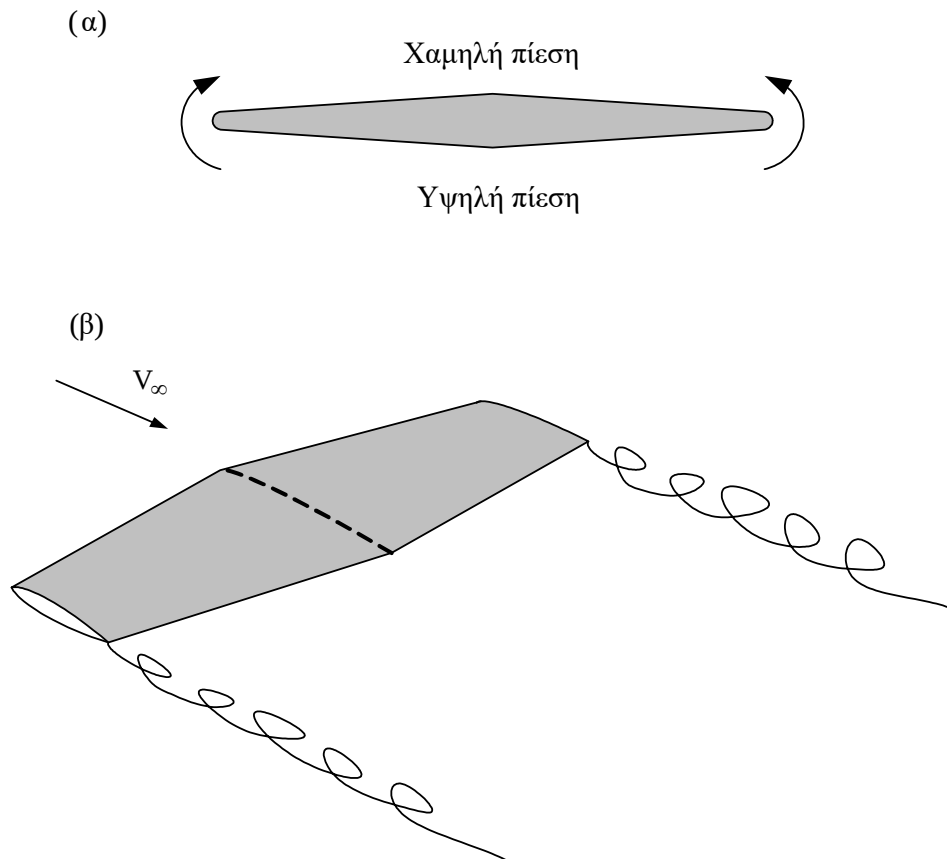
Τέλος, η χορδή της πτέρυγας σε απόσταση y από τη ρίζα της κατά το εκπέτασμα δίνεται από τη σχέση:

$$c = c_r \left[1 - (1-\lambda) \frac{2y}{b} \right] \quad (5.12)$$

5.2 Η Ροή γύρω από Πτέρυγα

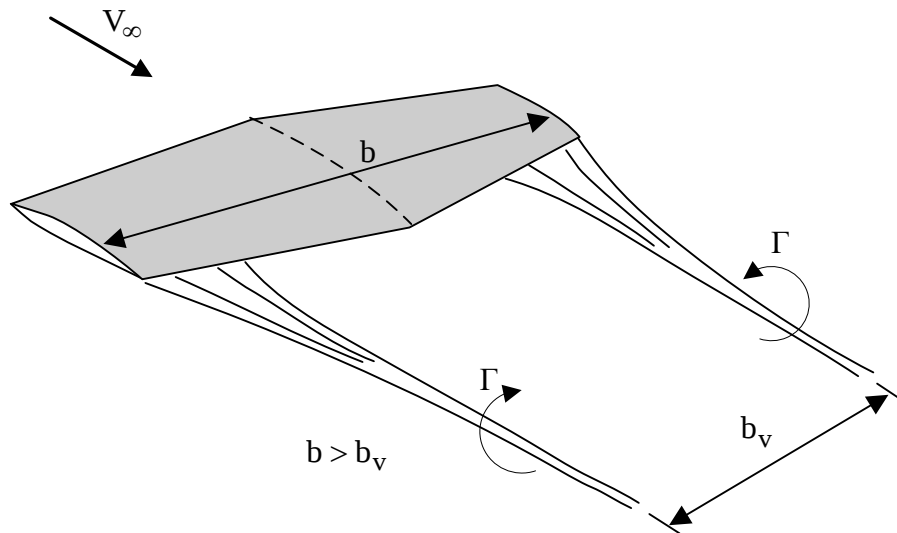
Η ροή γύρω από την πτέρυγα του αεροσκάφους είναι τρισδιάστατη και αρκετά διαφορετική από την ροή γύρω από αεροτομή. Οι κυριότερες διαφοροποιήσεις είναι η ύπαρξη μιας σημαντικής συνιστώσας της ροής κατά μήκος του εκπετάσματος, και ο σχηματισμός ισχυρών στροβίλων στα άκρα της πτέρυγας, οι οποίοι επάγουν σημαντικές ταχύτητες σε αυτήν.

Ας δούμε πως εξηγείται αυτή η διαφοροποίηση της ροής στις τρεις διαστάσεις. Η ύπαρξη υψηλής πίεσης στην κάτω επιφάνεια της πτέρυγας και χαμηλής πίεσης στην πάνω επιφάνεια, προκαλεί την άντωση. Ένα άλλο αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς πίεσης είναι και η δημιουργία σημαντικής ροής κοντά στα άκρα της πτέρυγας από την κάτω προς την πάνω επιφάνεια όπως αναπαριστά το Σχήμα 5.8(α). Αυτό έχει ως συνέπεια τον σχηματισμό δυο ισχυρών στροβίλων ("trailing vortices") στα άκρα οι οποίοι επεκτείνονται στο απόρρευμα της πτέρυγας όπως απεικονίζει το Σχήμα 5.8(β). Οι δινωσωλήνες αυτοί αποτελούν στην ουσία απώλεια ενέργειας με την κινητική τους ενέργεια να χάνεται για το αεροσκάφος.



Σχήμα 5.8: Δημιουργία στροβίλων στα άκρα πτέρυγας.

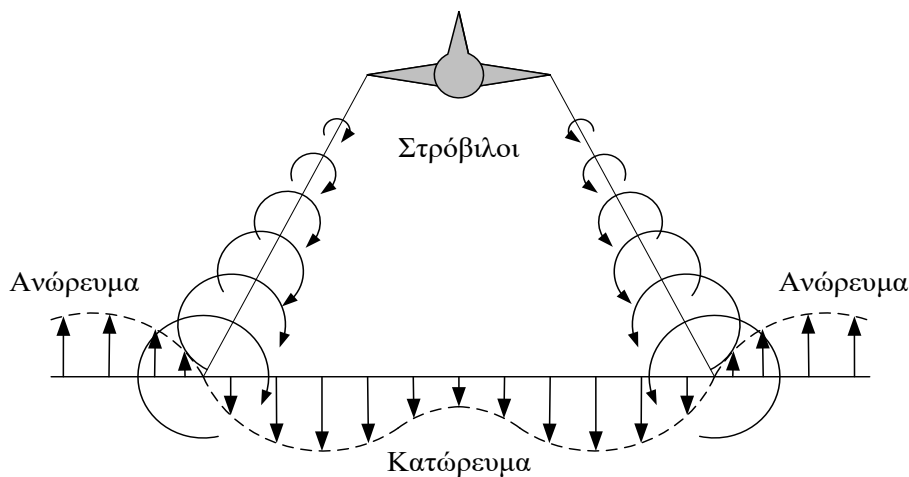
Μια πιο ρεαλιστική εικόνα του απορρεύματος των στροβίλων πίσω από την πτέρυγα δίνει το Σχήμα 5.9. Παρατηρούμε ότι οι στρόβιλοι αυτοί δεν σχηματίζονται "σημειακά" στα άκρα της πτέρυγας, αλλά σε μια περιοχή των άκρων. Επίσης, η απόσταση μεταξύ των δυο στροβίλων στο απόρρευμα (b_v) είναι μικρότερη του εκπετάσματος της πτέρυγας.



Σχήμα 5.9: Κάτοψη του απορρεύματος στροβίλων των άκρων πτέρυγας.

5.3 Επαγόμενη Αντίσταση

Οι στρόβιλοι των άκρων της πτέρυγας επάγουν ταχύτητες σε όλα τα σημεία του απορρεύματος καθώς και της ίδιας της πτέρυγας. Το Σχήμα 5.10 απεικονίζει τις επαγόμενες ταχύτητες σε μια θέση πίσω από το αεροσκάφος. Στην περιοχή μεταξύ των δυο στροβίλων οι ταχύτητες αυτές έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω (κατώρευμα) και έξω από την περιοχή αυτή έχουν φορά προς τα επάνω (ανώρευμα).



Σχήμα 5.10: Επαγόμενες ταχύτητες από τους στροβίλους των άκρων της πτέρυγας.

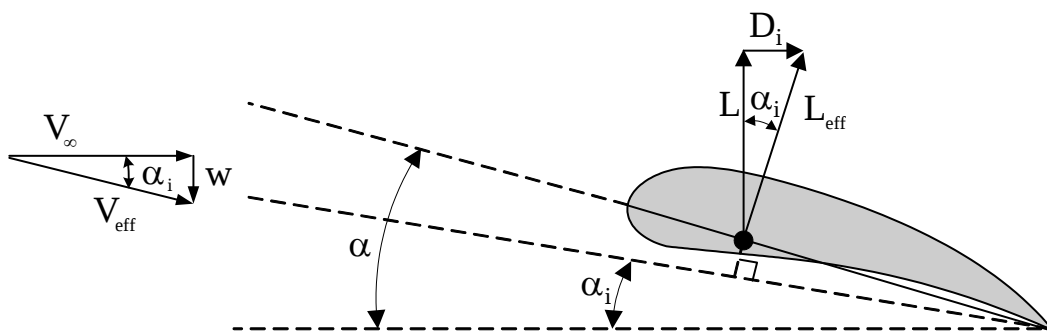
Η επαγόμενη ταχύτητα (w) προστίθεται στην ταχύτητα της ελεύθερης ροής (V_∞) όπως δείχνει το Σχήμα 5.11. Μια αεροτομή η οποία βρίσκεται σε αυτό το πεδίο ροής "βλέπει" ταχύτητα $\vec{V}_{eff} = \vec{V}_\infty + \vec{w}$ η οποία σχηματίζει μικρότερη γωνία προσβολής (α_{eff}) με τη χορδή της από ότι η ελεύθερη ροή:

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i, \quad (5.13)$$

όπου α_i είναι η "επαγόμενη γωνία" η οποία ορίζεται θετική και δίνεται από τη σχέση:

$$\tan \alpha_i = - \frac{w}{V_\infty} \quad (5.14)$$

Το αρνητικό πρόσημο χρησιμοποιείται γιατί η ταχύτητα του κατωρεύματος (w) είναι αρνητική.



Σχήμα 5.11: Η αεροτομή της πτέρυγας "βλέπει" ελεύθερη ροή ταχύτητας V_{eff} λόγω της επαγόμενης ταχύτητας w .

Η "στροφή" αυτή της ελεύθερης ροής έχει δυο συνέπειες. Πρώτον, μειώνεται η άντωση της αεροτομής λόγω της μείωσης της γωνίας πρόσπτωσης:

$$L_{eff} = 2\pi (\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}) \left(\frac{1}{2} \rho_\infty V_{eff}^2 S \right) \quad (5.15)$$

Η δύναμη L_{eff} είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{V}_{eff}$ και όχι στην ταχύτητα $\vec{V}_\infty$ της ελεύθερης ροής. Επομένως η άντωση L στην αεροτομή είναι τελικά:

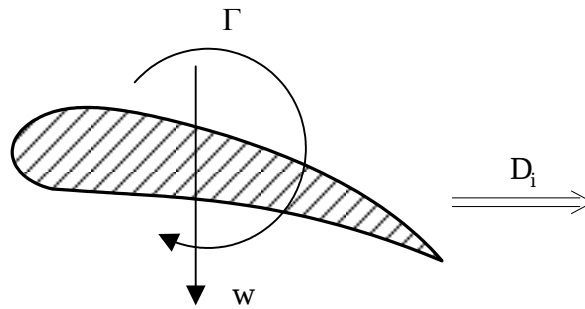
$$L = L_{eff} \cos \alpha_i \quad (5.16)$$

Δεύτερον, δημιουργείται μια συνιστώσα της δύναμης L_{eff} η οποία είναι παράλληλη στην $\vec{V}_\infty$ και αντίθετη στην κίνηση της πτέρυγας, είναι δηλαδή η συνιστώσα αυτή δύναμη αντίστασης:

$$D_i = L_{eff} \sin \alpha_i \quad (5.17)$$

Αυτή η αντίσταση, η οποία οφείλεται στην επαγόμενη ταχύτητα, ονομάζεται *επαγόμενη αντίσταση*. Η αντίσταση αυτή δεν οφείλεται στη συνεκτικότητα της ροής, αλλά στην αλλαγή της κατανομής πίεσης γύρω από την αεροτομή λόγω της υπέρθεσης του πεδίου πιέσεων των στροβίλων των άκρων της πτέρυγας. Η ύπαρξη της επαγόμενης αντίστασης D_i μπορεί ναδειχθεί με εφαρμογή του θεωρήματος Kutta-Joukowski για το κατώρευμα w όπως απεικονίζει το Σχήμα 5.12:

$$\vec{D}_i = \rho_\infty \vec{w} \times \vec{\Gamma}$$



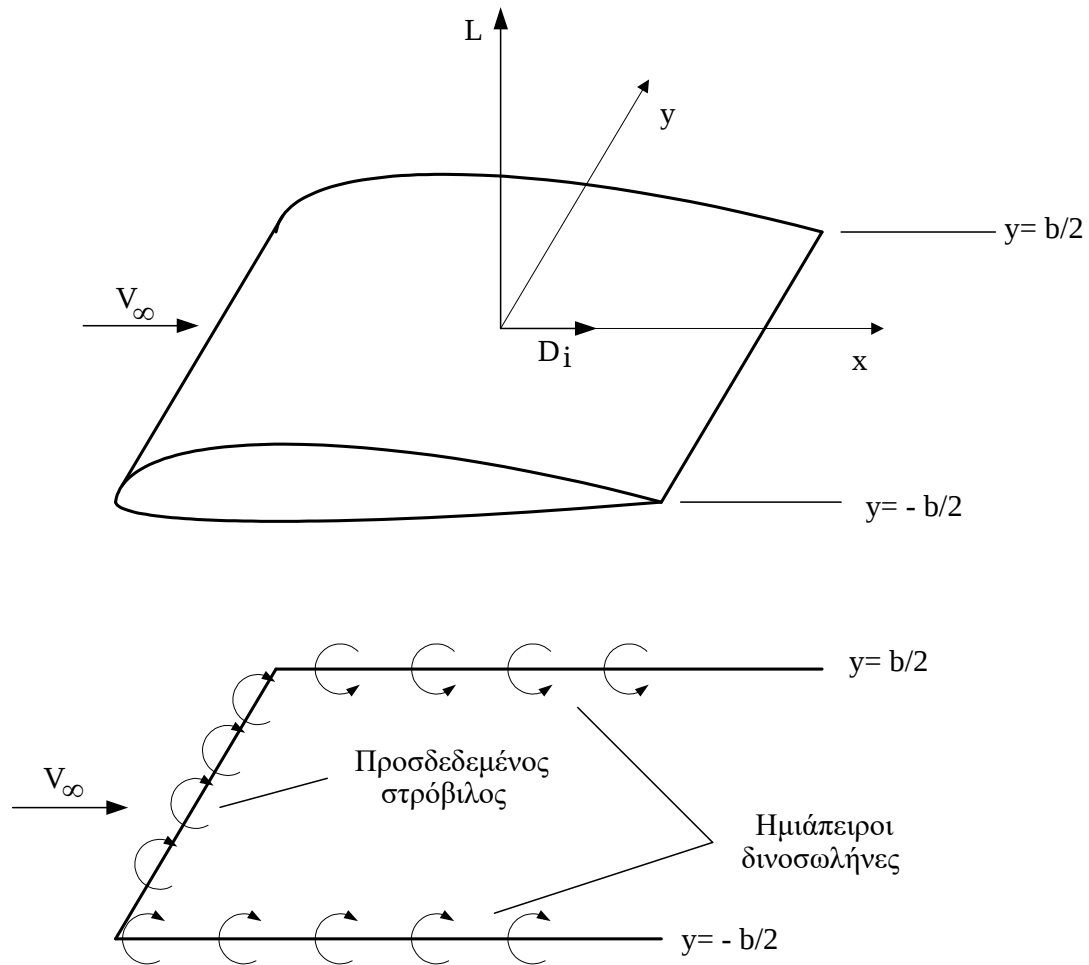
Σχήμα 5.12: Εφαρμογή του θεωρήματος Kutta-Joukowski για την επαγόμενη αντίσταση D_i λόγω του κατωρεύματος w .

Ένας άλλος τρόπος να αντιληφθεί κανείς την επαγόμενη αντίσταση είναι να την θεωρήσει ως την απώλεια ενέργειας λόγω του στροβιλισμού της ροής στα άκρα της πτέρυγας. Οι μηχανές δηλαδή, του αεροσκάφους δίνουν ενέργεια για να το κινήσουν μέρος της οποίας "χάνεται" σαν ενέργεια περιστροφής. Μπορούμε να πούμε ότι μέρος της ώσης του συστήματος πρόωσης καταναλώνεται στην αντιστάθμιση της επαγόμενης αντίστασης. Η επαγόμενη αντίσταση γενικά αποτελεί μεγάλο ποσοστό της συνολικής αντίστασης του αεροσκάφους και είναι της τάξης του 25%.

5.4 Θεωρία Γραμμής Άντωσης ("Lifting line")

Το απόρρευμα των στροβίλων της πτέρυγας δημιουργεί επαγόμενη αντίσταση όχι μόνο σε αντωτικά σώματα που βρίσκονται σε αυτό, αλλά και στην ίδια την πτέρυγα. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την αντίσταση D_i χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο για τη ροή στη πτέρυγα το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 5.13.

Η πτέρυγα αντικαθίσταται με τον προσδεδεμένο *στρόβιλο* σταθερής έντασης Γ . Σύμφωνα με το θεώρημα Helmholtz, τα άκρα του δινοσωλήνα αυτού δεν μπορούν να είναι στα άκρα της πτέρυγας αλλά πρέπει να εκτείνονται στο άπειρο. Προσθέτοντας τους δύο ημιάπειρους δινοσωλήνες που αντιστοιχούν στους στροβίλους των άκρων, έχουμε το απλό μοντέλο της θεωρίας Γραμμής Άντωσης του *Prandtl* που απεικονίζεται το Σχήμα 5.13.

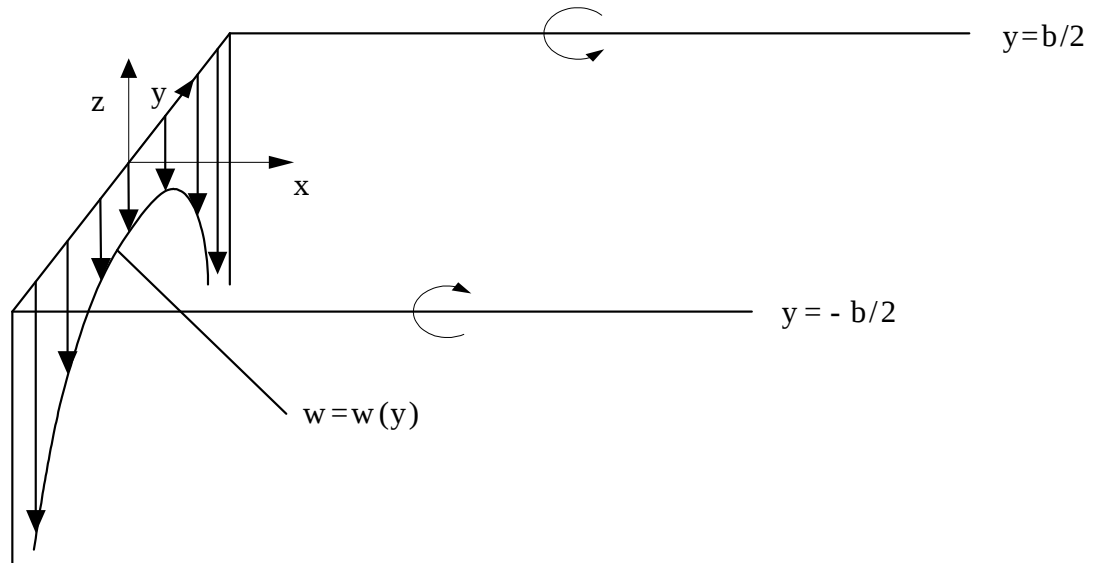


Σχήμα 5.13: Θεωρία Γραμμής Άντωσης: Η πτέρυγα μοντελοποιείται με πεταλοειδή στρόβιλο ("horseshoe vortex").

Η επαγόμενη ταχύτητα $w(y)$ εξαιτίας των δυο ημιάπειρων δινωσολήνων στα άκρα σε σημεία πάνω στην γραμμή του προσδεμένου στρόβιλου («γραμμή άντωσης») προκύπτει από το νόμο *Biot-Savart* και απεικονίζεται στο Σχήμα 5.14:

$$w(y) = - \frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} + y \right)} - \frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} - y \right)} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{\frac{b}{2} + y} + \frac{1}{\frac{b}{2} - y} \right) \quad (5.18)$$

Η φορά της επαγόμενης ταχύτητας (w) πάνω στην γραμμή του προσδεμένου στρόβιλου προκύπτει αρνητική, εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού για τους δύο ημιάπειρους δινωσολήνες.

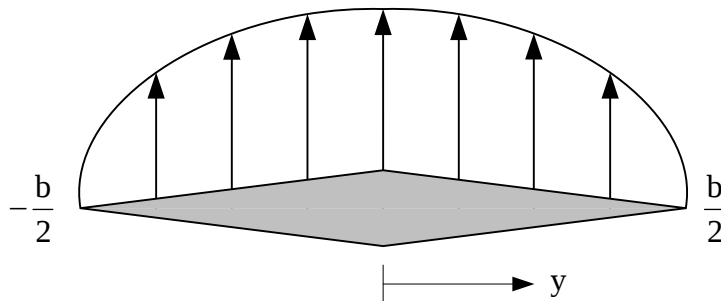


Σχήμα 5.14: Κατανομή κατωρεύματος στα σημεία πάνω στον προσδεμένο στρόβιλο.

Το μοντέλο του ενός πεταλοειδούς στροβίλου που χρησιμοποιούμε ωστόσο, δεν είναι ρεαλιστικό για δυο λόγους. Πρώτον, γιατί μας δίνει απειρισμό του κατωρεύματος στα άκρα της πτέρυγας, πράγμα που στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Δεύτερον, γιατί η θεώρηση σταθερής κυκλοφορίας Γ κατά μήκος του εκπετάσματος συνεπάγεται και σταθερή άντωση σύμφωνα με το θεώρημα Kutta-Joukowski:

$$L(y) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma(y) \quad (5.19)$$

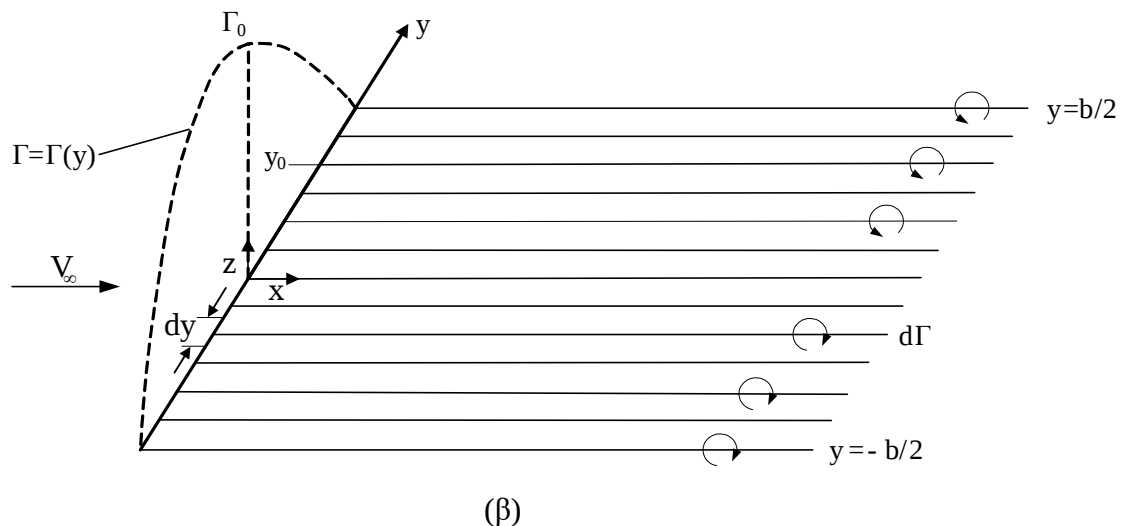
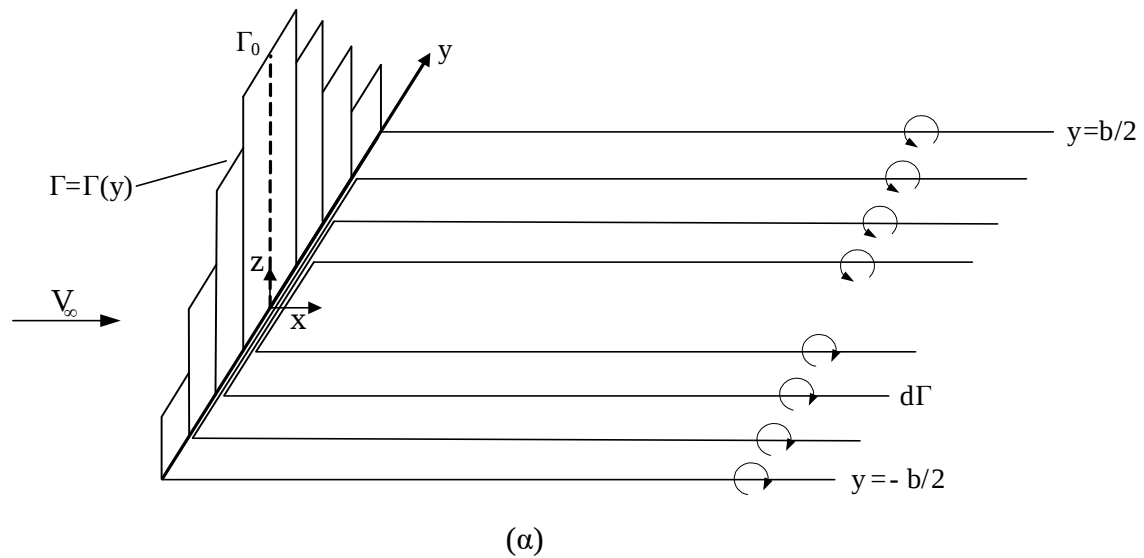
Γνωρίζουμε όμως ότι η άντωση κατά μήκος της πτέρυγας δεν παραμένει σταθερή εξαιτίας της λέπτυνσης της πτέρυγας και της γεωμετρικής ή και αεροδυναμικής στρέψης της. Το Σχήμα 5.15 δίνει ένα παράδειγμα κατανομής άντωσης κατά το εκπέτασμα.



Σχήμα 5.15: Παράδειγμα κατανομής της άντωσης κατά μήκος του εμπετάσματος.

Ο L.Prandtl βελτίωσε την αρχική προσέγγιση του Σχήματος 5.13 θεωρώντας επαλληλία πεταλοειδών στροβίλων έντασης $d\Gamma$, σύμφωνα με το Σχήμα 5.16(α). Όλοι

οι πεταλοειδείς στροβίλοι τέμνονται πάνω στη γραμμή άντωσης και είναι συμμετρικά τοποθετημένοι ως προς το μέσο της ($y=0$), όμως ο καθένας εκτείνεται σε διαφορετικό μήκος αυτής. Η κυκλοφορία $\Gamma(y)$ σε ένα τυχαίο σημείο της γραμμής άντωσης προκύπτει αθροίζοντας τις κυκλοφορίες των στροβίλων που τέμνονται σε αυτό το σημείο. Για πολύ μεγάλο αριθμό στροβίλων, η κατανομή της κυκλοφορίας $\Gamma(y)$ γίνεται συνεχής, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.16(β).



Σχήμα 5.16: Επαλληλία πεταλοειδών στροβίλων κατά μήκος της γραμμής άντωσης (άξονας y): (α) διακριτή και (β) συνεχής κατανομή κυκλοφορίας $\Gamma(y)$

Με βάση το Σχήμα 5.16(β), η επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο y_0 της γραμμής άντωσης της πτέρυγας από τον στρόβιλο έντασης $d\Gamma$ του απορρεύματος που αντιστοιχεί στη θέση y του εκπετάσματος είναι:

$$dw = - \frac{d\Gamma}{4\pi (y_0 - y)} \quad (5.20)$$

Η συνολική επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο y_0 του εκπετάσματος βρίσκεται ολοκληρώνοντας την (5.20) σε όλο το εκπέτασμα:

$$w(y_0) = - \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{4\pi (y_0 - y)} = - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y_0 - y} \quad (5.21)$$

Η επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης α_i στην θέση y_0 δίνεται από τη σχέση (5.14):

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1} \left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right) \approx - \frac{w(y_0)}{V_\infty} \quad (5.22)$$

Έτσι από την σχέση (5.21) για την επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης, έχουμε:

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y_0 - y} \quad (5.23)$$

Βλέπουμε ότι προκειμένου να υπολογίσουμε την $\alpha_i(y_0)$ πρέπει να υπολογιστεί η κατανομή κυκλοφορίας κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας $\Gamma(y)$. Προς το σκοπό αυτό, θα συνδέσουμε τώρα την κατανομή $\Gamma(y)$ με τη γωνία προσβολής α χρησιμοποιώντας το βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας λεπτών αεροτομών.

Ο «τοπικός» συντελεστής άντωσης στη θέση y_0 είναι:

$$C_\ell = 2\pi \left[\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}(y_0) \right], \quad (5.24)$$

όπου $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$. Επομένως, η γωνία προσβολής α εκφράζεται ως:

$$\alpha(y_0) = \alpha_i(y_0) + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{C_\ell(y_0)}{2\pi} \quad (5.25)$$

Ο συντελεστής της τοπικής άντωσης στην ανωτέρω σχέση συνδέεται με την κυκλοφορία $\Gamma(y)$ με βάση το θεώρημα Kutta-Joukowski:

$$L(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0) \Rightarrow$$

$$C_\ell(y_0) \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0) \Rightarrow$$

$$C_\ell(y_0) = \frac{2 \Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)}, \quad (5.26)$$

όπου $c(y_0)$ είναι το μήκος της χορδής στη θέση y_0 .

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.25) και (5.26), έχουμε:

$$\alpha(y_0) = \alpha_i(y_0) + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} \quad (5.27)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την έκφραση (5.23) για την επαγόμενη γωνία $\alpha_i(y_0)$, παίρνουμε την παρακάτω θεμελιώδη σχέση η οποία έχει μοναδικό άγνωστο της κατανομή της κυκλοφορίας κατά το εκπέτασμα.

$$\alpha(y_0) = \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y_0 - y} \quad (5.28)$$

Οι κατανομές $\alpha(y_0)$, $\alpha_{L=0}(y_0)$ και $c(y_0)$ θεωρούνται γνωστές από τη γεωμετρία της πτέρυγας.

Τα αεροδυναμικά μεγέθη μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

1. Η άντωση στη θέση y του εκπετάσματος είναι: $L(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y)$, όπου κάνουμε την παραδοχή ότι: $\vec{V}_\infty + \vec{w} \approx \vec{V}_\infty$.

2. Η συνολική άντωση στην πτέρυγα είναι: $L = \int_{-b/2}^{b/2} L(y) dy$, επομένως:

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (5.29)$$

3. Η επαγόμενη αντίσταση $D_i(y)$ στη θέση y είναι:

$$D_i(y) = L(y) \tan \alpha_i \cong L(y) \alpha_i.$$

4. Η συνολική επαγόμενη αντίσταση στην πτέρυγα είναι: $D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L(y) \alpha_i(y) dy$

Επομένως:

$$D_i = \rho_{\infty} V_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.30)$$

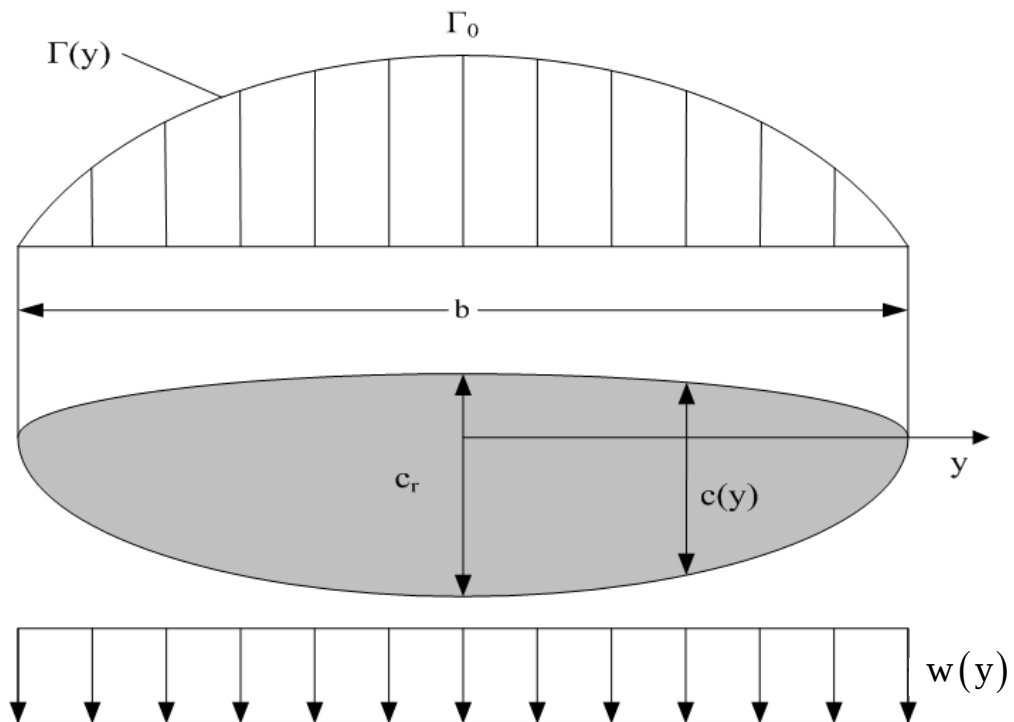
Απομένει λοιπόν, η εύρεση της κατανομής της κυκλοφορίας προκειμένου να υπολογιστούν τα αεροδυναμικά μεγέθη. Κατ' αρχήν θα προσεγγίσουμε την $\Gamma(y)$ εμπειρικά, και έπειτα θα μελετήσουμε γενική λύση της θεμελιώδους εξίσωσης (5.28).

5.4.1 Ελλειπτική Κατανομή της Άντωσης

Πριν δούμε μια γενική λύση της εξίσωσης (5.28) για την κυκλοφορία $\Gamma(y)$, ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση που αφορά ελλειπτική κατανομή της κυκλοφορίας $\Gamma(y)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(y/\frac{b}{2}\right)^2} \quad (5.31)$$

Η κατανομή αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 5.17.



Σχήμα 5.17: Ελλειπτική φόρτιση πτέρυγας.

Από το θεώρημα Kutta-Joukowski έχουμε ότι και η κατανομή της άντωσης (φόρτιση) της πτέρυγας είναι ελλειπτική:

$$L(y) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(y/\frac{b}{2}\right)^2} \quad (5.32)$$

Η ολική άντωση της πτέρυγας δίνεται από την σχέση (5.29). Για την διευκόλυνση των πράξεων θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta, \quad dy = -\frac{b}{2} \sin \theta d\theta \quad (5.33)$$

Με βάση τον μετασχηματισμό, η γωνία θ λαμβάνεται μηδενική για $y = +b/2$ και ίση με π για $y = -b/2$. Με βάση τον πολικό μετασχηματισμό η ελλειπτική κατανομή της κυκλοφορίας (5.31) γίνεται:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta \quad (5.34)$$

Αντικαθιστώντας τις δυο ανωτέρω σχέσεις στην εξίσωση (5.29) της ολικής άντωσης έχουμε:

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \int_{\pi}^0 \Gamma_0 \sin \theta \left(-\frac{b}{2} \sin \theta d\theta \right) \Rightarrow L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

και προκύπτει τελικά:

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

Ο συντελεστής της ολικής άντωσης υπολογίζεται ως:

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S} \Rightarrow C_L = \frac{\pi \Gamma_0 b}{2 V_{\infty} S} \quad (5.35)$$

όπου S είναι η επιφάνεια κάτοψης της πτέρυγας. Εναλλακτικά, η ανωτέρω σχέση μπορεί να επιλυθεί ως προς την σταθερά κυκλοφορίας Γ_0 :

$$\Gamma_0 = \frac{2 V_{\infty} S C_L}{\pi b} \Rightarrow \Gamma_0 = \frac{2 V_{\infty} b C_L}{\pi A} \quad (5.36)$$

όπου $A \equiv \frac{b^2}{S}$ ο λόγος επιμήκους.

Για τον υπολογισμό της επαγόμενης αντίστασης, θα πρέπει πρώτα να υπολογιστούν η επαγόμενη ταχύτητα (w) αλλά και η επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης (α_i). Η ταχύτητα w που επάγεται σε μια θέση y_0 του εκπετάσματος δίνεται από τη σχέση (5.21):

$$w(y_0) = - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y_0 - y}$$

Για την ελλειπτική κατανομή (5.31) που έχουμε θεωρήσει είναι:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = - \frac{4 \Gamma_0}{b^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{4y^2}{b^2}}} \quad (5.37)$$

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις, η έκφραση για το επαγόμενο κατώρευμα γίνεται:

$$w(y) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{-b/2} \frac{y}{(y_0 - y) \cdot \sqrt{1 - \frac{4y^2}{b^2}}} dy$$

Αντικαθιστώντας τον πολικό μετασχηματισμό (5.33) και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει ότι:

$$w(\theta_0) = - \frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (5.38)$$

Επειδή ισχύει η ταυτότητα: $\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{\pi \sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0}$, η (5.38) γίνεται:

$$\boxed{w(\theta) = - \frac{\Gamma_0}{2b}} \quad (5.39)$$

Παρατηρούμε ότι το κατώρευμα είναι σταθερό κατά το εκπέτασμα, όπως απεικονίζει και το Σχήμα 5.17.

Η επαγόμενη γωνία $\alpha_i(\theta)$ δίνεται από την σχέση (5.22):

$$\alpha_i(\theta_0) \cong - \frac{w(\theta_0)}{V_\infty}$$

η οποία αντικαθιστώντας την έκφραση του κατωρεύματος (5.39) γίνεται:

$$\alpha_i = \frac{\Gamma_0}{2 b V_\infty} \quad (5.40)$$

Επομένως και η επαγόμενη γωνία α_i είναι σταθερή κατά το εκπέτασμα. Ακόμη, αντικαθιστώντας στην ανωτέρω εξίσωση την σχέση (5.36) της σταθεράς Γ_0 , προκύπτει πως η επαγόμενη γωνία είναι ανάλογη του συντελεστή άντωσης:

$$\boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi A}} \quad (5.41)$$

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης υπολογίζεται από τη σχέση (5.30):

$$C_{Di} \equiv \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.42)$$

Η ανωτέρω έκφραση του συντελεστή αντίστασης μετασχηματίζεται αντικαθιστώντας τον πολικό μετασχηματισμό (5.33) και την έκφραση της κυκλοφορίας (5.34):

$$C_{Di} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{\pi}^0 \Gamma_0 \sin \theta \alpha_i(\theta) \left(-\frac{b}{2} \sin \theta \right) d\theta \Rightarrow$$

$$C_{Di} = \frac{\Gamma_0 b}{V_\infty S} \int_0^{\pi} \alpha_i(\theta) \sin^2 \theta d\theta \quad (5.43)$$

Αντικαθιστώντας επιπλέον την έκφραση της σταθεράς Γ_0 (5.36), και της επαγόμενης γωνίας (5.40), προκύπτει ότι:

$$C_{Di} = \frac{2 V_\infty b C_L}{\pi A} \cdot \frac{b}{V_\infty S} \int_0^{\pi} \frac{C_L}{\pi A} \sin^2 \theta d\theta$$

και δεδομένου ότι ο λόγος επιμήκους είναι $A \equiv \frac{b^2}{S}$ προκύπτει η τελική έκφραση του συντελεστή επαγόμενης αντίστασης:

$$\boxed{C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A}} \quad (5.44)$$

Παρατηρούμε ότι:

1. Ο συντελεστής C_{Di} είναι ανάλογος του τετραγώνου του συντελεστή άντωσης πτέρυγας (C_L). Ειδικά κατά την απογείωση και την προσγείωση όπου οι τιμές του C_L είναι υψηλές, και οι τιμές του C_{Di} είναι ιδιαίτερα αυξημένες. Ακόμη

και κατά την κανονική πτήση, ο C_{Di} αντιστοιχεί περίπου στο 25% της συνολικής αντίστασης.

2. Ο συντελεστής C_{Di} είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου επιμήκους (A).

Αύξηση του A σημαίνει απομάκρυνση των στροβίλων των άκρων και άρα μείωση της έντασης του κατωρεύματος σε μεγάλο τμήμα της πτέρυγας. Συνεπώς, συμφέρει να χρησιμοποιούμε πτέρυγα με μεγάλο λόγο επιμήκους, όσον αφορά τη μείωση της αντίστασης. Για πολύ μεγάλο λόγο επιμήκους (A), η επαγόμενη αντίσταση τείνει να μηδενιστεί.

Τέλος, θα βρεθεί η κατανομή του μήκους της χορδής ($c(y)$) κατά το εμπέτασμα, δηλαδή η μορφή της πτέρυγας, έτσι ώστε η κατανομή της άντωσης να είναι ελλειπτική. Από τον ορισμό του τοπικού συντελεστή άντωσης σε μια θέση (y) του εκπετάσματος, προκύπτει η κατανομή του μήκους της χορδής $c(y)$:

$$C_\ell = \frac{L(y)}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y)} \Rightarrow c(y) = \frac{L(y)}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 C_\ell} \quad (5.45)$$

Ο «τοπικός» συντελεστής άντωσης (C_ℓ) στη θέση y δίνεται, σύμφωνα με την θεωρία των λεπτών αεροτομών, από την παρακάτω σχέση:

$$C_\ell = 2\pi (\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}) \Rightarrow$$

$$C_\ell = 2\pi (\alpha - \alpha_i - \alpha_{L=0}) \quad (5.46)$$

όπου η α γωνία προσβολής, α_i η επαγόμενη γωνία και $\alpha_{L=0}$ η γωνία μηδενικής άντωσης.

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.41), η επαγόμενη γωνία (α_i) δεν μεταβάλλεται κατά το εκπέτασμα (y). Επιπλέον, αν η πτέρυγα δεν έχει γεωμετρική στρέψη, τότε η γωνία προσβολής (α) είναι επίσης σταθερή. Η γωνία μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$) εξαρτάται, σύμφωνα με τη θεωρία λεπτών αεροτομών, από την καμπύλωση της αεροτομής. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει ούτε αεροδυναμική στρέψη, τότε η καμπύλωση της αεροτομής δεν μεταβάλλεται κατά το εκπέτασμα, και άρα η γωνία $\alpha_{L=0}$ είναι επίσης σταθερή. Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, προκύπτει από την (5.46) πως ο τοπικός συντελεστής άντωσης είναι σταθερός κατά μήκος του εκπετάσματος (y). Επομένως,

στην (5.45) όλα τα μεγέθη στον παρονομαστή είναι σταθερά, και άρα η κατανομή του μήκους της χορδής $c(y)$ έχει ίδια μορφή με την κατανομή της άντωσης $L(y)$, δηλαδή ελλειπτική. Η ελλειπτική μορφή της πτέρυγας απεικονίζεται στο Σχήμα 5.17.

5.4.2 Γενική Περίπτωση για την Κατανομή Κυκλοφορίας $\Gamma(y)$

Για ελλειπτική κατανομή της κυκλοφορίας είδαμε ότι έχουμε τη σχέση $\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta$. Στη γενική περίπτωση ας θεωρήσουμε μια λύση της θεμελιώδους εξίσωσης (5.28) η οποία να έχει μορφή σειράς Fourier:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_{ref} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \quad (5.47)$$

όπου Γ_{ref} είναι μια σταθερά με διαστάσεις κυκλοφορίας και A_n είναι σταθεροί αδιάστατοι συντελεστές που θα προσδιοριστούν. Η Γ_{ref} μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα, με βάση τον ορισμό της κυκλοφορίας, ως το γινόμενο μιας χαρακτηριστικής ταχύτητας και ενός μήκους. Ορίζουμε λοιπόν $\Gamma_{ref} = V_{\infty} b$, όπου ως χαρακτηριστικό μήκος επιλέγεται το εκπέτασμα (b), διότι είναι σταθερό, σε αντίθεση με τη χορδή (c) που μεταβάλλεται κατά τη θέση y . Αντικαθιστώντας την έκφραση της Γ_{ref} στην (5.47), προκύπτει:

$$\Gamma(\theta) = b V_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta). \quad (5.48)$$

Η ανωτέρω κατανομή $\Gamma(\theta)$ μηδενίζεται στα άκρα της πτέρυγας τα οποία αντιστοιχούν στις γωνίες $\theta = \pi$ και $\theta = 0$.

Η παράγωγος $\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)$ που περιέχει η βασική σχέση (5.28) υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dy} = b V_{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos(n\theta) \right] \frac{d\theta}{dy}. \quad (5.49)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις αλλά και τον μετασχηματισμό $y = \frac{b}{2} \cos \theta$ στη βασική εξίσωση (5.28) προκύπτει:

$$\alpha(\theta_0) = \frac{b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta_0) + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

αλλά ισχύει ότι: $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{\pi \sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0}$, συνεπώς έχουμε:

$$\alpha(\theta_0) = \frac{b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta_0) + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0} \quad (5.50)$$

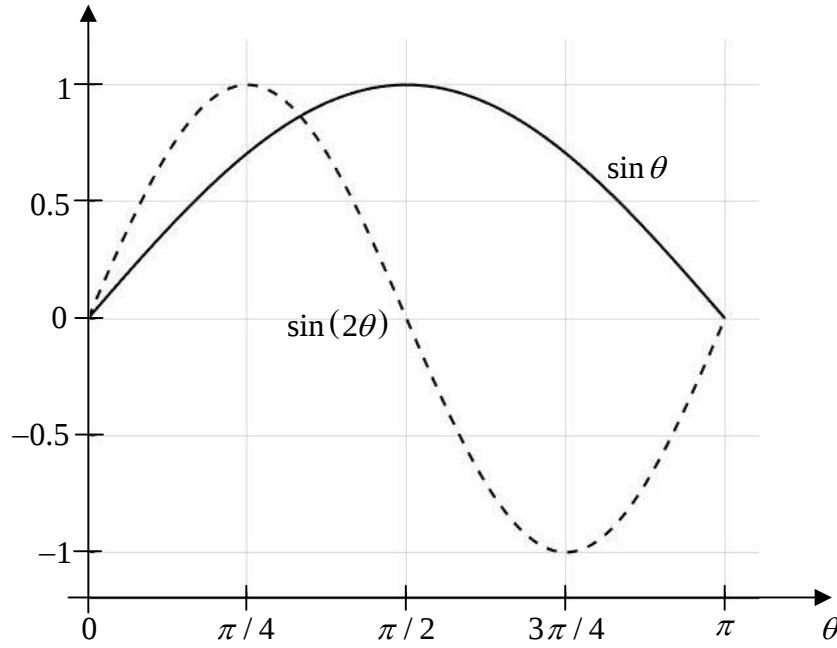
Τα μεγέθη b , $c(\theta_0)$, και $\alpha_{L=0}(\theta_0)$ είναι δεδομένα από την γεωμετρία της πτέρυγας και άρα οι μόνοι άγνωστοι στην (5.50) είναι οι συντελεστές A_n .

Η εξίσωση (5.50) δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά ως προς του συντελεστές A_n . Για αυτόν τον λόγο, οι σειρές προσεγγίζονται κρατώντας μόνο τους πρώτους N όρους. Επομένως, η εξίσωση (5.50) γίνεται:

$$\alpha(\theta_0) = \frac{b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta_0) + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0} \quad (5.51)$$

Θεωρώντας την (5.51) σε N θέσεις κατά το μήκος εκπετάσματος της πτέρυγας, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές A_n λύνοντας στον υπολογιστή ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των όρων N στην (5.51) τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση της κυκλοφορίας $\Gamma(\theta)$.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι όροι $\sin(n\theta_0)$ εκφράζουν κατανομές συμμετρικές ως προς το μέσο του εκπετάσματος της πτέρυγας ($\theta_0 = \pi/2$) μόνο όταν ο αριθμός n είναι περιττός ($n=1,3,5$), ενώ όταν ο n είναι άρτιος ($n=2,4,6$) η κατανομή είναι μη συμμετρική. Το Σχήμα 5.18 απεικονίζει ενδεικτικά την συμμετρική κατανομή του όρου $\sin(\theta)$ και την μη συμμετρική του όρου $\sin(2\theta)$. Επομένως, αν η κατανομή $\Gamma(\theta)$ είναι συμμετρική ως προς το μέσο του εκπετάσματος, τότε οι συντελεστές $A_2, A_4, \dots, A_{2m}$ τίθενται ίσοι με το μηδέν.



Σχήμα 5.18: Η κατανομή του όρου $\sin(\theta)$ είναι συμμετρική ως προς το μέσο του εκπετάσματος της πτέρυγας ($\theta = \pi/2$), σε αντίθεση με την κατανομή του όρου $\sin(2\theta)$.

5.4.2.1 Υπολογισμός της Άντωσης

Ο συντελεστής άντωσης υπολογίζεται ως:

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S}$$

και αντικαθιστώντας την σχέση (5.29) προκύπτει ότι:

$$C_L = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (5.52)$$

Χρησιμοποιώντας τον πολικό μετασχηματισμό (5.33) και αντικαθιστώντας την λύση για την $\Gamma(\theta)$ προκύπτει ότι:

$$C_L = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{\pi}^0 \left(b V_{\infty} \cdot \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) \left(-\frac{b}{2} \sin \theta \right) d\theta \Rightarrow$$

$$C_L = \frac{b^2}{S} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta \quad (5.53)$$

Για το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.53) ισχύει ότι:

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{για } n=1$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad , \quad \text{για } n \neq 1$$

Αντικαθιστώντας στην (5.53), προκύπτει ότι ο συντελεστής άντωσης εξαρτάται μόνο από τον πρώτο συντελεστή A_1 και δίνεται από τη σχέση:

$$C_L = \frac{b^2 \pi A_1}{2S} \Rightarrow \boxed{C_L = \frac{\pi A A_1}{2}} \quad (5.54)$$

όπου $A \equiv \frac{b^2}{S}$ ο λόγος επιμήκους. Η σχέση (5.54) δείχνει πως αύξηση του λόγου επιμήκους (A) οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή άντωσης (C_L) της πτέρυγας.

Ακόμη, μπορούμε να επιλύσουμε την (5.54) ως προς το συντελεστή A_1 και να τον αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (5.48) της γενικής κατανομής κυκλοφορίας. Τότε η $\Gamma(\theta)$ γίνεται:

$$\Gamma(\theta) = b V_{\infty} A_1 \sin \theta + \sum_{n=2}^N A_n \sin(n\theta) \Rightarrow$$

$$\Gamma(\theta) = \frac{2 b V_{\infty} C_L}{\pi A} \sin \theta + \sum_{n=2}^N A_n \sin(n\theta) \quad (5.55)$$

Η ανωτέρω εξίσωση συγκρίνεται με την ελλειπτική κατανομή της κυκλοφορίας, η οποία δίνεται από εκφράσεις (5.34) και (5.36). Παρατηρείται πως ο πρώτος όρος της γενικής κατανομής κυκλοφορίας (5.55) δίνει την ελλειπτική κατανομή.

5.4.2.2 Υπολογισμός της Επαγόμενης Αντίστασης

Ας υπολογίσουμε τώρα τον συντελεστή επαγόμενης αντίστασης C_{Di} . Ξεκινώντας από την έκφρασή του στην σχέση (5.42):

$$C_{Di} = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.56)$$

και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y = \frac{b}{2} \cos \theta$, αντικαθιστούμε τη λύση (5.48)

για την $\Gamma(\theta)$:

$$C_{Di} = \frac{b^2}{S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) \alpha_i(\theta) \sin \theta d\theta \quad (5.57)$$

Η γωνία α_i δίνεται από τη σχέση (5.23) :

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy} \right)}{y_0 - y} dy$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (5.49) για την παράγωγο $\frac{d\Gamma}{dy}$ καθώς και τον

μετασχηματισμό $y = \frac{b}{2} \cos \theta$ προκύπτει ότι:

$$\alpha_i(\theta_0) = \frac{1}{2\pi b V_\infty} \int_0^\pi \frac{d\Gamma/d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{b V_\infty}{2\pi b V_\infty} \sum_{n=1}^N n A_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (5.58)$$

Έχουμε όμως ότι:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0}$$

Συνεπώς, η (5.58) γίνεται:

$$\alpha_i(\theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0} \quad (5.59)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση (5.57) την έκφραση της επαγόμενης γωνίας, έχουμε:

$$\begin{aligned} C_{Di} &= \frac{b^2}{2S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \right) \cdot \sin \theta d\theta \Rightarrow \\ C_{Di} &= \frac{b^2}{2S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) \left(\sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta) \right) d\theta \end{aligned} \quad (5.60)$$

Ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\int_0^\pi \sin(m\theta) \sin(k\theta) d\theta = 0, \text{ για } m \neq k, \text{ και}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(k\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{για } m=k$$

Έτσι, ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης της (5.60) γίνεται:

$$C_{Di} = \frac{b^2}{2S} \left(\sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$C_{Di} = \frac{\pi}{4} A \sum_{n=1}^N n A_n^2 \quad (5.61)$$

όπου $A \equiv \frac{b^2}{S}$ είναι ο λόγος επιμήκους.

Θα συνδέσουμε τώρα τον συντελεστή C_{Di} με τον συντελεστή άντωσης C_L . Για τον σκοπό αυτό μετασχηματίζουμε την εξίσωση (5.61) ως εξής:

$$C_{Di} = \frac{\pi}{4} A \left(A_1^2 + \sum_{n=2}^N n A_n^2 \right) = \frac{\pi}{4} A A_1^2 \left(1 + \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{4} A A_1^2 (1 + \delta) \quad (5.62)$$

όπου:

$$\delta \equiv \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \quad (5.63)$$

Από τις (5.54) και (5.62) προκύπτει ότι:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A} (1 + \delta) \quad \text{ή} \quad (5.64)$$

$$\boxed{C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi e A}} \quad (5.65)$$

όπου ο όρος e ορίζεται ως:

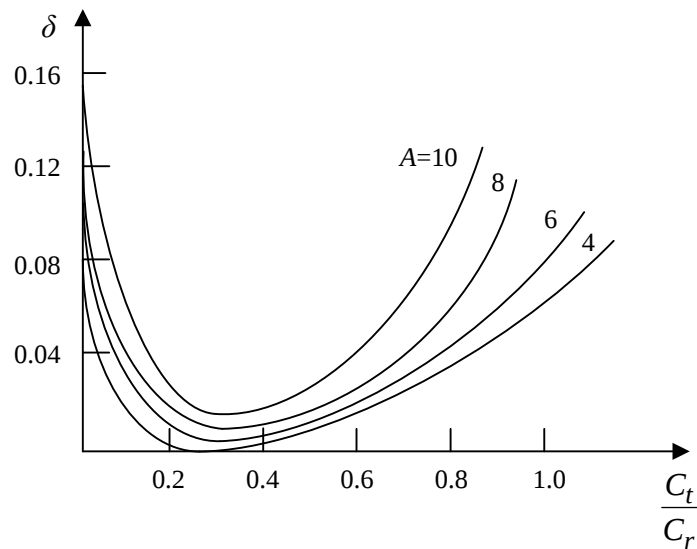
$$e \equiv \frac{1}{1 + \delta} \leq 1 \quad (5.66)$$

και ονομάζεται *συντελεστής Oswald*.

Η περίπτωση της ελλειπτικής πτέρυγας προκύπτει από τον πρώτο όρο της γενικής κατανομής κυκλοφορίας, όταν δηλαδή $A_1 \neq 0$ και $A_n = 0$ για $n \geq 2$. Επομένως, για την ελλειπτική πτέρυγα είναι $\delta = 0$ και $e = 1$ από τις (5.63) και (5.66) αντίστοιχα. Η

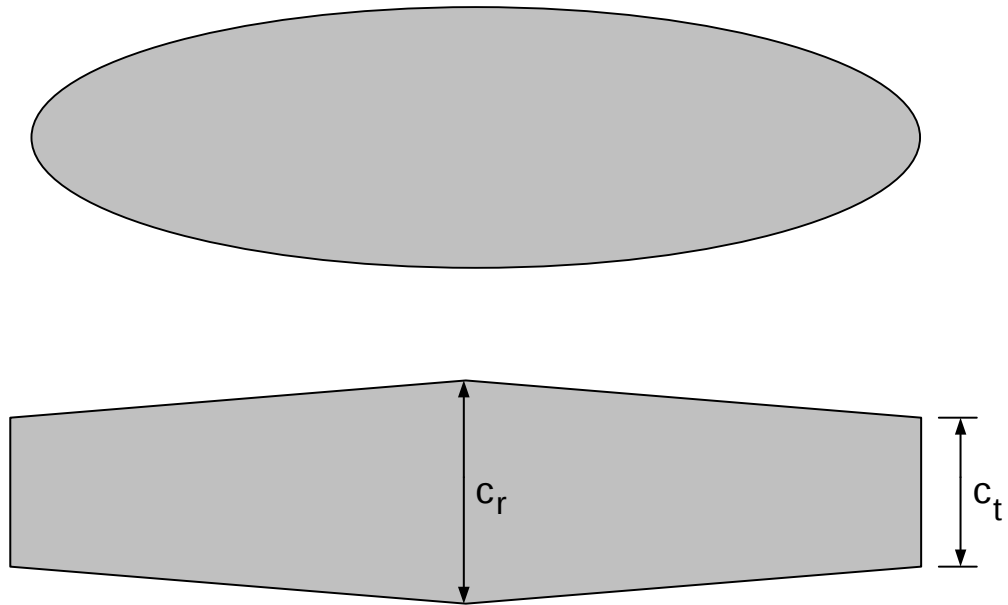
ελλειπτική πτέρυγα δηλαδή, παρουσιάζει τον μικρότερο συντελεστή C_{Di} για δεδομένα C_L και A .

Πειραματικά αποτελέσματα για τον συντελεστή δ απεικονίζονται στο Σχήμα 5.19.



Σχήμα 5.19: Ο συντελεστής δ συναρτῆσει του λόγου εκλέπτυνσης για διάφορες τιμές του λόγου διατάματος (A).

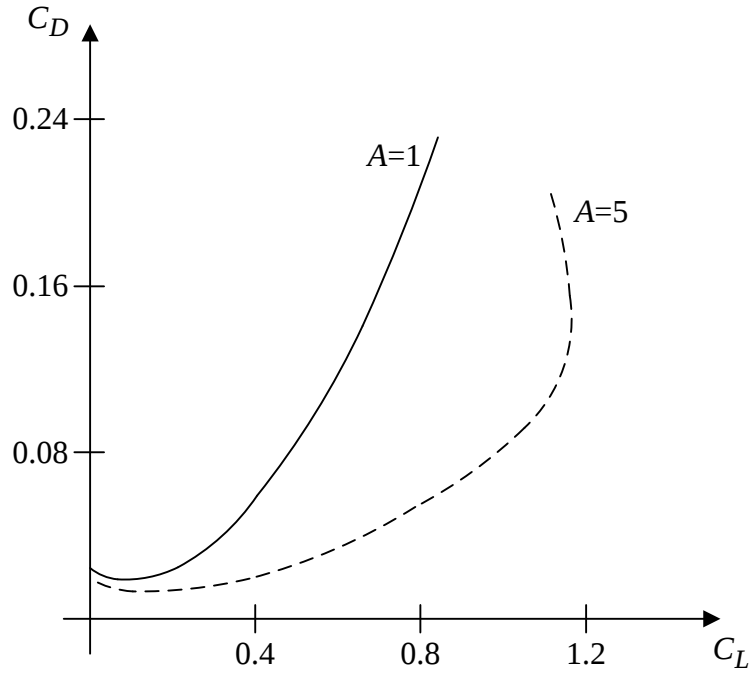
Παρατηρούμε ότι πτέρυγα με λόγο εκλέπτυνσης $(C_t / C_r) \cong 0.3$ είναι περίπου τόσο καλή όσο και η ελλειπτική του ίδιου λόγου επιμήκους (A). Επειδή η κατασκευή πτέρυγας ελλειπτικής μορφής είναι δύσκολη, μπορούμε να προσεγγίσουμε την γεωμετρία ἑλλειψης με τραπεζοειδή ("tapered") πτέρυγα, ὅπως δείχνει το Σχήμα 5.20.



Σχήμα 5.20: Προσέγγιση ελλειπτικής πτέρυγας με τραπεζοειδή ("tapered") πτέρυγα.

Τέλος, η σχέση (5.65) δείχνει πως αύξηση του λόγου επιμήκους (A) της πτέρυγας μειώνει τον συντελεστή επαγόμενης αντίστασης (C_{Di}). Το Σχήμα 5.21 απεικονίζει τη μεταβολή του συντελεστή συνολικής αντίστασης (C_D) ως προς το συντελεστή άντωσης (C_L) σε ορθογωνική πτέρυγα, για λόγους επιμήκους $A=1$ και $A=5$. Παρατηρείται πως για τον ίδιο συντελεστή άντωσης, η πτέρυγα με το μεγαλύτερο λόγο επιμήκους έχει μικρότερη αντίσταση.

Βέβαια, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη πως αύξηση του λόγου επιμήκους οδηγεί και σε αύξηση των καμπτικών φορτίων που ασκούνται στην περιοχή σύνδεσης πτέρυγας και ατράκτου. Επομένως, ο λόγος επιμήκους της πτέρυγας προκύπτει από έναν συμβιβασμό μεταξύ της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης και της δομικής αντοχής του αεροσκάφους.



Σχήμα 5.21: Μεταβολή του συντελεστή συνολικής αντίστασης (C_D) ως προς συντελεστή άντωσης (C_L) σε ορθογωνική πτέρυγα για διαφορετικές τιμές του λόγου επιμήκους (A).

Ανασκόπηση Παραδοχών της Θεωρίας Γραμμής Άντωσης

Οι γενικές παραδοχές της ασυμπίεστης και μη συνεκτικής ροής συμπληρώνονται και από τις ακόλουθες οι οποίες αφορούν ειδικά τη θεωρία της *Γραμμής Άντωσης*:

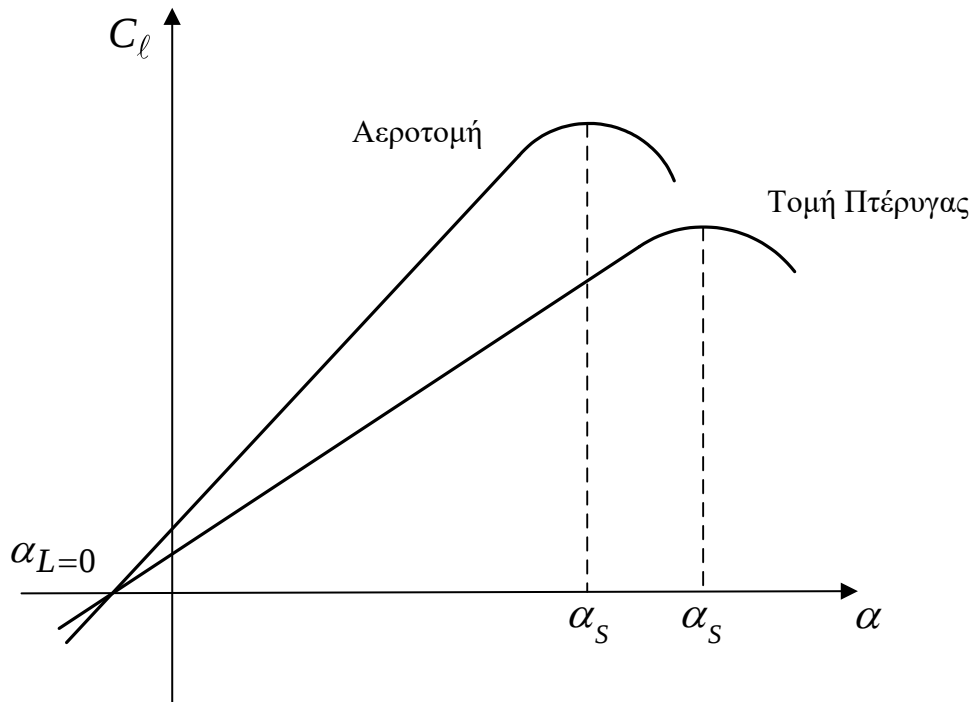
1. Η πτέρυγα είναι λεπτή, με μικρή καμπυλότητα κατά την χορδή και η γωνία πρόσπτωσης α είναι μικρή (παραδοχές θεωρίας λεπτής αεροτομής).
2. Η σχέση μεταξύ C_ℓ και α_{eff} είναι γραμμική, το οποίο ισχύει για μικρές γωνίες α .
3. Η πτέρυγα έχει σχετικά μεγάλο λόγο επιμήκους, έτσι ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η μεταβολή της κυκλοφορίας και άντωσης κατά το μήκος της χορδής (άξονας x). Στην παρούσα ανάπτυξη θεωρήσαμε μόνο μεταβολές κατά το εκπέτασμα (άξονας y).
4. Η πτέρυγα δεν έχει οπισθόκλιση.
5. Το φορτίο της πτέρυγας (L/S) είναι μέτριο, διαφορετικά θα είχαμε παραμόρφωση του απορρεύματος στροβιλότητας.

5.4.3 Σύγκριση συντελεστών άντωσης στις δυο και τρεις διαστάσεις

Θα εξετάσουμε τώρα πως συγκρίνεται ο συντελεστής άντωσης αεροτομής με τον συντελεστή άντωσης αντίστοιχης πτέρυγας, της οποίας οι τομές είναι η αεροτομή αυτή. Ο συντελεστής άντωσης της αεροτομής, όπως έχουμε δει, δίνεται από τη σχέση $C_\ell = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0})$, ενώ ο συντελεστής άντωσης σε μια θέση κατά μήκος του εκπετάσματος της αντίστοιχης πτέρυγας δίνεται από την σχέση $C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0} - \alpha_i)$. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής άντωσης της τομής της πτέρυγας είναι μικρότερος από τον συντελεστή της αντίστοιχης αεροτομής. Όσο αυξάνεται ο λόγος του εκπετάσματος A , τόσο μειώνεται η επιρροή των στροβίλων των άκρων στη θέση της πτέρυγας που εξετάζουμε, και άρα τόσο μικρότερη είναι η τιμή της α_i με αποτέλεσμα ο συντελεστής άντωσης της τομής της πτέρυγας να τείνει στο συντελεστή άντωσης αεροτομής.

Η επόμενη σύγκριση αφορά τις γωνίες μηδενικής άντωσης $\alpha_{L=0}$ για μη συμμετρική αεροτομή και για την αντίστοιχη της πτέρυγα. Στη γωνία μηδενικής άντωσης είναι $C_\ell = C_L = 0$ και επομένως $\alpha_i = 0$. Άρα η γωνία $\alpha_{L=0}$ είναι η ίδια τόσο για την αεροτομή όσο και για την πτέρυγα. Το Σχήμα 5.22 συγκρίνει τους συντελεστές άντωσης για την αεροτομή και για τμήμα της αντίστοιχης πτέρυγας σύμφωνα με τα ανωτέρω. Η αεροτομή "δίνει" μεγαλύτερη άντωση από την αντίστοιχη της πτέρυγα για την ίδια γωνία προσβολής. Αύξηση του λόγου διατάματος (A) "περιστρέφει" τη καμπύλη του C_ℓ της τομής της πτέρυγας έτσι ώστε να πλησιάζει αυτή της αεροτομής.

Ακόμη, στο Σχήμα 5.22 παρατηρείται ότι η κλίση της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τομή της πτέρυγας είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της αεροτομής. Αυτό συμβαίνει επειδή στην εξίσωση $C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0} - \alpha_i)$ που αντιστοιχεί στην τομή της πτέρυγας, η γωνία α_i εξαρτάται από τη γωνία προσβολής (α), κάτι το οποίο συνάγεται και από την εξίσωση (5.27) της θεωρίας γραμμής άντωσης.



Σχήμα 5.22: Σύγκριση συντελεστή άντωσης για αεροτομή και για τομή πτέρυγας.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η γωνία απώλειας στήριξης (α_S) της αεροτομής είναι μικρότερη από αυτή της αντίστοιχης πτέρυγας, δηλαδή η αποκόλληση της ροής επέρχεται νωρίτερα στην αεροτομή σε σχέση με την πτέρυγα. Αυτή η διαφορά εξηγείται φυσικά από το γεγονός ότι στη δισδιάστατη περίπτωση της αεροτομής, η ροή «περιορίζεται» να διέλθει στο επάνω και στο κάτω μέρος της αεροτομής, ενώ στην τρισδιάστατη πτέρυγα μπορεί επιπλέον να διέλθει και πλευρικά, κατά το εκπέτασμα. Η πλευρική κίνηση του ρευστού «ανακουφίζει» τη ροή, δηλαδή αποτρέπει την αποκόλληση του οριακού στρώματος. Αυτό είναι ένα παράδειγμα του γενικού φαινομένου της «ανακούφισης» των τρισδιάστατων ροών ("3-D relieving effect"), το οποίο αφορά όλους τους τύπους τρισδιάστατων ροών.

5.5 Ολική Αντίσταση Πτέρυγας

Ο συντελεστής ολικής αντίστασης της τρισδιάστατης πτέρυγας (C_D) σε ασυμπίεστη ροή είναι το άθροισμα των συντελεστών της αντίστασης τριβής (C_{Df}), της αντίστασης πίεσης ή αντίστασης μορφής (C_{Dp}) και της επαγόμενης αντίστασης (C_{Di}):

$$C_D = C_{Df} + C_{Dp} + C_{Di} \quad (5.67)$$

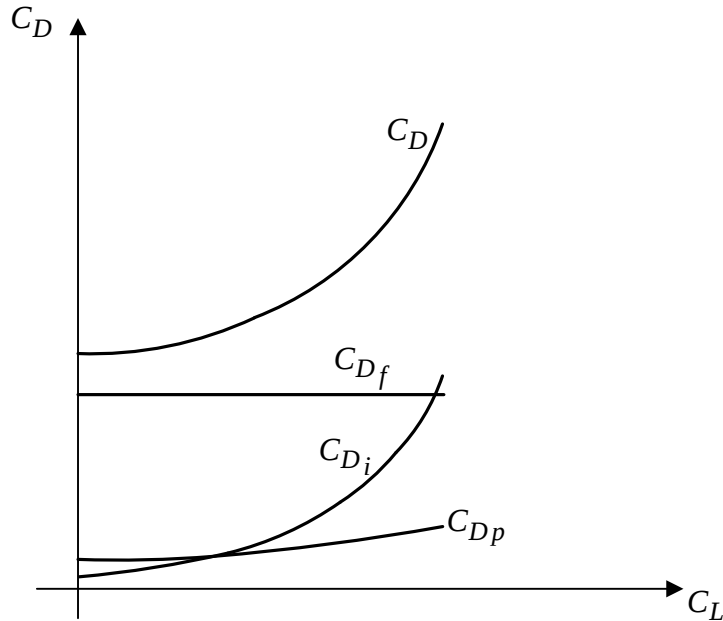
Αντικαθιστώντας τον συντελεστή επαγόμενης αντίστασης από την σχέση (5.65), προκύπτει ότι:

$$C_D = C_{Df} + C_{Dp} + \frac{C_L^2}{\pi e A} \quad (5.68)$$

Η αντίσταση τριβής (“friction drag”) και η αντίσταση πίεσης ή μορφής (“pressure / form drag”) οφείλονται στην συνεκτικότητα του ρευστού. Η αντίσταση τριβής οφείλεται στις διατμητικές τάσεις που εξασκούνται από το ρευστό στην επιφάνεια της αεροτομής. Η αντίσταση μορφής οφείλεται στην αποκόλληση του οριακού στρώματος που συμβαίνει στην άνω επιφάνεια της αεροτομής.

Το Σχήμα 5.23 απεικονίζει τη μεταβολή των επιμέρους συντελεστών αντίστασης αλλά και του ολικού συντελεστή αντίστασης της πτέρυγας σε συνάρτηση με το συντελεστή άντωσης. Ο συντελεστής αντίστασης τριβής (C_{Df}) είναι περίπου σταθερός ως προς το συντελεστή άντωσης (C_L) για σχετικά μικρές γωνίες προσβολής. Αυτό συμβαίνει διότι ο C_{Df} εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds της ροής και όχι από τη γωνία προσβολής, η οποία είναι η παράμετρος που μεταβάλλει τον συντελεστή άντωσης. Για χαμηλές τιμές του C_L , η αντίσταση τριβής εκφράζει σχεδόν το σύνολο της αντίστασης. Όσον αφορά την αντίσταση πίεσης, αυτή λαμβάνει σημαντικές τιμές μόνο για μεγάλες τιμές του συντελεστή άντωσης (C_L). Τέλος, ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης (C_{Di}) είναι ανάλογος του τετραγώνου του συντελεστή άντωσης, όπως φαίνεται και από τη σχέση (5.65). Επομένως η επαγόμενη αντίσταση είναι ιδιαίτερα υψηλή κατά τις φάσεις της απογείωσης και της προσγείωσης, όπου ο C_L έχει τις μεγαλύτερες τιμές,

αλλά ακόμα και κατά την κανονική πτήση αναπαριστά περίπου το 25 % της συνολικής αντίστασης.



Σχήμα 5.23: Μεταβολή των συντελεστών αντίστασης τριβής (C_{Df}), αντίστασης πίεσης (C_{Dp}), επαγόμενης αντίστασης (C_{Di}) αλλά και του ολικού συντελεστή αντίστασης (C_D) της πτέρυγας σε συνάρτηση με το συντελεστή άντωσης (C_L).

Τέλος, σημειώνεται ότι τα τμήματα της ολικής αντίστασης που παρουσιάστηκαν παραπάνω αφορούν ασυμπίεστη ροή. Σε συμπίεστες ροές προστίθεται επιπλέον και η αντίσταση λόγω των κυμάτων κρούσης (“shock waves”) που παρουσιάζονται στη ροή.

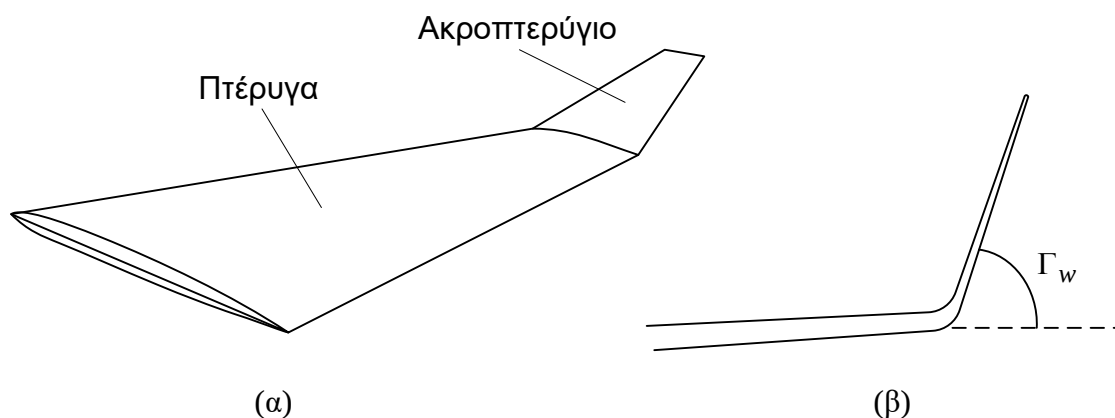
5.6 Αεροδυναμικές Επεμβάσεις στην Πτέρυγα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται διατάξεις που προστίθενται στη δομή της πτέρυγας με σκοπό τόσο τη μείωση της επαγόμενης αντίστασης όσο και την αποφυγή της εκτεταμένης αποκόλλησης του οριακού στρώματος, η οποία οδηγεί σε απώλεια στήριξης της πτέρυγας.

5.6.1 Ακροπτερύγια (“winglets”) για την μείωση της επαγόμενης αντίστασης

Μια συνήθης διάταξη που χρησιμοποιείται για την μείωση της επαγόμενης αντίστασης είναι τα ακροπτερύγια (“winglets”). Πρόκειται όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.24 για μικρά πτερύγια τα οποία τοποθετούνται στα άκρα της πτέρυγας. Στα σημεία τοποθέτησης των ακροπτερυγίων, γίνεται τοπική αύξηση της δίδερης γωνίας (Γ_w) έτσι ώστε αυτά να βρίσκονται σε κλίση σε σχέση με το υπόλοιπο σώμα της πτέρυγας. Τα ακροπτερύγια προκαλούν την διάχυση των ακροστροβίλων σε μεγαλύτερη απόσταση από την πτέρυγα, κάτι το οποίο οδηγεί σε μείωση του κατωρεύματος που επάγουν και σε μείωση της επαγόμενης αντίστασης. Η δίδερη γωνία (Γ_w) στα σημεία σύνδεσης των ακροπτερυγίων, επιλέγεται μικρότερη των 90° , έτσι ώστε τα ακροπτερύγια να συνεισφέρουν και αυτά στην άντωση της πτέρυγας, αλλά και να αυξάνουν τον λόγο επιμήκους (A) της πτέρυγας.

Αξίζει να σημειωθεί πως η προσθήκη των ακροπτερυγίων αυξάνει την δομική καταπόνηση στην περιοχή σύνδεσης της πτέρυγας με την άτρακτο του αεροσκάφους. Επίσης, τα ακροπτερύγια συνεισφέρουν στην αύξηση της αντίστασης τριβής και της αντίστασης πίεσης. Επομένως, η μείωση που προκαλούν στην επαγόμενη αντίσταση πρέπει να είναι αρκετή για να δικαιολογείται η εισαγωγή τους. Τα ακροπτερύγια μπορούν να μειώσουν την συνολική αντίσταση κατά την κανονική πτήση έως και 5 % σε σύγχρονα αεροσκάφη.



Σχήμα 5.24: Ακροπτερύγιο πτέρυγας: (α) τρισδιάστατη όψη, (β) εμπρόσθια όψη

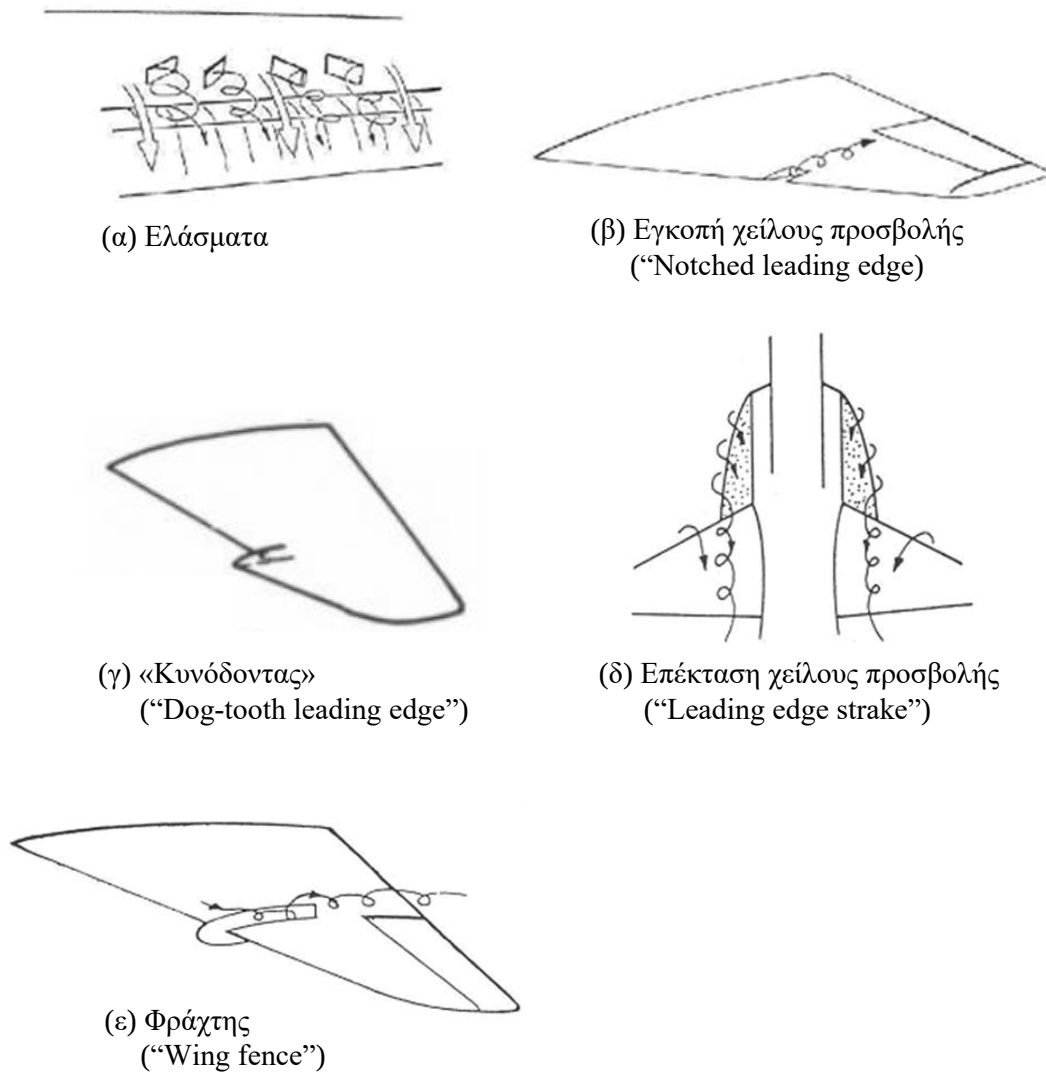
5.6.2 Διατάξεις ελέγχου του οριακού στρώματος για την αποφυγή αποκόλλησης

Η εκτεταμένη αποκόλληση του οριακού στρώματος σε μια πτέρυγα οδηγεί σε σημαντική αύξηση της αντίστασης ή ακόμα και σε απώλεια στήριξης της πτέρυγας. Για την αποφυγή της εκτεταμένης αποκόλλησης, προστίθενται συχνά στις πτέρυγες διατάξεις οι οποίες αποσκοπούν στον έλεγχο του οριακού στρώματος. Οι διατάξεις αυτές διακρίνονται σε: (α) *παθητικές*, οι οποίες δεν χρειάζονται ισχύ για την λειτουργία τους, και (β) *ενεργητικές*, οι οποίες χρειάζονται ισχύ από το σύστημα πρόωσης του αεροσκάφους.

Οι περισσότερες ενεργητικές διατάξεις βασίζονται στην *προσροή* (“blowing”) ή την *αναρρόφηση* (“suction”) ρευστού προς και από το τμήμα του οριακού στρώματος κοντά στο τοίχωμα. Μέσω των τεχνικών αυτών αυξάνεται η ταχύτητα στο τμήμα του οριακού στρώματος κοντά στο τοίχωμα, με αποτέλεσμα να καθυστερεί η αποκόλληση. Οι ενεργητικές διατάξεις δεν χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα συχνά λόγω της απαίτησης ισχύος από το σύστημα πρόωσης, και για αυτό τον λόγο δεν θα αναπτυχθούν σε αυτό το κεφάλαιο.

Όσον αφορά τον παθητικό έλεγχο του οριακού στρώματος, αυτός γίνεται κυρίως με διατάξεις οι οποίες δημιουργούν στροβίλους κατά τη διεύθυνση της ροής και καλούνται *γεννήτριες στροβίλων* (“vortex generators”). Οι στρόβιλοι ενεργοποιούν το κατώτερο τμήμα του οριακού στρώματος, μεταφέροντας σε αυτό ρευστό υψηλότερης ταχύτητας, που προέρχεται από τα ανώτερα τμήματα και από την ελεύθερη ροή. Με αυτόν τον τρόπο καθυστερεί η αποκόλληση του οριακού στρώματος.

Η πλέον συνήθης μορφή γεννητριών στροβίλων είναι μικρά ελάσματα αεροδυναμικού σχήματος, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 5.25(α). Τα ελάσματα είναι σταθερά τοποθετημένα σε μικρή κλίση ως προς την απέραντη ροή, έτσι ώστε να την διαταράσσουν και να δημιουργούνται οι στρόβιλοι. Τα ελάσματα εμφανίζονται σε διαδοχικές σειρές επί μεγάλου μήκους κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας.

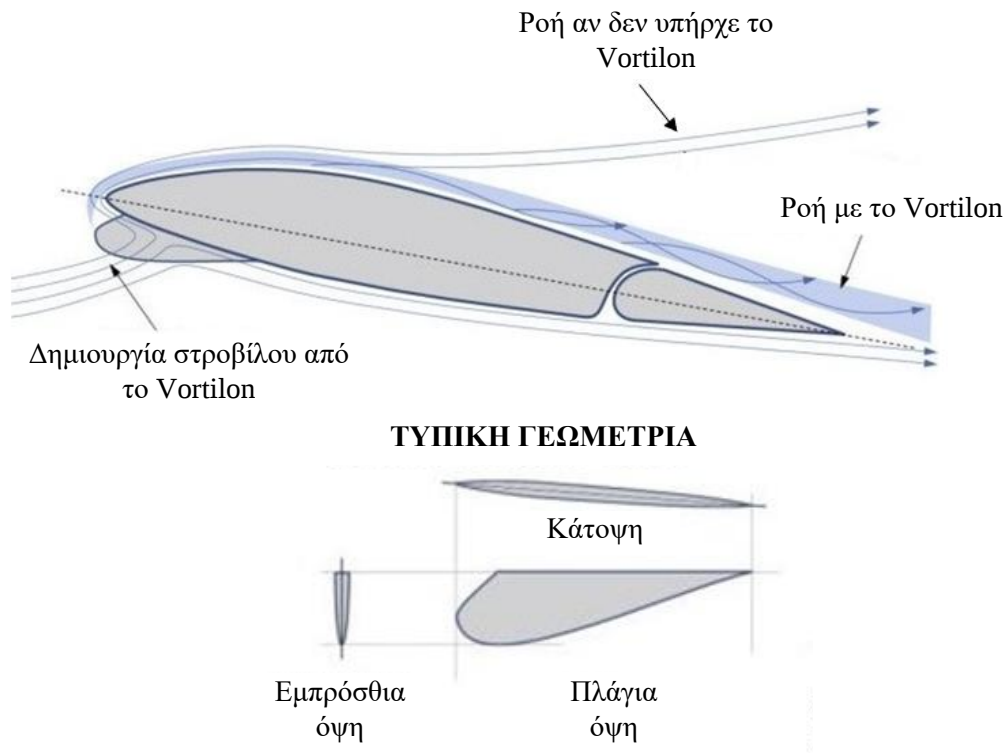


Σχήμα 5.25: Γεννήτριες στροβίλων για τον παθητικό έλεγχο του οριακού στρώματος

Άλλου τύπου γεννήτριες στροβίλων είναι οι *εγκοπές* ("notched leading edge") και οι *«κυνόδοντες»* ("dog tooth leading edge"), που παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.25(β) και (γ) αντίστοιχα. Αυτού του τύπου οι γεννήτριες στροβίλων είναι τοπικές διαμορφώσεις της πτέρυγας στην περιοχή του χείλους προσβολής. Συχνά τοποθετούνται κοντά στα άκρα της πτέρυγας, έτσι ώστε να περιορίσουν την αποκόλληση της ροής στην περιοχή των πηδαλίων κλίσης ("ailerons"), τα οποία βρίσκονται στο πίσω τμήμα της πτέρυγας. Ακόμα μία διάταξη είναι η *επέκταση του χείλους προσβολής* ("leading edge strake"), που τοποθετείται στο σημείο σύνδεσης της πτέρυγας με την άτρακτο και απεικονίζεται στο Σχήμα 5.25(δ). Το τμήμα της

επέκτασης έχει οξύ χείλος προσβολής, με αποτέλεσμα την δημιουργία ενός ισχυρού στροβίλου όταν η ροή προσπίπτει σε αυτό.

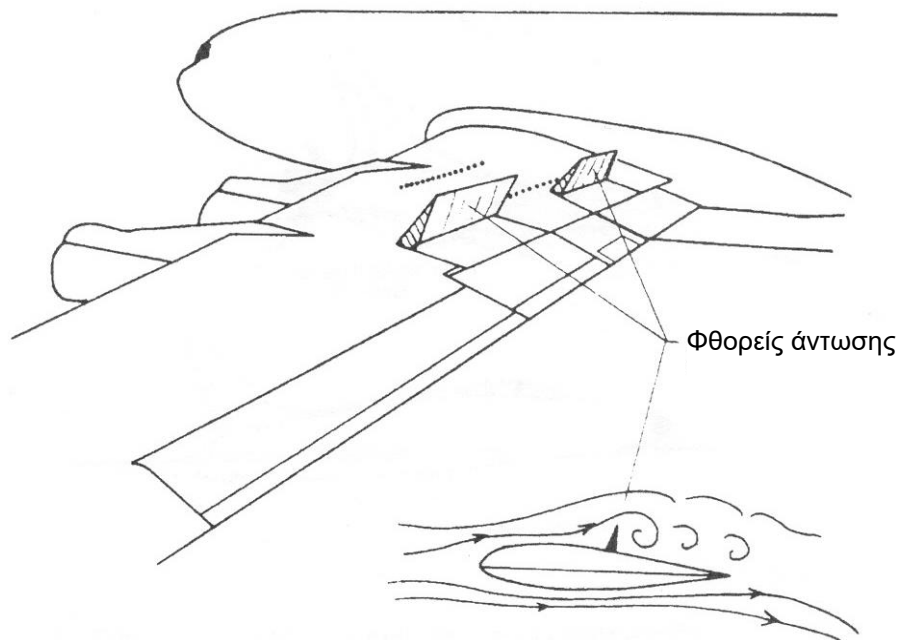
Μία ακόμα διάταξη δημιουργίας στροβίλων είναι ο «φράχτης» (“wing fence”), ο οποίος είναι τοποθετημένος στην άνω επιφάνεια της πτέρυγας και απεικονίζεται στο Σχήμα 5.25(ε). Ο φράχτης αλληλεπιδρά με την πλευρική ροή κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας, με αποτέλεσμα τη δημιουργία των στροβίλων. Μια διάταξη με αντίστοιχη λειτουργία είναι το “vortilon”, το οποίο είναι ένα εξόγκωμα αεροδυναμικού σχήματος κοντά στο χείλος προσβολής στην κάτω επιφάνεια της πτέρυγας (Σχήμα 5.26). Σε μεγάλες γωνίες προσβολής, ο στρόβιλος που δημιουργείται από το vortilon μεταφέρεται στην άνω επιφάνεια της πτέρυγας, περιορίζοντας την αποκόλληση.



Σχήμα 5.26: “Vortilon” και ο στρόβιλος που παράγει στη άνω επιφάνεια της πτέρυγας.

5.6.3 Άλλες διατάξεις

Το ζητούμενο των βελτιώσεών μας στην πτέρυγα δεν είναι πάντα η αύξηση της άντωσης και η μείωση της αντίστασης. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες θέλουμε ακριβώς το αντίθετο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στην διαδικασία καθόδου ενός αεροσκάφους ή και κατά την προσγείωση χρειάζεται τόσο η αύξηση της αντίστασης όσο και η μείωση της άντωσης. Η αύξηση της αντίστασης μπορεί να γίνει με κατάλληλες διατάξεις που ονομάζονται *αερόφρενα* (“*airbrakes*”). Οι διατάξεις αυτές τοποθετούνται τόσο στην πτέρυγα όσο και σε άλλα τμήματα του αεροσκάφους κάθετα στην ροή. Συνδυασμός αύξησης αντίστασης και μείωσης της άντωσης επιτυγχάνεται επίσης και με τους φθορείς άντωσης (“*spoilers*”) οι οποίοι απεικονίζονται στο Σχήμα 5.27. Αυτοί τοποθετούνται στην άνω επιφάνεια της πτέρυγας και η έκτασή τους προκαλεί αποκόλληση του οριακού στρώματος με αποτέλεσμα την μείωση της άντωσης και την αύξηση της αντίστασης. Η ασύμμετρη έκτασή τους χρησιμοποιείται και για την υποβοήθηση της περιστροφής του αεροσκάφους ως προς τον διαμήκη άξονα (“*roll*”), ειδικά σε μικρές ταχύτητες στις οποίες τα πηδάλια κλίσης (*ailerons*) από μόνα τους δεν προσφέρουν το επιθυμητό αποτέλεσμα.



Σχήμα 5.27: Φθορείς άντωσης πτέρυγας.

5.7 Παραδείγματα – Ασκήσεις

5.7.1 Αεροδυναμική ανάλυση ελλειπτικής πτέρυγας

Δίνεται ελλειπτική πτέρυγα με εκπέτασμα $b=16m$ και λόγο επιμήκους $A=8$. Η πτέρυγα κινείται με ταχύτητα $V=120 km/h$ και η φόρτισή της είναι $(W/S)=1000 N/m^2$. Επίσης δίνεται η πυκνότητα του αέρα $\rho=1,23 kg/m^3$. Να υπολογιστούν:

1. Ο συντελεστής άντωσης C_L της πτέρυγας.
2. Η επαγόμενη από την πτέρυγα ταχύτητα w_i , η γωνία α_i και η αντίσταση D_i .

Λύση

1.

Για τον συντελεστή άντωσης έχουμε από τον ορισμό:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

Η επιφάνεια της πτέρυγας είναι προσεγγιστικά: $S = \frac{b^2}{A} = 32 m^2$. Για την άντωση L

έχουμε ότι στην κανονική πτήση $L = W = (W/S) \cdot S = 32000 N$. Επίσης η ταχύτητα

$V_\infty = 120 \cdot 1000 / 3600 = 33,33 m/s$. Αντικαθιστώντας όλα τα γνωστά μεγέθη έχουμε

τελικά:

$$C_L = \frac{32000}{\frac{1}{2} \cdot 1,23 \cdot (33,33)^2 \cdot 32} \Rightarrow C_L = 1,46.$$

2.

Η επαγόμενη ταχύτητα δίνεται από τη σχέση (5.39) $w_i = -\frac{\Gamma_0}{2b}$, όπου από τη σχέση

(5.36) είναι:

$$\Gamma_0 = \frac{2 \cdot V \cdot S \cdot C_L}{b \cdot \pi} \Rightarrow \Gamma_0 = \frac{2 \cdot 33,33 \cdot 32 \cdot 1,46}{16 \cdot \pi} \Rightarrow \Gamma_0 = 61.958 \text{ m}^2 / \text{s} \text{ και}$$

$$w_i = - \frac{61.958}{2 \cdot 16} \Rightarrow w_i = - 1.936 \text{ m} / \text{s}.$$

Η επαγόμενη γωνία υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (5.41) ως:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi A} = \frac{1,46}{\pi \cdot 8} \Rightarrow \alpha_i = 0.0581 \text{ rad} \text{ ή } \alpha_i = 3,33^\circ$$

Τέλος η επαγόμενη αντίσταση θα υπολογιστεί από τη σχέση $D_i = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{Di} S$.

Από την 5.46 έχουμε: $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A} = \frac{(1,46)^2}{\pi \cdot 8} \Rightarrow C_{Di} = 0,085$. Επομένως:

$$D_i = \frac{1}{2} \cdot 1,23 \cdot (33,33)^2 \cdot 0,085 \cdot 32 \Rightarrow D_i = 1858,67 \text{ N}$$

ή διαφορετικά $D_i = 0,058L$ δηλαδή η επαγόμενη αντίσταση ισούται με το 5,8% της άντωσης.

5.7.2 Κλίση της καμπύλης $C_L - \alpha$ σε ελλειπτική πτέρυγα

Θεωρείστε ελλειπτική πτέρυγα χωρίς γεωμετρική και αεροδυναμική στρέψη.

1. Δείξτε ότι ο ολικός συντελεστής άντωσης (C_L) είναι ίσος με τον συντελεστή άντωσης των τοπικών αεροτομών της πτέρυγας (C_ℓ)
2. Βρείτε την κλίση της καμπύλης $C_L - \alpha$, όπου α η γωνία προσβολής.

Λύση

1.

Η συνολική άντωση της πτέρυγας (L) συνδέεται με την τοπική άντωση $L(y)$ στη θέση y του εκπετάσματος μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L(y) dy \quad (I)$$

Οι συντελεστές τοπικής άντωσης ($C_\ell(y)$) και ολικής άντωσης (C_L) ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S} \quad \text{και} \quad C_\ell(y) \equiv \frac{L(y)}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y)} \quad (II)$$

όπου S η επιφάνεια κάτοψης της πτέρυγας και $c(y)$ η χορδή των τοπικών αεροτομών της.

Επιλύοντας τις σχέσεις (II) ως προς L και $L(y)$ και αντικαθιστώντας στην σχέση (I) προκύπτει ότι:

$$C_L \cdot \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S = \int_{-b/2}^{b/2} C_\ell(y) \cdot \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y) dy \Rightarrow$$

$$C_L = \frac{1}{S} \int_{-b/2}^{b/2} C_\ell(y) \cdot c(y) dy$$

Όμως, μέσω της εξίσωσης (5.46), αποδείχθηκε πως σε ελλειπτική πτέρυγα χωρίς γεωμετρική και αεροδυναμική στρέψη, ο συντελεστής άντωσης των τοπικών αεροτομών της πτέρυγας (C_ℓ) είναι σταθερός κατά το εκπέτασμα y . Επομένως ο C_ℓ εξέρχεται από το ολοκλήρωμα της ανωτέρω σχέσης:

$$C_L = C_\ell \cdot \frac{1}{S} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} c(y) dy$$

Για την επιφάνεια κάτοψης της πτέρυγας ισχύει ότι $S = \int_{-b/2}^{b/2} c(y) dy$ και επομένως η

ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$C_L = C_\ell \quad (\text{III})$$

Επομένως, ο ολικός συντελεστής άντωσης (C_L) είναι ίσος με τον συντελεστή άντωσης των τοπικών αεροτομών της πτέρυγας (C_ℓ), ο οποίος είναι σταθερός κατά το εκπέτασμα y .

2.

Συνδυάζοντας την εξίσωση (III) με την εξίσωση (5.46), προκύπτει ότι για την ελλειπτική πτέρυγα ο ολικός συντελεστής άντωσης είναι:

$$C_L = 2\pi (\alpha - \alpha_i - \alpha_{L=0})$$

Για ελλειπτική πτέρυγα, η επαγόμενη γωνία (α_i) δίνεται από τη σχέση (5.41):

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi A}$$

όπου A ο λόγος επιμήκους.

Συνδυάζοντας τις δύο ανωτέρω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$C_L = 2\pi \left(\alpha - \frac{C_{L=0}}{\pi A} \right) \Rightarrow$$

$$C_L = 2\pi \alpha - \frac{2C_{L=0}}{A}$$

και επιλύοντας ως προς τον συντελεστή άντωσης C_L , έχουμε:

$$C_L = \frac{2\pi \alpha - 2\pi \alpha_{L=0}}{1 + \frac{2}{A}}$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση ως προς τη γωνία προσβολής (α), προκύπτει τελικά η κλίση της καμπύλης $C_L - \alpha$:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{A}} \quad (IV)$$

Σημειώνεται ότι $\frac{d\alpha_{L=0}}{d\alpha} = 0$, αφού η γωνία $\alpha_{L=0}$ εξαρτάται μόνο από την καμπυλότητα των τοπικών αεροτομών.

Από την σχέση (IV) προκύπτει ότι η κλίση $\frac{dC_L}{d\alpha}$ για την ελλειπτική πτέρυγα είναι μικρότερη από 2π , η οποία είναι η τιμή της κλίσης για δισδιάστατη αεροτομή. Για παράδειγμα, για $A=6$, η κλίση έχει τιμή $\frac{dC_L}{d\alpha} = 1.5\pi$. Όσο αυξάνεται ο λόγος επιμήκους (A) η κλίση $\frac{dC_L}{d\alpha}$ τείνει στην τιμή 2π .

5.7.3 Εφαρμογή θεωρίας γραμμής άντωσης για ορθογωνική πτέρυγα

Δίνεται ορθογωνική πτέρυγα με εκπέτασμα $b = 12m$ και λόγο επιμήκους $A = 6$. Να υπολογιστεί ο συντελεστής άντωσης C_L και επαγόμενης αντίστασης C_{Di} με τη θεωρία γραμμής άντωσης. Να θεωρηθούν γνωστά η γωνία προσβολής (α) της ροής και η γωνία $\alpha_{L=0}$.

Λύση

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές A_n της κατανομής κυκλοφορίας

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_{ref} \cdot \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta).$$

Οι συντελεστές θα υπολογισθούν μέσω της σχέσης (5.51):

$$\alpha(\theta) = \frac{b}{\pi c(\theta)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} + \alpha_{L=0}(\theta) \quad (I)$$

όπου τα α , c και $\alpha_{L=0}$ είναι σταθερά λόγω της γεωμετρίας της πτέρυγας.

Η χορδή της πτέρυγας θα πρέπει να υπολογιστεί. Η επιφάνεια της ορθογωνικής πτέρυγας είναι $S = b \cdot c$, ενώ ο λόγος επιμήκους ορίζεται ως $A \equiv b^2/S$.

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις, προκύπτει ότι η χορδή είναι $c = b/A = 2m$.

Η εξίσωση (I) απλοποιείται ως:

$$\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \left(\frac{b}{\pi c} + \frac{n}{2 \sin \theta} \right) = \alpha - \alpha_{L=0} \quad (II)$$

Στην παραπάνω σχέση θα κρατήσουμε τους πρώτους 5 όρους ($N=5$). Ακόμη, εφόσον η ορθογωνική πτέρυγα είναι συμμετρική ως προς το μέσο του εκπετάσματος ($\theta = 90^\circ$) θα έχει και συμμετρική κατανομή κυκλοφορίας $\Gamma(\theta)$. Επομένως, θα θεωρηθεί ότι $A_2 = A_4 = 0$, επειδή οι όροι $\sin 2\theta$ και $\sin 4\theta$ δεν είναι συμμετρικοί ως προς $\theta = 90^\circ$.

Επομένως η σχέση (II) γράφεται ως εξής:

$$A_1 \sin \theta \left(\frac{b}{\pi c} + \frac{1}{2 \sin \theta} \right) + A_3 \sin 3\theta \left(\frac{b}{\pi c} + \frac{3}{2 \sin \theta} \right) + A_5 \sin 5\theta \left(\frac{b}{\pi c} + \frac{5}{2 \sin \theta} \right) = \alpha - \alpha_{L=0} \quad (\text{III})$$

Για την εύρεση των αγνώστων A_1, A_3, A_5 θα θεωρήσουμε την ανωτέρω σχέση σε 3 θέσεις κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας, που αντιστοιχούν σε 3 διαφορετικές γωνίες θ , και θα προκύψει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Λόγω συμμετρίας της πτέρυγας και της κατανομής κυκλοφορίας, επιλέγονται γωνίες που αντιστοιχούν μόνο στο ήμισυ της πτέρυγας ($0 < \theta \leq 90^\circ$). Έστω $\theta = 30^\circ, \theta = 60^\circ, \theta = 90^\circ$. Αντικαθιστώντας τις γωνίες διαδοχικά στη παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα 3×3 :

$$\begin{aligned} \theta = 30^\circ &\Rightarrow 1,455A_1 + 4,910A_3 + 3,455A_5 = \alpha - \alpha_{L=0} \\ \theta = 60^\circ &\Rightarrow 2,154A_1 - 4,154A_5 = \alpha - \alpha_{L=0} \\ \theta = 90^\circ &\Rightarrow 2,410A_1 - 3,410A_3 + 4,410A_5 = \alpha - \alpha_{L=0} \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,480 (\alpha - \alpha_{L=0}) \\ A_3 &= 0,056 (\alpha - \alpha_{L=0}) \\ A_5 &= 0,008 (\alpha - \alpha_{L=0}) \end{aligned}$$

Συνεπώς μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον συντελεστή άντωσης από τη σχέση (5.54):

$$C_L = \frac{\pi \cdot A \cdot A_1}{2} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 0,480}{2} (\alpha - \alpha_{L=0}) \Rightarrow C_L = 4,524 (\alpha - \alpha_{L=0}) \quad (\text{IV})$$

Ο συντελεστής αντίστασης δίνεται από τη σχέση $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi e A}$ όπου e είναι ο συντελεστής Oswald για τον οποίο έχουμε $e = 1/(1 + \delta)$ όπου

$$\delta = \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = 3 \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + 5 \left(\frac{A_5}{A_1} \right)^2 \Rightarrow \delta = 0,042.$$

Άρα ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης μπορεί να γραφεί ως

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A} (1 + \delta) \Rightarrow C_{Di} = 1,042 \frac{C_L^2}{\pi A} \quad (V)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η επαγόμενη αντίσταση της ορθογωνικής μας πτέρυγας είναι κατά 4,2% μεγαλύτερη από την αντίσταση αντίστοιχης ελλειπτικής πτέρυγας (σχέση (5.44)).

Αντικαθιστώντας την σχέση (IV) στην (V) προκύπτει εναλλακτική έκφραση για το συντελεστή αντίστασης:

$$C_{Di} = 1,042 \frac{[4,524 (\alpha - \alpha_{L=0})]^2}{\pi A} \Rightarrow C_{Di} = 1,131 (\alpha - \alpha_{L=0})^2 \quad (VI)$$

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί κρατώντας $N = 7$ όρους στην σχέση (II), έτσι ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα. Σε αυτήν την περίπτωση οι άγνωστοι συντελεστές προς προσδιορισμό θα είναι οι A_1, A_3, A_5, A_7 , αφού λόγω συμμετρίας της κατανομής κυκλοφορίας θα ισχύει ότι $A_2 = A_4 = A_6 = 0$. Θα προκύψει επομένως ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.

Με την επίλυση του συστήματος, προκύπτουν οι παρακάτω τιμές για τους συντελεστές:

$$A_1 = 0,480 (\alpha - \alpha_{L=0}) \quad , \quad A_3 = 0,058 (\alpha - \alpha_{L=0}) \\ A_5 = 0,011 (\alpha - \alpha_{L=0}) \quad , \quad A_7 = 0,002 (\alpha - \alpha_{L=0})$$

, ενώ οι συντελεστές άντωσης και επαγόμενης αντίστασης έχουν τις παρακάτω τιμές:

$$C_L = 4,524 (\alpha - \alpha_{L=0}) \quad , \quad C_{Di} = 1,136 (\alpha - \alpha_{L=0})^2$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές που προέκυψαν για $N = 7$ με τις τιμές που προέκυψαν για $N = 5$ (σχέσεις (IV) και (VI)), παρατηρείται ότι ο συντελεστής άντωσης δεν αλλάζει (στα τρία πρώτα του δεκαδικά ψηφία), ενώ ο συντελεστής αντίστασης μεταβάλλεται κατά μόλις 0.4 %. Επομένως, για $N = 7$ η θεωρία γραμμής άντωσης έχει συγκλίνει, δηλαδή οι συντελεστές C_L και C_{Di} δε θα αλλάξουν σημαντικά με περαιτέρω αύξηση του N .

5.7.4 Επίδραση του εδάφους στο κατώρευμα πτέρυγας

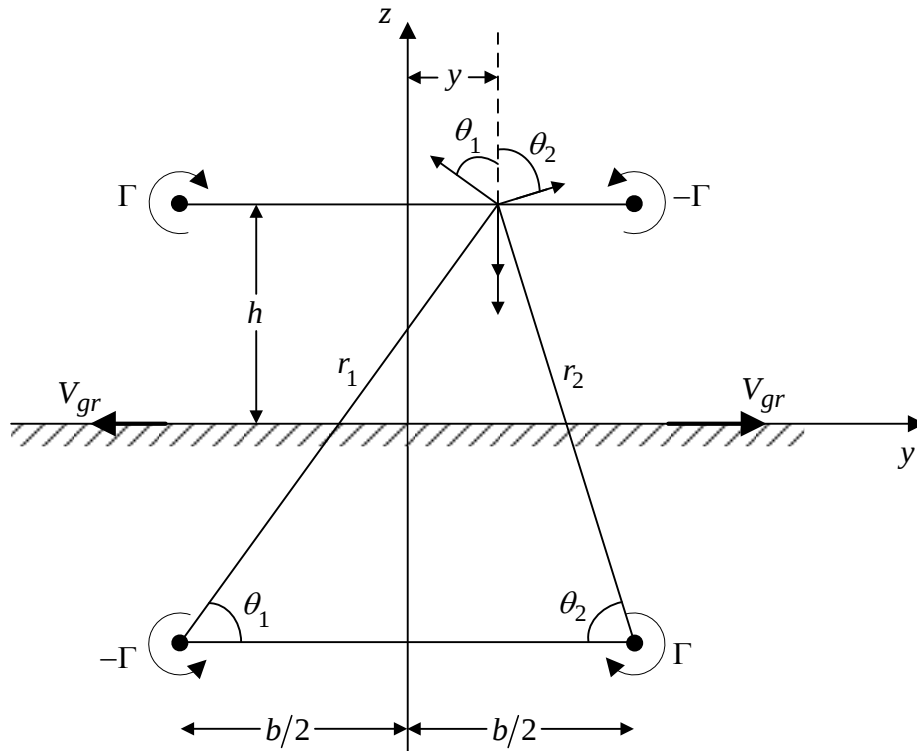
Θεωρείστε πτέρυγα αεροσκάφους το οποίο βρίσκεται σε πτήση σε υψόμετρο h , κοντά στο έδαφος. Η πτέρυγα έχει εκπέτασμα b . Στην πτέρυγα επάγεται κατώρευμα εξαιτίας των δύο στροβίλων στα άκρα της, οι οποίοι έχουν ένταση Γ .

Ζητούνται τα παρακάτω:

1. Υπολογίστε το επαγόμενο κατώρευμα στην πτέρυγα (w) ως συνάρτηση της θέσης y κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας και του ύψους h .
2. Υπολογίστε τον λόγο $w_0/w_{0,ref}$, όπου w_0 η επαγόμενη ταχύτητα στη θέση $y=0$ της πτέρυγας παρουσία του εδάφους, και $w_{0,ref}$ η αντίστοιχη ταχύτητα χωρίς το έδαφος.

Λύση

Θεωρούμε την εμπρόσθια όψη της πτέρυγας, μαζί με τους δύο ακροστροβίλους της, οποίοι βρίσκονται σε απόσταση h πάνω από το έδαφος. Η επίδραση του εδάφους μοντελοποιείται με τη μέθοδο των ειδώλων, προσθέτοντας δύο ακόμα στροβίλους («είδωλα») με αντίθετες εντάσεις από τους αρχικούς σε απόσταση h κάτω από το έδαφος. Η διάταξη αυτή απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Η συνολική ταχύτητα V_{gr} σε κάθε σημείο του εδάφους είναι οριζόντια, διότι οι κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων των επιμέρους στροβίλων αλληλοαναιρούνται στο έδαφος.

1.

Στο σχήμα απεικονίζονται τα διανύσματα των ταχυτήτων που επάγουν οι τέσσερις στροβίλοι σε μια τυχαία θέση y της πτέρυγας. Οι ακτίνες r_1, r_2 και οι γωνίες θ_1, θ_2 του σχήματος ορίζουν την θέση των κατώτερων στροβίλων (ειδώλων) ως προς την τυχαία θέση y . Παρατηρείται ότι τα είδωλα επάγουν στην πτέρυγα ταχύτητες με κατακόρυφες συνιστώσες προς τα επάνω, επομένως το κατώρευμα στην πτέρυγα μειώνεται κατά απόλυτη τιμή λόγω της παρουσίας του εδάφους.

Η επαγόμενη ταχύτητα $w(y)$ σε μια τυχαία θέση y της πτέρυγας εξαιτίας των τεσσάρων στροβίλων προκύπτει από το νόμο *Biot-Savart*:

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} + y\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} - y\right)} + \frac{\Gamma}{4\pi r_1} \cdot \cos(\theta_1) + \frac{\Gamma}{4\pi r_2} \cdot \cos(\theta_2) \quad (I)$$

Αντικαθιστώντας τις ακτίνες r_1, r_2 και τα συνημίτονα των γωνιών $\cos(\theta_1), \cos(\theta_2)$ από τη γεωμετρία, προκύπτει:

$$w(y, h) = -\frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} + y\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} - y\right)} + \frac{\Gamma}{4\pi \left[\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + (2h)^2\right]} \cdot \left(\frac{b}{2} + y\right) + \frac{\Gamma}{4\pi \left[\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + (2h)^2\right]} \cdot \left(\frac{b}{2} - y\right) \quad (II)$$

Παρατηρείται ότι για $h = 0$ προκύπτει $w(y) = 0$, δηλαδή το κατώρευμα μηδενίζεται σε κάθε θέση y της πτέρυγας. Επίσης για $h \rightarrow \infty$, οι όροι που έχουν το h στον παρονομαστή μηδενίζονται και η εξίσωση (II) συμπίπτει με την έκφραση του κατωρεύματος απουσία του εδάφους (εξίσωση (5.18))

Αξιίζει να σημειωθεί πως η μείωση της ταχύτητας του κατωρεύματος (w) κατά απόλυτη τιμή λόγω της παρουσίας του εδάφους, συνεπάγεται και μείωση του μέτρου της επαγόμενης γωνίας, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_i = \tan^{-1} \left(\frac{-w}{V_\infty} \right) \approx -\frac{w}{V_\infty}$$

Με βάση τις εξισώσεις (5.16) και (5.17) η μείωση του μέτρου της α_i συνεπάγεται αύξηση της άντωσης (L) και μείωση της επαγόμενης αντίστασης (D_i) της πτέρυγας, σε σχέση με τις τιμές που θα είχαν αν η πτέρυγα ήταν μακριά από το έδαφος.

2.

Θέτοντας $y = 0$ στην σχέση (II), προκύπτει:

$$w_0 = w(y = 0) = -\frac{\Gamma}{\pi b} + \frac{\Gamma \cdot b}{\pi (b^2 + 16 h^2)}$$

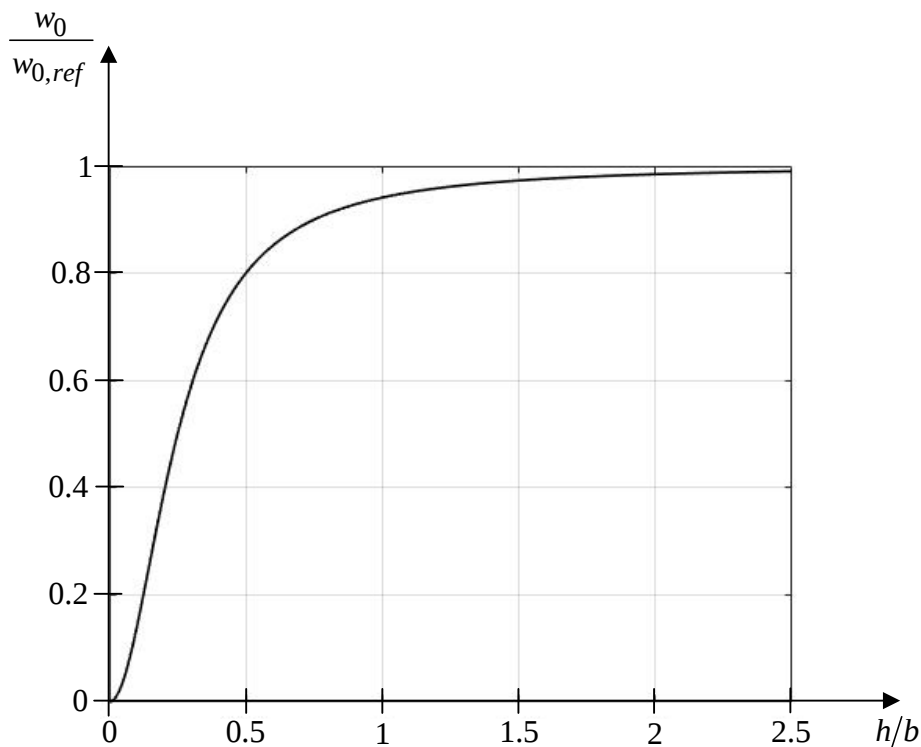
Θέτοντας $h \rightarrow \infty$ στην ανωτέρω σχέση προκύπτει η αντίστοιχη ταχύτητα χωρίς το έδαφος:

$$w_{0, ref} = - \frac{\Gamma}{\pi b}$$

Επομένως ο λόγος των δύο ταχυτήτων είναι:

$$\frac{w_0}{w_{0, ref}} = \frac{- \frac{\Gamma}{\pi b} + \frac{\Gamma \cdot b}{\pi (b^2 + 16 h^2)}}{- \frac{\Gamma}{\pi b}} \Rightarrow \frac{w_0}{w_{0, ref}} = 1 - \frac{1}{1 + 16 \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2}$$

Ο λόγος $w_0/w_{0, ref}$ τείνει στη μονάδα καθώς $h \rightarrow \infty$. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τη μεταβολή του λόγου $w_0/w_{0, ref}$ ως συνάρτηση του λόγου h/b . Η επίδραση του εδάφους μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα όταν $w_0/w_{0, ref} = 0.99$, το οποίο συμβαίνει για $h/b \approx 2.5$.



Βιβλιογραφία

1. R.T. Jones, “Wing theory”, Princeton University Press, 1990.
2. M. M. Munk, "*General Theory of Wing Sections*", National Advisory Committee for Aeronautics, 1922.
3. J. D. Anderson, "*Fundamentals of Aerodynamics*", Mc Graw Hill, New York, 2001.
4. S.A. Brandt, R.J. Stiles, J.J. Bertin, R. Whitford, "Introduction to Aeronautics: A Design Perspective." , AIAA education series , 2nd edition, 2004.
5. E.L. Houghton, P.W. Carpenter., “Aerodynamics for Engineering Students”, Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2003