
4 Αεροδυναμική Αεροτομής

Περιεχόμενα

4.1	Θεωρία Λεπτών Αεροτομών	92
4.1.1	Η Εξίσωση Κατανομής της Κυκλοφορίας	94
4.1.2	Υπολογισμός της Άντωσης και της Ροπής για Συμμετρικές Αεροτομές	97
4.1.3	Υπολογισμός της Άντωσης και της Ροπής για μη Συμμετρικές Αεροτομές	101
4.2	Υπολογιστική Προσέγγιση Αεροτομών με Πάχος (Μέθοδοι των Πλαισίων) .	106
4.3	Αποκόλληση του Οριακού Στρώματος και Απώλεια Στήριξης Αεροτομής	110
4.3.1	Ταχύτητα Απώλειας Στήριξης	113
4.4	Υπεραντωτικές Διατάξεις	113
4.5	Κύριοι Παράγοντες που Επηρεάζουν την Αεροδυναμική Απόδοση Αεροτομής	118
4.5.1	Μέγιστο πάχος αεροτομής	119
4.5.2	Καμπυλότητα	121
4.5.3	Αριθμός Reynolds	122
4.6	Οικογένειες Αεροτομών NACA	123
4.7	Παράρτημα: Μερικά Χρήσιμα Ολοκληρώματα	129
4.8	Παραδείγματα – Ασκήσεις	130
4.8.1	Εφαρμογή της Θεωρίας Λεπτών Αεροτομών	130
4.8.2	Αύξηση της άντωσης και της ροπής πρόνευσης λόγω μεταπτερυγίου	132
4.8.3	Εφαρμογή της Μεθόδου των Σημειακών Στροβίλων στην αεροτομή NACA 0012.....	135
	Βιβλιογραφία	139

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή ή η μετάφραση όλου ή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου και με οποιοδήποτε τρόπο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

Η ροή γύρω από αεροτομή μπορεί να θεωρηθεί ένα δισδιάστατο μοντέλο της ροής γύρω από πτέρυγα μεγάλου εκπετάσματος. Η μελέτη της ροής γύρω από την αεροτομή δίνει βασικές πληροφορίες χρήσιμες για τον υπολογισμό της άντωσης και της ροπής πρόνευσης σε κάθε θέση κατά μήκος του εκπετάσματος της πτέρυγας. Το πεδίο ροής γύρω από αεροτομή χαρακτηρίζεται από πολυπλοκότητα και εμπεριέχει στην γενική του μορφή έννοιες της συνεκτικής και στροβιλής ροής, όπως το οριακό στρώμα και την τύρβη. Για τις ανάγκες της ανάλυσης προβαίνουμε σε απλοποιήσεις του ροϊκού πεδίου με βάση λογικές και αποδεκτές παραδοχές οι οποίες επιτρέπουν την θεωρητική ανάλυση σε απλοποιημένες περιπτώσεις αεροτομών (Θεωρία Λεπτών Αεροτομών), καθώς και την ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών προσομοίωσης (Μέθοδοι των Πλαισίων).

4.1 Θεωρία Λεπτών Αεροτομών

Θεωρούμε ασυμπίεστη και μη συνεκτική ροή. Θα υπολογιστεί η άντωση και η ροπή πρόνευσης άλλα όχι η αντίσταση λόγω της παράλειψης των φαινομένων της συνεκτικής ροής (οριακό στρώμα και αποκόλλησή του). Τα κύρια βήματα της θεωρίας λεπτών αεροτομών είναι:

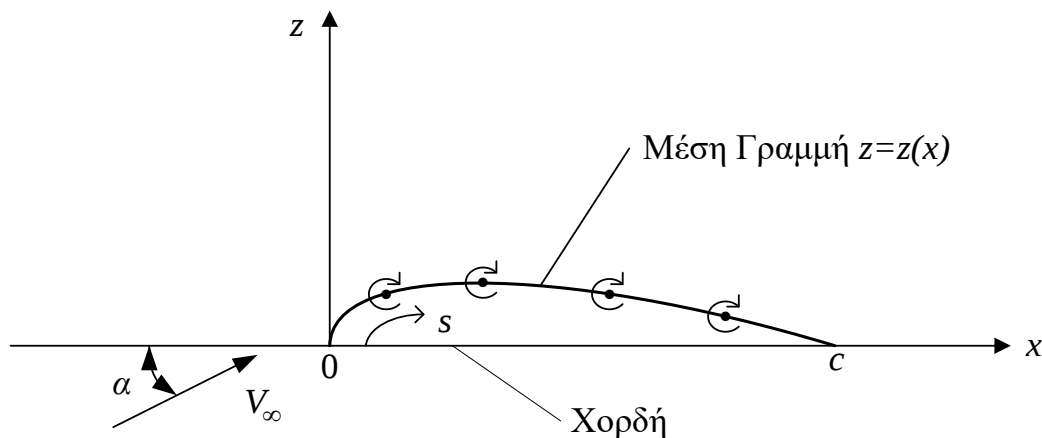
1. Η προσομοίωση της αεροτομής με φύλλο στροβιλότητας τοποθετημένο στην Μέση Γραμμή, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1.
2. Ο υπολογισμός της κατανομής $\gamma(s)$ έτσι ώστε η μέση γραμμή να είναι γραμμή ροής και η συνθήκη Kutta να ικανοποιείται στο χείλος εκφυγής ($\gamma_{TE} = 0$).
3. Ο υπολογισμός της κυκλοφορίας : $\Gamma = \int \gamma ds$.
4. Ο υπολογισμός της άντωσης σύμφωνα με το θεώρημα Kutta-Joukowski:

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma$$
5. Ο υπολογισμός της ροπής πρόνευσης.

Όσον αφορά την γεωμετρία, θεωρούμε:

1. Μικρή γωνία προσβολής (α).
2. Μικρό πάχος αεροτομής, το οποίο αμελείται σε πρώτη προσέγγιση. Η κύρια παράμετρος που θα περιγράφει την αεροτομή θα είναι η Μέση Γραμμή.
3. Μικρή καμπύλωση αεροτομής $\left(\frac{dz}{dx} \right)$.

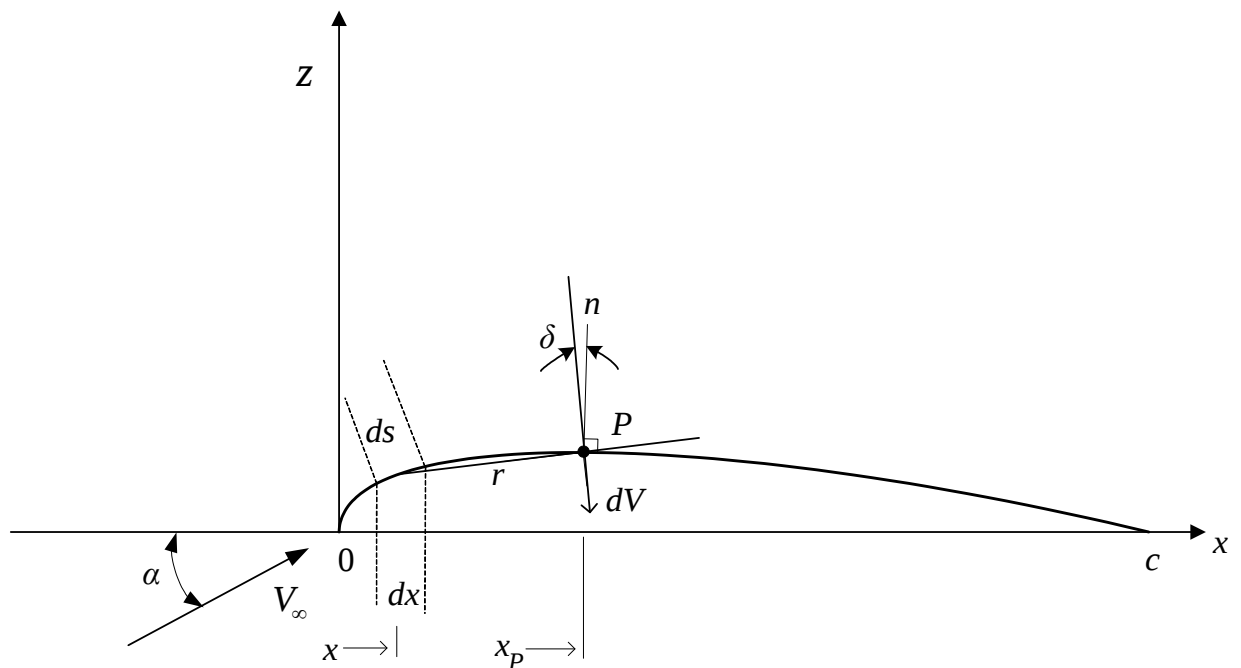
Παρά τις φαινομενικά περιοριστικές παραδοχές, η θεωρία συγκλίνει ικανοποιητικά με πειραματικά δεδομένα για αεροτομές με ειδικό πάχος έως 12%, καμπυλότητα 2% - 4% και γωνίες προσβολής στις οποίες δεν εμφανίζεται εκτεταμένη αποκόλληση του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.1: Φύλλο στροβιλότητας τοποθετημένο στη Μέση Γραμμή αεροτομής.

4.1.1 Η Εξίσωση Κατανομής της Κυκλοφορίας

Το Σχήμα 4.2 απεικονίζει τη γραμμή στροβιλότητας η οποία έχει τοποθετηθεί στη μέση γραμμή της αεροτομής. Θεωρούμε τμήμα ds της μέσης γραμμής το οποίο επάγει ταχύτητα dV στο σημείο P της ίδιας γραμμής. Η συντεταγμένη x υποδηλώνει τη θέση του τμήματος ds , ενώ η συντεταγμένη x_P υποδηλώνει τη θέση του σημείου P . Η επαγόμενη ταχύτητα dV σχηματίζει γωνία δ με την κάθετο στη μέση γραμμή στο σημείο P . Το σημείο P απέχει από το τμήμα ds απόσταση r .



Σχήμα 4.2: Γεωμετρία γραμμής στροβιλότητας τοποθετημένης στη μέση γραμμή λεπτής αεροτομής.

Η επαγόμενη ταχύτητα από το τμήμα ds στο σημείο P είναι:

$$dV = - \frac{\gamma ds}{2\pi r} \quad (4.1)$$

Το αρνητικό πρόσημο προστέθηκε έτσι ώστε όταν η γ είναι θετική (δεξιόστροφη κυκλοφορία), η V να είναι αρνητική.

Λόγω της θεώρησης μικρής καμπύλωσης $\left(\frac{dz}{dx} = O(\varepsilon) \ll 1 \right)$ θα ισχύει:

$$\frac{dz}{dx} = O(\varepsilon) \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cong 0 \Rightarrow z(x) \cong \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \delta \cong 0 \Rightarrow \cos\delta \cong 1$$

$$\frac{dz}{dx} = O(\varepsilon) \ll 1 \Rightarrow \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = O(\varepsilon^2) \ll 1 \Rightarrow \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = O(\varepsilon^2) \ll 1$$

Η κάθετη στην μέση γραμμή συνιστώσα της επαγόμενης ταχύτητας με βάση το Σχήμα 4.2, είναι:

$$dV_n = dV \cdot \cos\delta \cong dV \cdot 1 = -\frac{\gamma ds}{2\pi r} \quad (4.2)$$

Επίσης, η ακτίνα (r) στον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων μπορεί να προσεγγισθεί ως εξής:

$$r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2\right]} \cong \sqrt{(\Delta x)^2 \cdot 1} = x_P - x \quad (4.3)$$

Τέλος, το τμήμα του τόξου της Μέσης Γραμμής προσεγγίζεται με παρόμοιο τρόπο:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(dx)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]} \cong \sqrt{(dx)^2 \cdot 1} = dx \quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην σχέση (4.2) παίρνουμε:

$$dV_n = -\frac{\gamma dx}{2\pi(x_P - x)} \quad (4.5)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.5) κατά μήκος της χορδής, παίρνουμε την κάθετη συνιστώσα της συνολικής επαγόμενης ταχύτητας στο σημείο P:

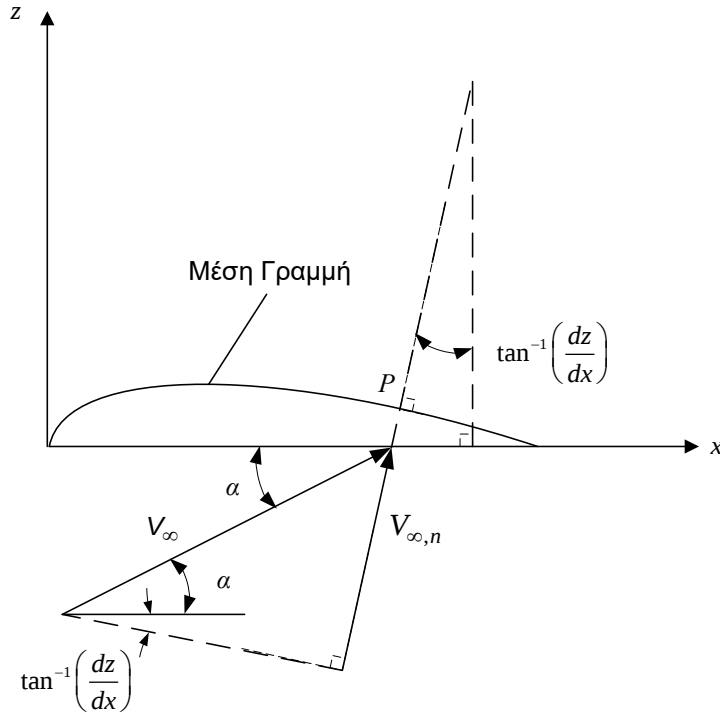
$$V_n = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x) dx}{x_P - x} \quad (4.6)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την κάθετη στη μέση γραμμή συνιστώσα της ταχύτητας της ελεύθερης ροής V_∞ στο σημείο P. Με τη βοήθεια του Σχήματος 4.3 είναι:

$$V_{\infty,n} = V_\infty \sin\left(\alpha - \tan^{-1}\left(\frac{dz}{dx}\right)_P\right) \approx V_\infty \left[\alpha - \left(\frac{dz}{dx}\right)_P\right] \quad (4.7)$$

Παρομοίως θεωρήθηκε ότι $\tan^{-1}\left(\frac{dz}{dx}\right)_P \approx \left(\frac{dz}{dx}\right)_P$ και $\sin\left(\alpha - \left(\frac{dz}{dx}\right)_P\right) \approx \alpha - \left(\frac{dz}{dx}\right)_P$.

Να σημειωθεί ότι η κλίση $\frac{dz}{dx}$ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.



Σχήμα 4.3: Η κάθετη στη μέση γραμμή συνιστώσα της V_∞ .

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ότι η μέση γραμμή είναι γραμμή ροής, παίρνουμε ότι:

$$V_n + V_{\infty,n} = 0 \quad (4.8)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.6) και (4.7) στην (4.8) έχουμε την τελική σχέση για την κατανομή της κυκλοφορίας $\gamma(x)$:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x) dx}{x_P - x} = V_\infty \left(\alpha - \left(\frac{dz}{dx} \right) \Big|_P \right)} \quad (4.9)$$

Η (4.9) είναι η *θεμελιώδης εξίσωση* της θεωρίας λεπτών αεροτομών. Από αυτήν μπορούμε να υπολογίσουμε την $\gamma(x)$, η οποία επίσης, θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη Kutta:

$$\gamma_{TE} = \gamma(c) = 0 \quad (4.10)$$

Στη συνέχεια θα εξεταστούν δυο περιπτώσεις: (i) της συμμετρικής αεροτομής, και (ii) της μη συμμετρικής.

4.1.2 Υπολογισμός της Άντωσης και της Ροπής για Συμμετρικές Αεροτομές

Στις συμμετρικές αεροτομές η μέση γραμμή συμπίπτει με τη χορδή. Ισχύει δηλαδή:

$$\frac{dz}{dx} = 0. \text{ Έτσι, η εξίσωση (4.9) απλοποιείται στην:}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x) dx}{x_P - x} = V_\infty \cdot \alpha} \quad (4.11)$$

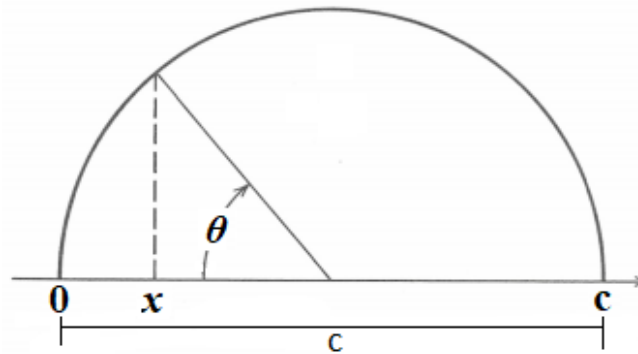
Η ανωτέρω εξίσωση πρέπει να επιλυθεί ως προς γ . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον παρακάτω μετασχηματισμό από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες ο οποίος απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4.

$$x = \frac{1}{2}c (1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (4.12)$$

$$x_P = \frac{1}{2}c (1 - \cos \theta_P), \quad 0 \leq \theta_P \leq \pi \quad (4.13)$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$dx = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \quad (4.14)$$



Σχήμα 4.4: Μετασχηματισμός της συντεταγμένης x σε πολική συντεταγμένη θ .

Αντικαθιστώντας στην (4.11), έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta \cdot d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_P} = V_\infty \cdot \alpha \quad (4.15)$$

Για την (4.15) η αναλυτική λύση είναι:

$$\gamma(\theta) = 2 \alpha V_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad (4.16)$$

Παρατηρούμε ότι η κατανομή $\gamma(\theta)$ είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ_P .

Πράγματι, αντικαθιστώντας την $\gamma(\theta)$ στην (4.15) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta_P)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2 \alpha V_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{(\cos \theta - \cos \theta_P)} d\theta \\ &= V_\infty \alpha \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \cos \theta}{(\cos \theta - \cos \theta_P)} d\theta = V_\infty \alpha \frac{1}{\pi} [\pi (0+1)] = V_\infty \alpha \end{aligned}$$

Μετασχηματίζοντας σε καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω της σχέσης (4.12) έχουμε:

$$\cos \theta = 1 - 2 \frac{x}{c}$$

ενώ, με χρήση της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, η αντίστοιχη έκφραση για ημίτονο προκύπτει:

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{4x}{c} \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)}$$

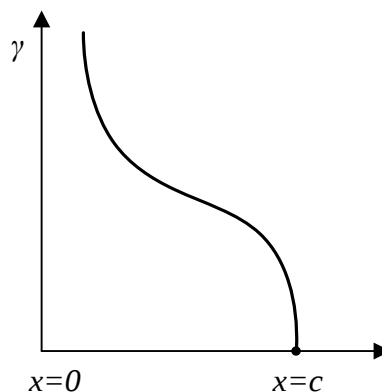
Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις ημιτόνου και συνημιτόνου στην σχέση (4.16) προκύπτει:

$$\boxed{\gamma(x) = 2 \alpha V_\infty \sqrt{\frac{c-x}{x}}} \quad (4.17)$$

Η αναλυτική λύση ικανοποιεί την συνθήκη Kutta. Πράγματι:

$$\gamma(x=c) = 0 \quad (4.18)$$

Η κατανομή $\gamma(x)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5. Παρατηρούμε ότι η τιμή της στο χείλος προσβολής τείνει προς το άπειρο.



Σχήμα 4.5: Κατανομή της στροβιλότητας στην αεροτομή.

Υπολογισμός της άντωσης

Χρησιμοποιώντας τον πολικό μετασχηματισμό (4.12) και την αναλυτική λύση (4.16) παίρνουμε:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = \alpha c V_\infty \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta \Rightarrow$$

$$\Gamma = \pi \alpha c V_\infty \quad (4.19)$$

Το θεώρημα Kutta – Joukowski και η (4.19) δίνουν:

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \pi \alpha c \rho_\infty V_\infty^2 \quad (4.20)$$

Ο συντελεστής άντωσης C_ℓ ορίζεται ως:

$$C_\ell \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot c}$$

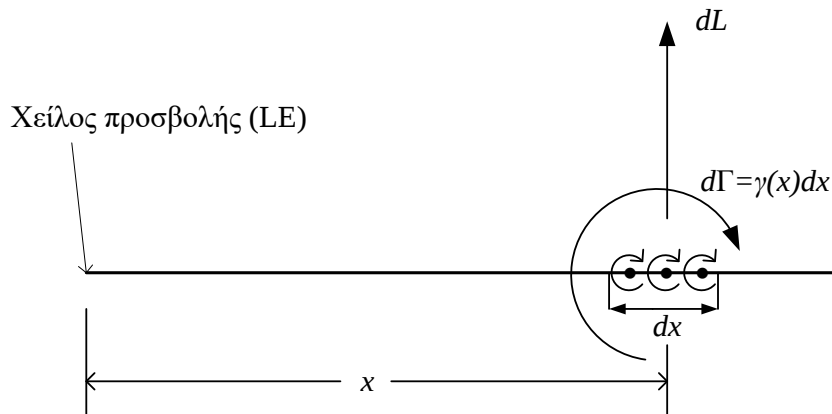
Αντικαθιστώντας την έκφραση για την άντωση (4.20), έχουμε:

$$C_\ell = \frac{\pi \alpha c \rho_\infty V_\infty^2}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot c} \Rightarrow \boxed{C_\ell = 2\pi \alpha} \quad (4.21)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής άντωσης εξαρτάται μόνο από τη γωνία προσβολής α και είναι μηδέν για μηδενική γωνία όπως αναμένεται για συμμετρική αεροτομή. Η κλίση της καμπύλης (C_ℓ, α) είναι σταθερή και ίση με 2π .

Υπολογισμός της ροπής πρόνευσης

Θεωρούμε τμήμα dx της αεροτομής όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6: Υπολογισμός της ροπής πρόνευσης.

Η ροπή ως προς το χείλος προσβολής της δύναμης άντωσης προκύπτει ως άθροιση της ροπής που δίνει το στοιχειώδες αντωτικό φορτίο (dL) του κάθε τμήματος dx και υπολογίζεται με την ολοκλήρωση:

$$M_{LE} = - \int_0^c x \cdot dL = - \rho_\infty V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx \quad (4.22)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην (4.22) προκύπτει από τη σύμβαση η δεξιόστροφη ροπή να θεωρείται θετική. Χρησιμοποιώντας τον πολικό μετασχηματισμό (4.12) και τη λύση (4.16) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} M_{LE} &= - \rho_\infty V_\infty \int_0^\pi \frac{c}{2} (1 - \cos \theta) 2 \alpha V_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \frac{c}{2} \sin \theta d\theta = \\ &= - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \alpha \int_0^\pi (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) d\theta \\ &= - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \alpha \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\theta = - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \alpha \left(\pi - \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \right) \Rightarrow \\ M_{LE} &= - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \alpha \left(\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2\theta) d\theta \right) = - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \alpha \left(\pi - \frac{1}{2}(\pi + 0) \right) \end{aligned}$$

Το οποίο τελικά δίνει:

$$M_{LE} = - \frac{\pi}{4} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \alpha$$

Ο συντελεστής πρόνευσης ($C_{m,LE}$), ο οποίος ορίζεται ως $M_{LE} / \left(\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty V_\infty^2 \cdot c^2 \cdot 1 \right)$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$\boxed{C_{m,LE} = - \frac{\pi \alpha}{2}} \quad (4.23)$$

Επίσης, με βάση τη σχέση (4.21), ο συντελεστής ροπής πρόνευσης μπορεί να γραφτεί και ως:

$$C_{m,LE} = - \frac{C_\ell}{4} \quad (4.24)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τη ροπή στο τέταρτο της χορδής. Εκεί θα είναι:

$$M_{c/4} = M_{LE} + L \frac{c}{4}. \text{ Διαιρώντας με τον όρο } \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \text{ βρίσκουμε:}$$

$$C_{m,c/4} = C_{m,LE} + \frac{C_\ell}{4} \quad (4.25)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.23) και (4.21) στην (4.25), έχουμε:

$$\boxed{C_{m,c/4} = 0} \quad (4.26)$$

Η ροπή δηλαδή στο τέταρτο της χορδής είναι μηδενική, επομένως εκεί βρίσκεται το κέντρο πίεσης της συμμετρικής αεροτομής, το οποίο και συμπίπτει με το αεροδυναμικό κέντρο της, αφού η ροπή $M_{c/4}$ είναι ανεξάρτητη της γωνίας προσβολής α . Αυτό συμβαίνει καθώς σε μηδενική γωνία προσβολής δεν παράγεται άντωση και, επομένως, ροπή πρόνευσης. Εφόσον η ροπή πρόνευσης στο αεροδυναμικό κέντρο είναι εξ' ορισμού ανεξάρτητη της γωνίας προσβολής, θα παραμένει μηδενική καθιστώντας το αεροδυναμικό κέντρο και κέντρο πίεσης.

4.1.3 Υπολογισμός της Άντωσης και της Ροπής για μη Συμμετρικές Αεροτομές

Στις μη συμμετρικές αεροτομές η μέση γραμμή δεν συμπίπτει με την χορδή. Είναι δηλαδή $\frac{dz}{dx} \neq 0$. Η βασική εξίσωση της κατανομής κυκλοφορίας (4.9) με τον πολικό μετασχηματισμό (4.12) γίνεται:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta \cdot d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_P} = V_\infty \left(\alpha - \left(\frac{dz}{dx} \right) \Big|_P \right) \quad (4.27)$$

Για την παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση αναζητούμε λύση της μορφής:

$$\gamma(\theta) = 2 V_\infty A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + 2 V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \quad (4.28)$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην λύση της συμμετρικής αεροτομής θέτοντας το συντελεστή A_0 ίσο με τη γωνία α . Η λύση αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη Kutta, είναι δηλαδή $\gamma(\pi) = 0$.

Για τον υπολογισμό των συντελεστών A_0, A_n αντικαθιστούμε την (4.28) στην (4.27) και έχουμε:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0(1+\cos\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_P} d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{A_n \sin(n\theta) \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_P} d\theta = \alpha - \left(\frac{dz}{dx} \Big|_P \right) \quad (4.29)$$

Κάνοντας χρήση των ακόλουθων ταυτοτήτων:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_P} d\theta = \pi \frac{\sin(n\theta_P)}{\sin\theta_P}, \quad (4.30)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n\theta) \cdot \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_P} d\theta = -\pi \cdot \cos(n\theta_P), \quad (4.31)$$

από την (4.29) παίρνουμε ότι:

$$\left(\frac{dz}{dx} \Big|_P \right) = (\alpha - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta_P) \quad (4.32)$$

Η έκφραση (4.32) μπορεί να θεωρηθεί ανάπτυγμα σειράς Fourier, για τη συνάρτηση $\left(\frac{dz}{dx} \Big|_P \right)$. Είναι γνωστό ότι οι συντελεστές σειράς Fourier δίνονται από τις σχέσεις:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{dz}{dx} \Big|_P \right) d\theta \quad (4.33)$$

και

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{dz}{dx} \Big|_P \right) \cos(n\theta) d\theta \quad (4.34)$$

Ας σημειωθεί ότι για συμμετρική αεροτομή $\left(\frac{dz}{dx} = 0 \right)$ προκύπτει ότι $A_0 = \alpha$ και $A_n = 0$

. Έτσι, από την (4.28) καταλήγουμε στην εξίσωση κατανομής της κυκλοφορίας $\gamma(\theta)$ της σχέσης (4.16) για τις συμμετρικές αεροτομές.

Υπολογισμός της άντωσης

Η κυκλοφορία γύρω από την ασύμμετρη αεροτομή εκφράζεται ως:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin\theta d\theta. \text{ Αντικαθιστώντας την } \gamma(\theta) \text{ από την αναλυτική}$$

λύση (4.28) προκύπτει:

$$\Gamma = c V_{\infty} \left(A_0 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta \right) \quad (4.35)$$

Τα ολοκληρώματα στην ανωτέρω σχέση έχουν λύσεις:

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \pi, \quad (4.36)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta \cdot d\theta = \pi / 2 \text{ για } n=1 \quad (4.37)$$

και

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta \cdot d\theta = 0 \text{ για } n \neq 1 \quad (4.38)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.35) παίρνουμε ότι:

$$\Gamma = c V_{\infty} \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right) \quad (4.39)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Kutta-Joukowski είναι:

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

Από τον ορισμό του συντελεστή άντωσης:

$$C_{\ell} \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c \cdot 1}$$

προκύπτει ότι:

$$C_{\ell} = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (4.40)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των A_0 και A_1 από τις σχέσεις (4.33) και (4.34) έχουμε την τελική σχέση για τον συντελεστή άντωσης:

$$C_{\ell} = 2\pi \left(\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta \right) \quad (4.41)$$

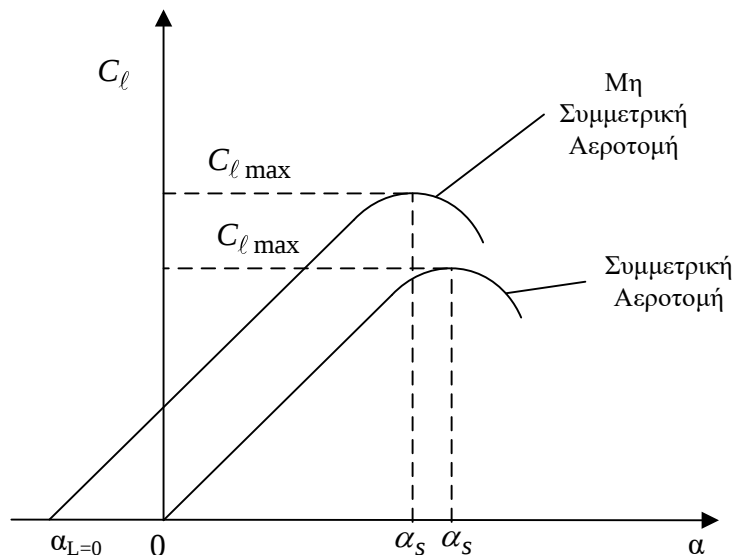
Παρατηρούμε ότι ακόμη και για μηδενική γωνία προσβολής παράγεται άντωση. Η άντωση μηδενίζεται όταν η γωνία προσβολής παίρνει την αρνητική τιμή:

$$\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta \quad (4.42)$$

Έτσι, η σχέση (4.41) μπορεί να γραφτεί ως:

$$C_\ell = 2\pi (\alpha - \alpha_{L=0}) \quad (4.43)$$

Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η μεταβολή του συντελεστή άντωσης συναρτήσει της γωνίας προσβολής για συμμετρική και μη συμμετρική αεροτομή. Παρατηρούμε ότι η καμπυλότητα οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή άντωσης για την ίδια γωνία προσβολής (α). Σε αυτό το αποτέλεσμα βασίζεται και η λειτουργία των *μεταπτερυγίων* (“flaps”) όπως θα δούμε στην Ενότητα 4.4. Αξίζει, στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι για κάθε λεπτή αεροτομή συμμετρική και μη, η κλίση της καμπύλης ($C_\ell - \alpha$) είναι η ίδια, $\frac{dC_\ell}{d\alpha} = 2\pi$.



Σχήμα 4.7: Μεταβολή του συντελεστή άντωσης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης (α) για συμμετρική και μη-συμμετρική αεροτομή.

Υπολογισμός της ροπής πρόνευσης

Η ροπή ως προς την ακμή προσβολής ανά μονάδα μήκους εκπετάσματος θα είναι:

$$M_{LE} = - \int_0^c x dL = - \rho_\infty V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx \Rightarrow$$

$$M_{LE} = - \rho_\infty V_\infty \int_0^\pi \frac{c}{2} (1 - \cos \theta) \gamma(\theta) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \quad (4.44)$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση (4.28) για την κυκλοφορία, έχουμε:

$$M_{LE} = -\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta) \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right] \sin \theta d\theta \quad (4.45)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των ολοκληρωμάτων (4.36), (4.37) και (4.38), η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$M_{LE} = -\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c^2 \frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \quad (4.46)$$

Από τον ορισμό του συντελεστή ροπής: $C_m \equiv \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cdot c^2}$ προκύπτει τελικά ότι:

$$\boxed{C_{m,LE} = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)} \quad (4.47)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.40) για τον συντελεστή C_{ℓ} , παίρνουμε:

$$C_{m,LE} = -\left(\frac{C_{\ell}}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right) \quad (4.48)$$

Ο συντελεστής της ροπής στο τέταρτο της χορδής είναι:

$$C_{m,c/4} = C_{m,LE} + \frac{C_{\ell}}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{C_{m,c/4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)} \quad (4.49)$$

Παρατηρούμε ότι:

(i) Ο συντελεστής ροπής $C_{m,c/4}$ εξαρτάται από τους συντελεστές A_1 και A_2 , οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι της γωνίας α . Συνεπώς το σημείο $c/4$ είναι το αεροδυναμικό κέντρο.

(ii) Ο συντελεστής $C_{m,c/4}$ είναι διάφορος του μηδενός, συνεπώς το σημείο $c/4$ δεν είναι το κέντρο πίεσης. Η θέση του κέντρου πίεσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{X_{CP}}{c} = -\frac{C_{m,LE}}{C_{\ell}} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{A_1 - A_2}{2 A_0 + A_1} \right] \quad (4.50)$$

ή

$$\frac{X_{CP}}{c} = \frac{1}{4} \left[1 + \pi \frac{A_1 - A_2}{C_{\ell}} \right] \quad (4.51)$$

4.2 Υπολογιστική Προσέγγιση Αεροτομών με Πάχος (Μέθοδοι των Πλαισίων)

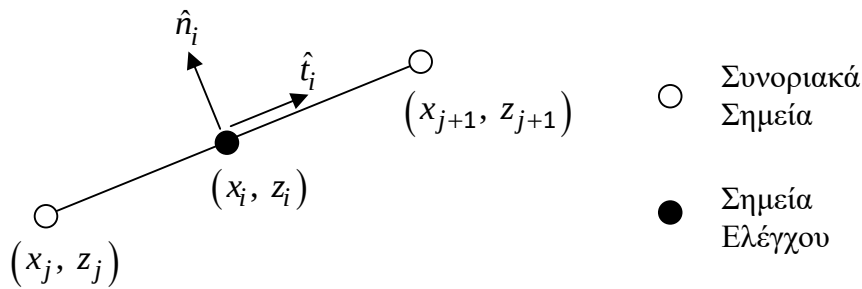
Στην Θεωρία Λεπτών Αεροτομών παρουσιάστηκε μια αναλυτική προσέγγιση στο πρόβλημα επίλυσης της ροής δυναμικού γύρω από αεροτομές, που συνοδεύονταν από παραδοχές μικρού πάχους και γωνίας προσβολής, με την επίλυση να περιλαμβάνει τοποθέτηση γραμμής στροβιλότητας (άπειρο άθροισμα σημειακών στροβίλων) στην μέση γραμμή της αεροτομής. Κατά αντίστοιχο τρόπο, προκειμένου να μοντελοποιηθεί και η επίδραση του πάχους, μπορούμε να τοποθετήσουμε κατανομή στροβιλότητας στην επιφάνεια της αεροτομής. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν συνοδεύεται από αντίστοιχη αναλυτική λύση και για τον λόγο αυτό “καταφεύγουμε” σε υπολογιστική προσομοίωση. Οι σχετικές μέθοδοι ονομάζονται “Μέθοδοι των Πλαισίων”.

Με τον όρο Μέθοδοι των Πλαισίων (“Panel Methods”) αναφερόμαστε στην ευρύτερη κατηγορία αριθμητικών μεθόδων επίλυσης της ροής δυναμικού γύρω από δισδιάστατα και τρισδιάστατα σώματα. Οι μέθοδοι αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά κατά την δεκαετία του 1960 και παρά την αντικατάστασή τους, από τον πλέον σύγχρονο κλάδο της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), αποτελούν μέχρι και σήμερα ένα αξιόπιστο και χαμηλού υπολογιστικού κόστους εργαλείο, για τον αερο/υδροδυναμικό σχεδιασμό αεροχημάτων/πλοίων, καθώς και ρευστοδυναμικών στοιχείων, όπως πτερύγια στροβιλομηχανών, προπέλες, αντλίες, κτλ. Το όνομα της κάθε μεθόδου διαμορφώνεται ανάλογα με το υπολογιστικό στοιχείο (πηγή, στρόβιλος, κτλ.) και την τάξη του (σημειακό, κατανομή, κτλ.) που χρησιμοποιεί.

Στην παρούσα ανάλυση θα γίνει λόγος για την Μέθοδο των Σημειακών Στροβίλων, λόγω της απλότητας και της άμεσης εφαρμογής που έχει στην αεροδυναμική ανάλυση αεροτομών. Με την μέθοδο αυτή, η κατανομή στροβιλότητας (συνεχής κατανομή) στην επιφάνεια της αεροτομής προσεγγίζεται με πεπερασμένο αριθμό σημειακών στροβίλων (διακριτή κατανομή). Όσο ο αριθμός των στροβίλων τείνει στο άπειρο, τόσο η διακριτή κατανομή που προκύπτει τείνει στην συνεχή.

Γεωμετρικά Στοιχεία:

Η επιφάνεια της αεροτομής διακριτοποιείται σε N ευθύγραμμα τμήματα (πλαίσια), τα οποία ορίζονται από $N+1$ *Συνοριακά Σημεία* (Boundary Points) (x_j, z_j) . Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων καλείται πλαίσιο (Panel) και το γεωμετρικό του μέσο *Σημείο Ελέγχου* (Control Point) (x_i, z_i) . Ως $\hat{n}_i$ και $\hat{t}_i$ ορίζουμε τα κάθετα (normal) και εφαπτομενικά (tangential) διανύσματα κάθε πλαισίου. Τα γεωμετρικά στοιχεία παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8: Γεωμετρικά στοιχεία πλαισίου i

Σημειακοί στρόβιλοι:

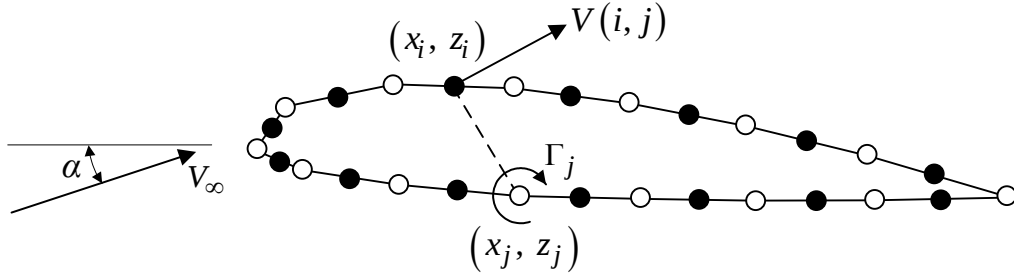
Τοποθετούμε σημειακούς στρόβιλους στα $N+1$ συνοριακά σημεία της αεροτομής. Η επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο (x_i, z_i) από έναν στρόβιλο Γ_j που βρίσκεται στην θέση (x_j, z_j) , σύμφωνα με το Σχήμα 4.9, θα είναι:

$$\vec{V}(i, j) = u(i, j)\hat{i} + v(i, j)\hat{j}$$

, όπου:

$$u(i, j) = \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(z_i - z_j)}{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$v(i, j) = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$



Σχήμα 4.9: Επαγόμενη ταχύτητα από τον στρόβιλο Γ_j στο σημείο ελέγχου (x_i, z_i) . Οι λευκοί κύκλοι αντιστοιχούν σε συνοριακά σημεία των πλαισίων ενώ οι μαύροι κύκλοι αντιστοιχούν σε σημεία ελέγχου.

Η συνολική επαγόμενη ταχύτητα εξαιτίας των $N+1$ στροβίλων, σε ένα σημείο ελέγχου i , δίνεται από την σχέση:

$$\vec{V}(i) = u(i)\hat{i} + v(i)\hat{j}$$

όπου

$$u(i) = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(z_i - z_j)}{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$v(i) = \sum_{j=1}^{N+1} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Η συνολική ταχύτητα $\vec{V}_{tot}(i)$ στο σημείο (x_i, z_i) προκύπτει μέσω υπέρθεσης της επαγόμενης και της ταχύτητας ελεύθερης ροής $\vec{V}_\infty = V_\infty \cos \alpha \hat{i} + V_\infty \sin \alpha \hat{j}$, όπου α η γωνία προσβολής:

$$\vec{V}_{tot}(i) = \vec{V}(i) + \vec{V}_\infty$$

Για την κάθετη ταχύτητα (V_n) θα ισχύει:

$$V_n(i) = \vec{V}_{tot}(i) \cdot \hat{n}_i$$

, ενώ για την εφαπτομενική (V_t):

$$V_t(i) = \vec{V}_{tot}(i) \cdot \hat{t}_i$$

Οι εντάσεις των στροβίλων Γ_j προκύπτουν από την απαίτηση η ροή να κινείται εφαπτομενικά του σώματος ($V_n = 0$):

$$V_n(i) = 0$$

Παρατηρούμε πως το σύστημα που θα προκύψει θα περιλαμβάνει N εξισώσεις και $N+1$ αγνώστους. Το έλλειμα μίας εξίσωσης θα καλύψει η Συνθήκη Kutta, η οποία στην γενική της μορφή επιβάλλει η ροή να εξέρχεται ομαλά στο χείλος εκφυγής της αεροτομής. Αυτό μεταφράζεται σε ταχύτητες ίδιου μέτρου για τα δύο πλαίσια που σχηματίζουν την περιοχή του χείλους εκφυγής.

Υπολογισμός Άντωσης:

Η συνολική κυκλοφορία της αεροτομής προκύπτει αθροίζοντας τις επιμέρους εντάσεις των στροβίλων Γ_j :

$$\Gamma_{tot} = \sum_{j=1}^{N+1} \Gamma_j$$

, ενώ η άντωση μέσω της εξίσωσης Kutta-Joukowski:

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma_{tot}$$

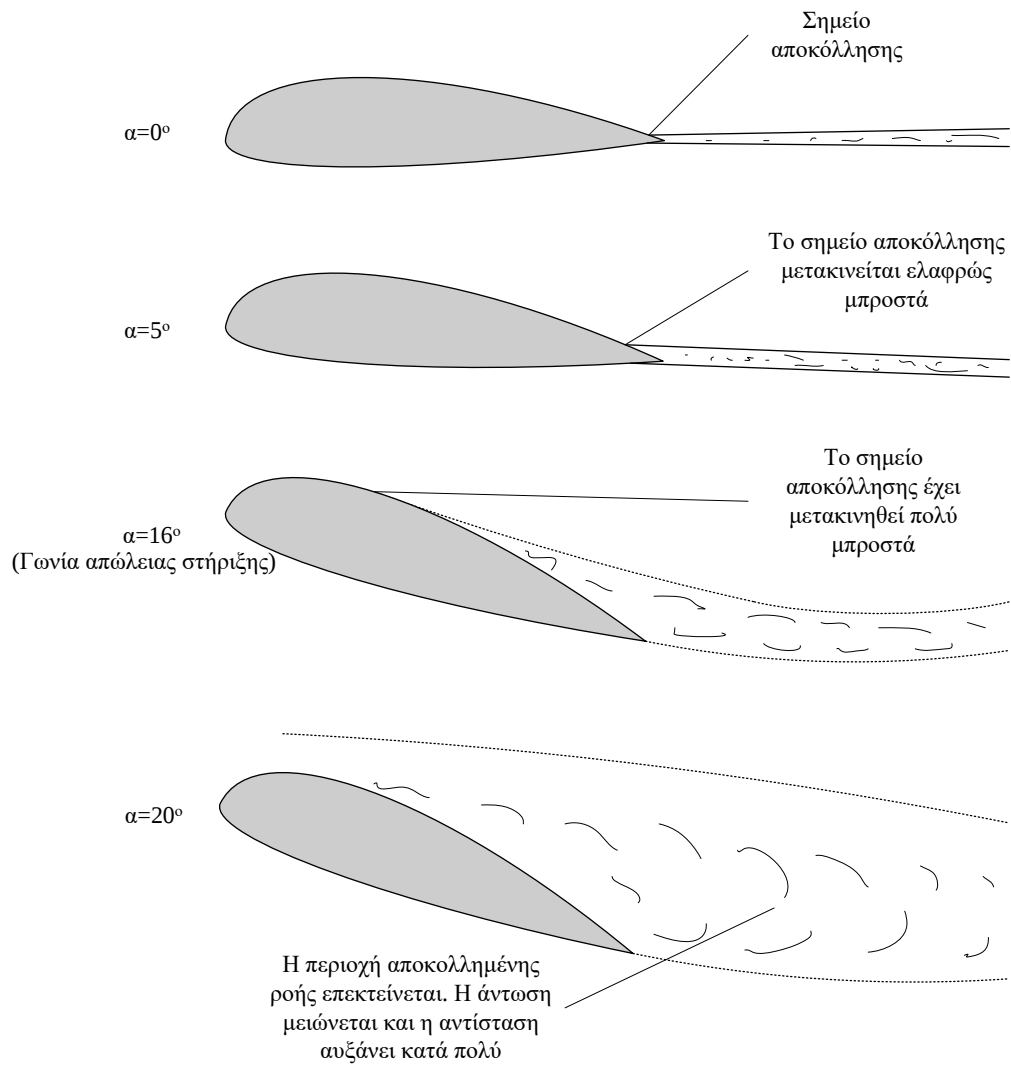
Κατασκευή μεθόδων ανώτερης τάξης:

Η μέθοδος των σημειακών στροβίλων προσεγγίζει την κατανομή στροβιλότητας στην επιφάνεια της αεροτομής χρησιμοποιώντας σημειακούς (διακριτούς) στροβίλους. Όσο ο αριθμός των στροβίλων αυξάνει, τόσο η διακριτή κατανομή που προκύπτει τείνει στην συνεχή. Ως προς την άντωση, κάτι τέτοιο μεταφράζεται σε σύγκλισή της σε μία συγκεκριμένη τιμή. Στην πράξη, ανάλογα και με την επιθυμητή ακρίβεια, η σύγκλιση απαιτεί πεπερασμένο αριθμό στροβίλων (και πλαισίων αντίστοιχα). Προκειμένου να επιτευχθεί ταχύτερη σύγκλιση και να προσεγγιστεί η συνεχής κατανομή στροβιλότητας αποδοτικότερα, γίνεται χρήση υπολογιστικών στοιχείων ανώτερης τάξης, όπως γραμμές στροβιλότητας σταθερής ($\gamma(s) = \gamma_0$) και γραμμικά μεταβαλλόμενης ($\gamma(s) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot s$) έντασης αντίστοιχα. Οι κατανομές αυτές τοποθετούνται κατά μήκος κάθε πλαισίου.

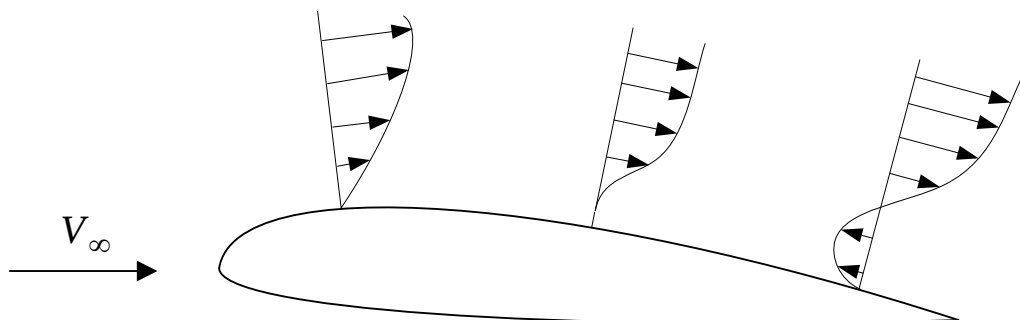
4.3 Αποκόλληση του Οριακού Στρώματος και Απώλεια Στήριξης Αεροτομής

Ο συντελεστής άντωσης αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με την γωνία προσβολής για μικρές τιμές αυτής. Σε αυτήν την περιοχή η ροή κινείται ομαλά γύρω από την αεροτομή με την αποκόλληση του οριακού στρώματος να είναι μικρή και περιορισμένη κοντά στο χείλος εκφυγής. Καθώς όμως η γωνία προσβολής αυξάνεται, η ροή τείνει να αποκολληθεί σε μεγάλο μέρος της επάνω επιφάνειας της αεροτομής, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.10. Η μεγάλη αποκόλληση του οριακού στρώματος έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της άντωσης και την αύξηση της αντίστασης. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται *απώλεια στήριξης* ("stall"). Ακριβώς πριν την απώλεια στήριξης έχουμε τη μέγιστη τιμή του συντελεστή άντωσης της αεροτομής ($C_{\ell \max}$). Η τιμή αυτή εξαρτάται κυρίως από την καμπυλότητα της αεροτομής, το πάχος της, την τραχύτητα της επιφάνειας, καθώς και από τον αριθμό Reynolds της ροής.

Το φαινόμενο της αποκόλλησης αφορά το οριακό στρώμα. Όταν η καμπυλότητα και η κατανομή του πάχους της αεροτομής οδηγούν σε αύξηση της πίεσης στο πίσω μέρος της αεροτομής, τότε στο κατώτερο στρώμα του οριακού στρώματος, που έχει σχετικά μικρή ταχύτητα, η ροή προς στιγμήν "λιμνάζει" και έπειτα αλλάζει κατεύθυνση, κινούμενη προς τα πίσω (ανακυκλοφορία, "flow reversal"), όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.11. Καθώς η αλλαγή αυτή της κατεύθυνσης "εμποδίζει" την υπόλοιπη ροή που κινείται προς τα εμπρός (κατάντι), η τελευταία τείνει να εκφύγει προς τα επάνω αυξάνοντας σημαντικά το πάχος του οριακού στρώματος. Η αποκόλληση καθίσταται πιο έντονη σε μεγαλύτερες γωνίες προσβολής, αφού κατόπιν της έντονης επιτάχυνσης της ροής στο χείλος προσβολής, η αύξηση της πίεσης είναι πολύ μεγάλη στο υπόλοιπο τμήμα της άνω πλευράς της αεροτομής.



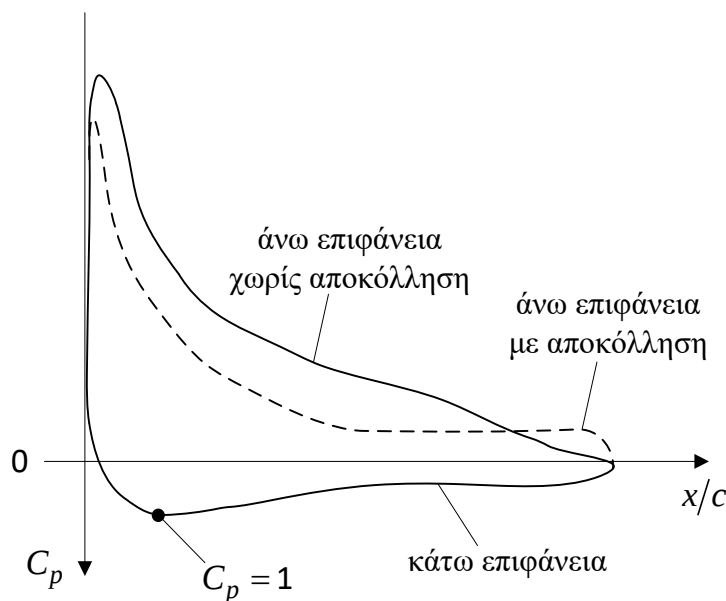
Σχήμα 4.10: Αποκόλληση του οριακού στρώματος για διάφορες γωνίες προσβολής.



Σχήμα 4.11: Η μεγάλη αύξηση της πίεσης στην άνω επιφάνεια της αεροτομής οδηγεί σε αναστροφή της ροής.

Λόγω της αποκόλλησης του οριακού στρώματος επέρχεται μείωση της ταχύτητας, και άρα αύξηση της πίεσης στο μεγαλύτερο μέρος της άνω επιφάνειας της αεροτομής. Η αύξηση της πίεσης μεταφράζεται σε μετατόπιση της αντεστραμμένης καμπύλης του συντελεστή πίεσης C_p προς τα κάτω, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.12. Η μετατόπιση αυτή οδηγεί σε μείωση του εμβαδού της καμπύλης C_p , γεγονός που συνδέεται με την μείωση της άντωσης λόγω της αποκόλλησης.

Ακόμη, η μείωση της ταχύτητας στην άνω επιφάνεια οδηγεί σε έλλειμα ορμής του ρευστού κατά την οριζόντια διεύθυνση. Το έλλειμμα ορμής συνεπάγεται δύναμη η οποία εξασκείται στην αεροτομή με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και η οποία είναι η δύναμη της αντίστασης. Αυτό εξηγεί την αύξηση της αντίστασης λόγω της αποκόλλησης.



Σχήμα 4.12: Μείωση του εμβαδού της καμπύλης του συντελεστή πίεσης C_p λόγω της αποκόλλησης της ροής στην άνω επιφάνεια της αεροτομής.

4.3.1 Ταχύτητα Απώλειας Στήριξης

Κατά την πτήση του αεροσκάφους με ταχύτητα V_∞ , η δύναμη άντωσης εξισορροπεί το βάρος του W :

$$W = L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot C_L \cdot S, \quad (4.52)$$

όπου C_L είναι ο συντελεστής άντωσης της πτέρυγας και S είναι το εμβαδόν της κάτοψής της. Στην κατάσταση απώλειας στήριξης ο συντελεστής άντωσης είναι μέγιστος ($C_{L_{\max}}$), και η αντίστοιχη ταχύτητα ονομάζεται ταχύτητα απώλειας στήριξης (V_{stall}) η οποία προκύπτει από την (4.52):

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2 W/S}{\rho C_{L_{\max}}}}. \quad (4.53)$$

Η ταχύτητα αυτή είναι σημαντική για τη φάση προσγείωσης του αεροσκάφους. Ο στόχος σχεδίασης είναι να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή της. Αυξημένη ταχύτητα απώλειας στήριξης συνεπάγεται μεγαλύτερη ταχύτητα του αεροσκάφους κατά την προσγείωση και άρα μεγαλύτερη κινητική ενέργεια που θα πρέπει να απορροφηθεί από το σύστημα προσγείωσης. Για παράδειγμα, μείωση της ταχύτητας προσγείωσης στα $2/3$ της αρχικής, έχει σαν αποτέλεσμα μείωση της κινητικής ενέργειας του αεροσκάφους κατά $(2/3)^2 \approx 0,44$ της αρχικής.

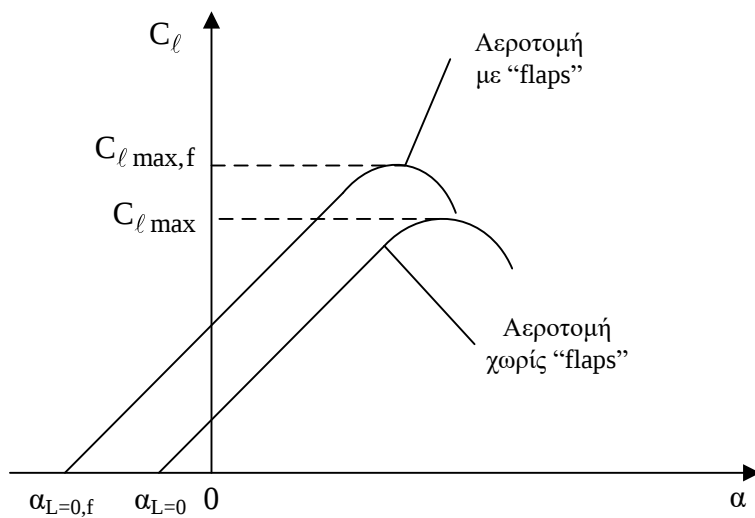
4.4 Υπεραντωτικές Διατάξεις

Στόχος μας κατά το σχεδιασμό της πτέρυγας είναι να έχουμε υψηλή τιμή του μέγιστου συντελεστή άντωσης ($C_{L_{\max}}$) γιατί έτσι επιτυγχάνουμε ταυτόχρονα και χαμηλή ταχύτητα απώλειας στήριξης (V_{stall}), αλλά και υψηλότερη άντωση. Κατά τις φάσεις της προσγείωσης και της απογείωσης του αεροσκάφους, όπου η ταχύτητα ροής είναι χαμηλή, απαιτείται για την εξισορρόπηση του βάρους του αεροσκάφους η εμφάνιση ενός πολύ υψηλού μέγιστου συντελεστή άντωσης ($C_{L_{\max}}$), όπως συνάγεται και από την εξίσωση (4.53). Ωστόσο, ο κατάλληλος σχεδιασμός της αεροτομής της πτέρυγας οδηγεί σε περιορισμένη αύξηση της τιμής του συντελεστή $C_{L_{\max}}$. Για το λόγο αυτό

καταφεύγουμε στη χρήση ειδικών υπεραντωτικών διατάξεων ("High Lift Devices"). Υπάρχουν δύο κύρια είδη υπεραντωτικών διατάξεων: (i) *Μεταπτερύγια* ("flaps"), στο πίσω μέρος της πτέρυγας, και (ii) *Προπτερύγια* ("slats"), στο εμπρός μέρος της πτέρυγας. Η αρχή λειτουργίας των υπεραντωτικών διατάξεων βασίζεται στην αύξηση της καμπυλότητας της αεροτομής και τον έλεγχο του οριακού στρώματος.

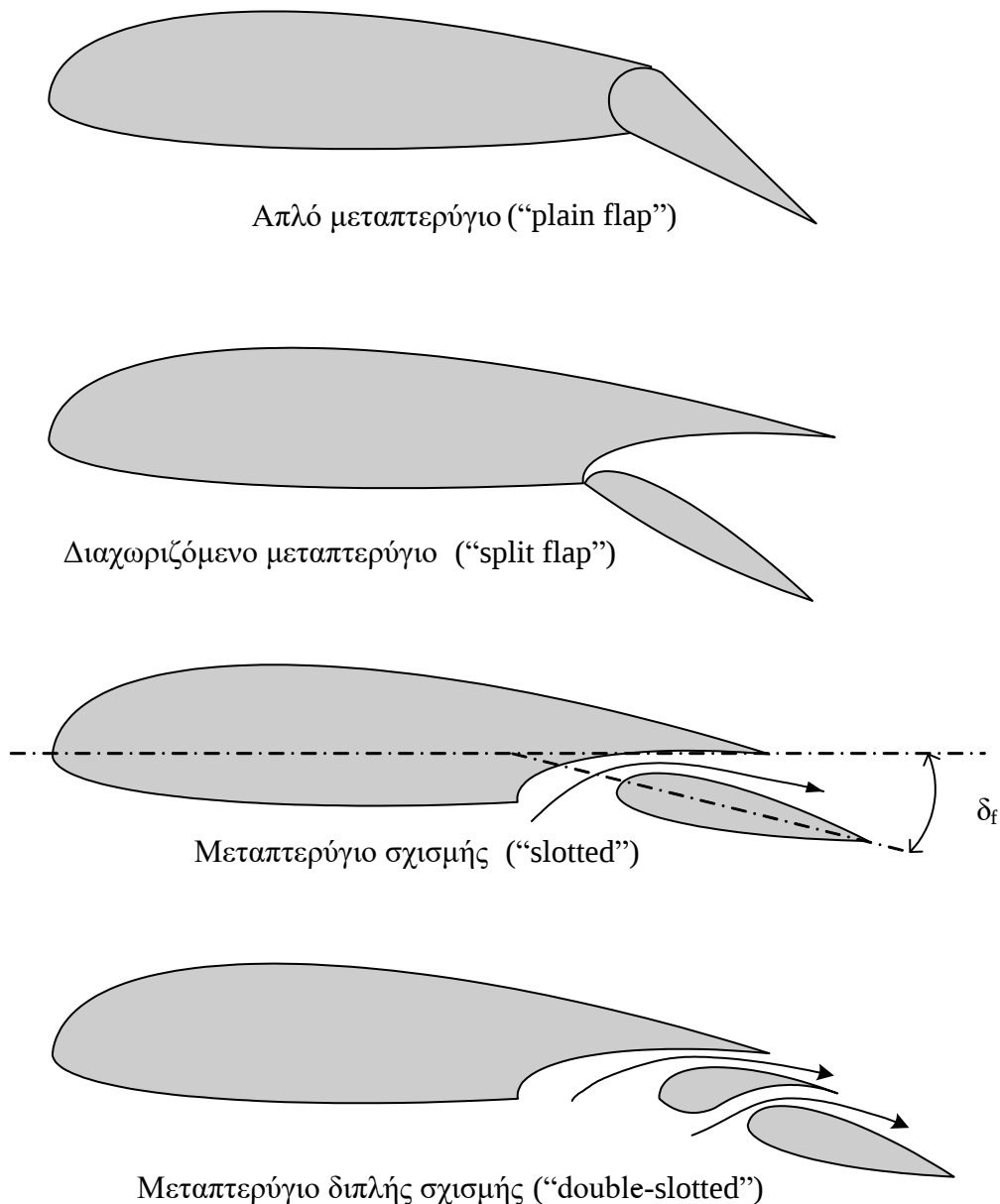
Μεταπτερύγιο ("flap")

Το μεταπτερύγιο ή αλλιώς «πτερύγιο καμπυλότητας» αυξάνει την καμπυλότητα ("camber") της αεροτομής με αποτέλεσμα η γωνία μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$) να μειώνεται και παράλληλα ο μέγιστος συντελεστής άντωσης ($C_{\ell \max}$) να αυξάνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.13. Συγκεκριμένα, για την ίδια γωνία προσβολής α θα ισχύει ότι ο συντελεστής άντωσης με χρήση μεταπτερυγίων θα είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο συντελεστή χωρίς ($C_{\ell}|_{flaps} > C_{\ell}|_{w/o}$). Παράλληλα, η αύξηση της καμπυλότητας, λόγω του μεταπτερυγίου, οδηγεί σε μείωση της γωνίας προσβολής απώλειας στήριξης ("stall angle") ($\alpha_S|_{flaps} < \alpha_S|_{w/o}$).



Σχήμα 4.13: Μεταβολή του συντελεστή άντωσης αεροτομής συναρτήσει της γωνίας προσβολής με και χωρίς μεταπτερύγιο.

Στο Σχήμα 4.14 παρουσιάζονται αντιπροσωπευτικοί τύποι μεταπτερυγίων: (i) *Μεταπτερύγια χωρίς διάκενο ("slot")*, τα οποία αυξάνουν την καμπυλότητα της αεροτομής και (ii) *Μεταπτερύγια με διάκενο ("slotted flaps")*, στα οποία, πέρα από την αύξηση της καμπυλότητας της αεροτομής, παρατηρείται μείωση της αποκόλλησης του οριακού στρώματος στην επάνω επιφάνεια των μεταπτερυγίων, λόγω της ύπαρξης του διακένου και του αντίστοιχου ρεύματος που διέρχεται από εκεί. Το διερχόμενο ρεύμα "ενεργοποιεί" το οριακό στρώμα.

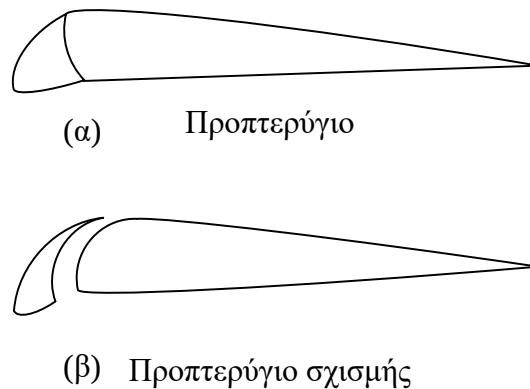


Σχήμα 4.14: Αντιπροσωπευτικά είδη μεταπτερυγίων.

Σημειώνεται ότι η έκταση των μεταπτερυγίων συνοδεύεται και από αύξηση της αντίστασης της αεροτομής. Για τον λόγο αυτό τα μεταπτερύγια βρίσκονται σε πλήρη έκταση μόνο κατά την προσγείωση του αεροσκάφους ενώ κατά την απογείωση εκτρέπονται μερικώς. Στην κανονική πτήση δεν χρησιμοποιούνται τα μεταπτερύγια.

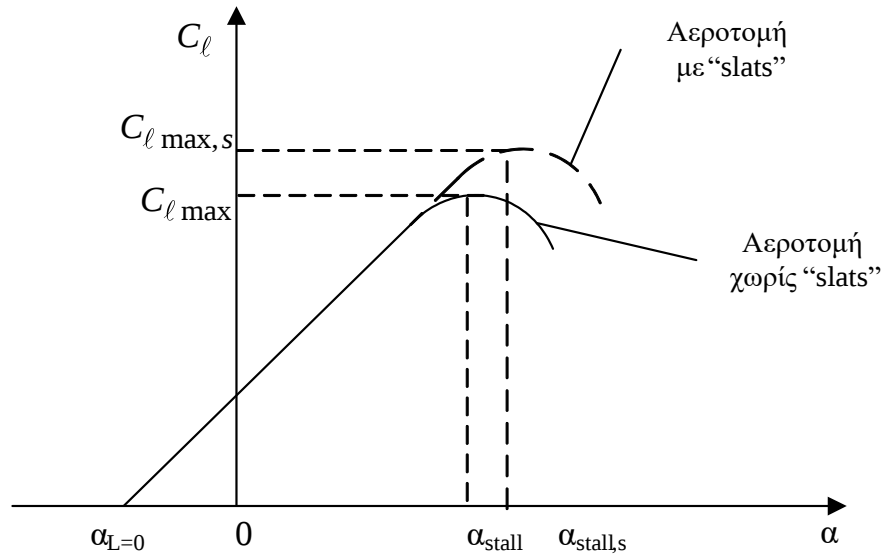
Προπτερύγιο ("slat")

Το προπτερύγιο είναι μια αεροδυναμική επιφάνεια όπως και τα μεταπτερύγια, η οποία τοποθετείται στο εμπρός μέρος της πτέρυγας όπως απεικονίζει το Σχήμα 4.15 έτσι ώστε κατά τη λειτουργία της να δημιουργεί υψηλές ταχύτητες, δηλαδή ελαττωμένη πίεση ροής στην επάνω επιφάνειά της πτέρυγας.



Σχήμα 4.15: Αντιπροσωπευτικά είδη προπτερυγίων.

Ο πρώτος τύπος προπτερυγίου ενεργεί ως παράγων αύξησης της καμπυλότητας της πτέρυγας. Στο δεύτερο τύπο του Σχήματος 4.15 από το κενό μεταξύ του προπτερυγίου και της κυρίως αεροτομής εισέρχεται μια δευτερεύουσα ροή η οποία αυξάνει την ενέργεια του οριακού στρώματος στην επάνω επιφάνεια της αεροτομής καθυστερώντας την αποκόλλησή του. Έτσι έχουμε αύξηση της γωνίας απώλειας στήριξης (α_s), και επομένως του μέγιστου συντελεστή άντωσης ($C_{l_{\max}}$). Η γωνία μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$) παραμένει σταθερή. Τα παραπάνω παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16: Μεταβολή του συντελεστή άντωσης (C_l) συναρτήσει της γωνίας προσβολής (α) με και χωρίς προπτερύγιο.

Παραδείγματα ευεργετικής επίδρασης των υπεραντωτικών διατάξεων

Πέραν της αύξησης της άντωσης για τις φάσεις απογείωσης / προσγείωσης, οι υπεραντωτικές διατάξεις επιδρούν ευεργετικά και σε άλλες επιδόσεις του αεροσκάφους. Αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένα παραδείγματα που φανερώνουν τις θετικές επιδράσεις της αύξησης της τιμής του συντελεστή άντωσης στον σχεδιασμό αεροσκάφους.

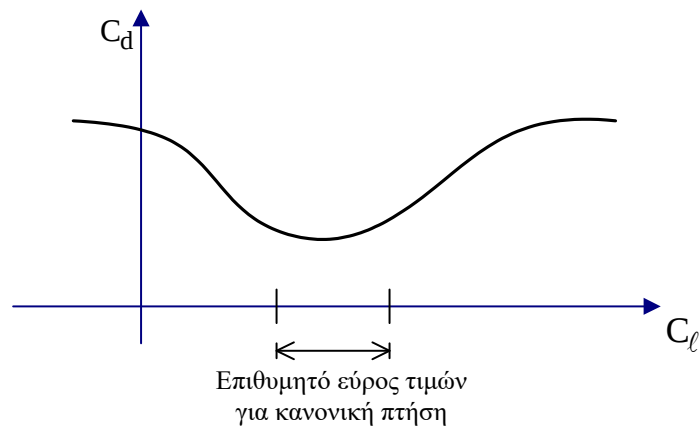
Η αύξηση του συντελεστή άντωσης (C_l), κατά 0.1 για δεδομένη γωνία προσβολής (α), επιτρέπει μείωση της γωνίας προσέγγισης του αεροσκάφους κατά 1° που ισοδυναμεί με μείωση του βάρους του συστήματος προσγείωσης κατά 1500 *lbs*, λόγω του μικρότερου απαιτούμενου μήκους των τροχών. Επίσης, η αύξηση του μέγιστου συντελεστή άντωσης ($C_{l\max}$) κατά 1.5 %, για δεδομένη ταχύτητα προσέγγισης (V_A), έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του επιτρεπτού φορτίου κατά 6500 *lbs*. Αντίστοιχα, μια αύξηση της τιμής του αεροδυναμικού λόγου (L/D) κατά 1% μπορεί να οδηγήσει στην αύξηση του επιτρεπτού φορτίου κατά 3000 *lbs* για δεδομένη εμβέλεια, ή σε αύξηση της εμβέλειας κατά 150 *nm* για σταθερή τιμή φορτίου.

4.5 Κύριοι Παράγοντες που Επηρεάζουν την Αεροδυναμική Απόδοση Αεροτομής

Ο απαιτούμενος συντελεστής άντωσης κατά την κανονική πτήση συνδέεται με το βάρος του αεροσκάφους, το οποίο μεταβάλλεται λόγω της κατανάλωσης καύσιμου. Ο μέσος όρος των απαιτούμενων τιμών του συντελεστή (C_ℓ) κατά την πτήση ονομάζεται σχεδιαστικός συντελεστής άντωσης ($C_{\ell,design}$). Το σχήμα της αεροτομής επιλέγεται με βάση δυο κριτήρια:

1. η αεροτομή να "δίνει" την τιμή $C_{\ell,design}$ κατά την κανονική πτήση, και
2. το εύρος των τιμών του C_ℓ από την αρχή μέχρι το τέλος της κανονικής πτήσης να αντιστοιχεί στις μικρότερες δυνατές τιμές του συντελεστή αντίστασης (C_d).

Το Σχήμα 4.17 απεικονίζει το διάγραμμα (C_d, C_ℓ) το οποίο ονομάζεται "drag polar". Η μείωση του συντελεστή αντίστασης για τις τιμές του C_ℓ που ενδιαφέρουν δίνει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα στη καμπύλη (C_d, C_ℓ) το οποίο ονομάζεται "drag bucket".



Σχήμα 4.17: Το εύρος τιμών του συντελεστή άντωσης (C_ℓ) κατά τη κανονική πτήση πρέπει να αντιστοιχεί στις μικρότερες δυνατές τιμές του συντελεστή αντίστασης (C_d).

Παρακάτω παρουσιάζονται βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά μιας αεροτομής.

4.5.1 Μέγιστο πάχος αεροτομής

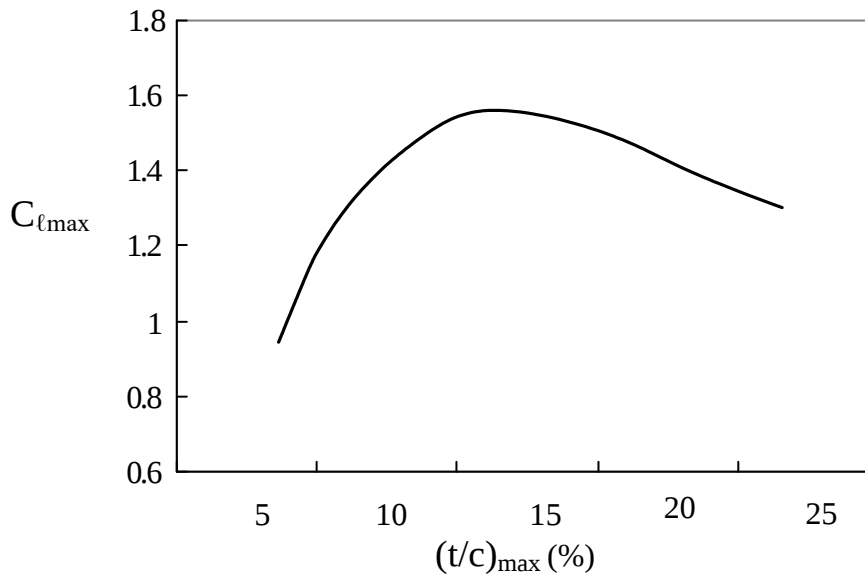
Ένα κύριο στοιχείο σχεδιασμού αεροτομής είναι το μέγιστο πάχος της $(t/c)_{\max}$. Χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα αεροσκαφών, υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του δομικού βάρους (W_E) ("empty weight") και του βάρους καύσιμου (W_F) με το μέγιστο πάχος αεροτομής:

$$W_E \sim \sqrt{(t/c)_{\max}}, \quad (4.54)$$

$$W_F \sim (t/c)_{\max}. \quad (4.55)$$

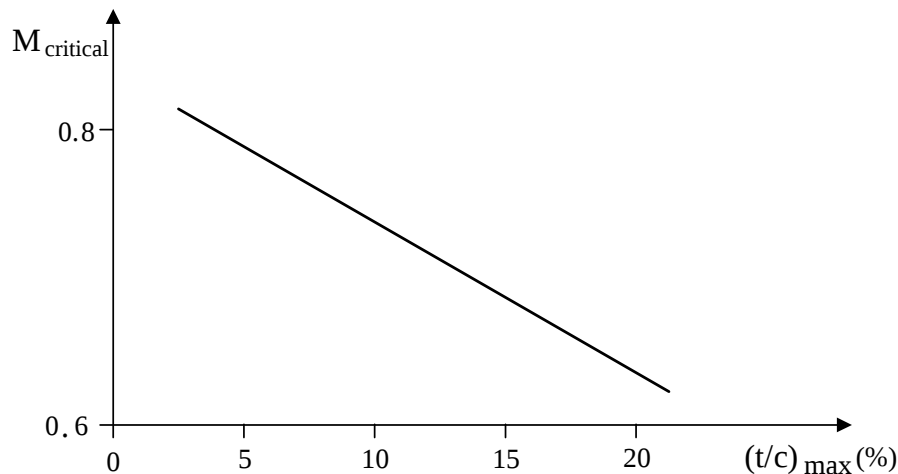
Το πάχος της αεροτομής είναι σημαντικό τόσο για το βάρος της κατασκευής, όσο και για την ποσότητα καύσιμου η οποία μπορεί να αποθηκευτεί στο εσωτερικό της πτέρυγας.

Το μέγιστο πάχος $(t/c)_{\max}$ επηρεάζει την τιμή $C_{\ell \max}$ όπως απεικονίζει το Σχήμα 4.18. Αρχική αύξηση του πάχους οδηγεί σε επιτάχυνση της ροής στην επάνω επιφάνεια της αεροτομής, το οποίο συνεπάγεται μείωση της πίεσης και αύξηση του συντελεστή άντωσης. Όμως, περαιτέρω αύξηση του πάχους οδηγεί σε αποκόλληση της ροής κατάντι της περιοχής του μέγιστου πάχους, το οποίο συνεπάγεται μείωση του $C_{\ell \max}$.



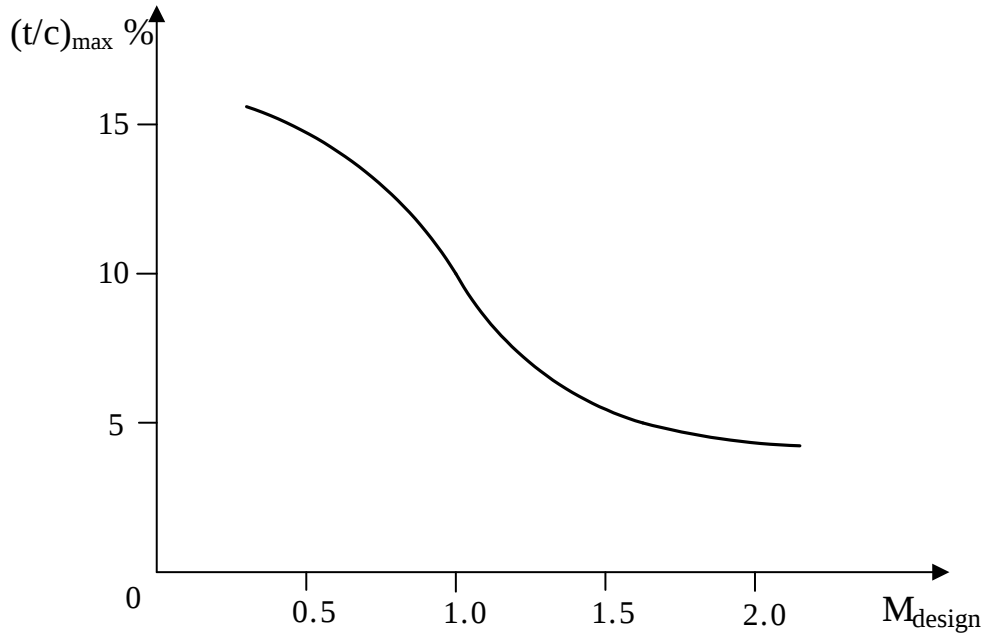
Σχήμα 4.18: Μεταβολή του μέγιστου συντελεστή άντωσης με την αύξηση του μέγιστου πάχους αεροτομής.

Όσον αφορά την ταχύτητα πτήσης, το πάχος επηρεάζει τη μέγιστη ταχύτητα της ροής γύρω από την αεροτομή. Ο μέγιστος αριθμός Mach της κανονικής πτήσης, για τον οποίο ο τοπικός αριθμός Mach της ροής είναι παντού μικρότερος της μονάδας, ονομάζεται *κρίσιμος αριθμός Mach* (“ M_{critical} ”). Το Σχήμα 4.19 απεικονίζει ότι η αύξηση του πάχους οδηγεί σε μείωση του κρίσιμου αριθμού Mach. Δηλαδή, πρέπει να μειωθεί η ταχύτητα πτήσης ώστε να αποφευχθούν κύματα κρούσης στην πτέρυγα, τα οποία οδηγούν σε σημαντική αύξηση της αντίστασης.



Σχήμα 4.19: Αύξηση του μέγιστου πάχους της αεροτομής προκαλεί μείωση του κρίσιμου αριθμού Mach.

Αυτό έχει σαν συνέπεια, αεροσκάφη τα οποία πετούν με υψηλές υποηχητικές ταχύτητες να έχουν μέγιστο πάχος αεροτομής πτέρυγας μικρότερο του βέλτιστου για την επίτευξη μέγιστου $C_{\ell \text{max}}$. Αυτό απεικονίζει και το Σχήμα 4.20 από ιστορικά δεδομένα αεροσκαφών.



Σχήμα 4.20: Ιστορικά δεδομένα του σχεδιαστικού αριθμού Mach πτήσης με το μέγιστο πάχος της χρησιμοποιούμενης αεροτομής.

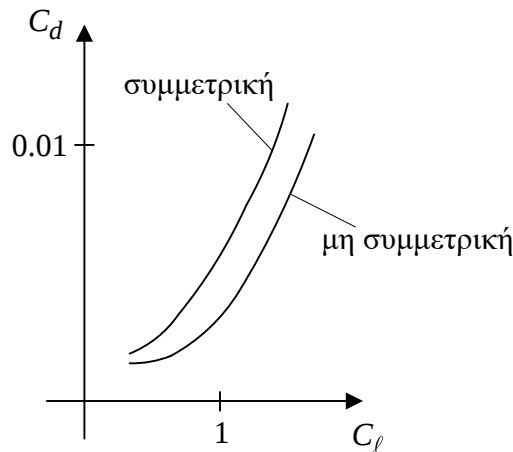
4.5.2 Καμπυλότητα

Η καμπυλότητα $C(x)$ επηρεάζει την ροή με τρόπο αντίστοιχο αυτού του πάχους, επιταχύνοντας την ροή στην επάνω επιφάνεια της αεροτομής. Όπως προέκυψε και από τη θεωρία των λεπτών αεροτομών, για δεδομένη γωνία προσβολής α και εντός της γραμμικής περιοχής της καμπύλης $C_\ell(\alpha)$, μια μη-συμμετρική αεροτομή θα έχει μεγαλύτερο συντελεστή άντωσης από μια αντίστοιχη συμμετρική του ίδιου μέγιστου πάχους. Αυτό μεταφράζεται σε μετατόπιση της καμπύλης προς τα αριστερά, όπως απεικονίζει το Σχήμα 4.7. Λόγω εντονότερης αποκόλλησης της ροής στις μη-συμμετρικές αεροτομές, η γωνία απώλειας στήριξης (α_s) είναι μικρότερη της αντίστοιχης συμμετρικής, με τον συντελεστή $C_{\ell_{\text{max}}}$ να είναι παρ' όλα αυτά μεγαλύτερος.

Παράλληλα, η εντονότερη αποκόλληση του οριακού στρώματος στις μη-συμμετρικές αεροτομές οδηγεί σε αύξηση της αντίστασης για δεδομένη γωνία προσβολής. Ωστόσο, η αύξηση της άντωσης είναι μεγαλύτερη σε σχέση με αυτή της αντίστασης, με συνέπεια ο αεροδυναμικός λόγος $L/D = C_\ell/C_d$ να είναι μεγαλύτερος για τις μη-συμμετρικές

αεροτομές σε σχέση με τις συμμετρικές. Αυτό μεταφράζεται σε μετατόπιση της καμπύλης $C_d = f(C_\ell)$ προς τα δεξιά, η οποία αναπαρίσταται στο Σχήμα 4.21. Για τον ίδιο συντελεστή C_ℓ επομένως, οι συμμετρικές αεροτομές έχουν μεγαλύτερο συντελεστή αντίστασης C_d .

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως αύξηση της καμπυλότητας της αεροτομής οδηγεί και σε αύξηση του μέτρου της ροπής πρόνευσης ως προς το αεροδυναμικό κέντρο. Από την θεωρία των λεπτών αεροτομών προέκυψε πως ο συντελεστής ροπής ($C_{m,c/4}$) ως προς το τέταρτο της χορδής, που συμπίπτει με το αεροδυναμικό κέντρο, είναι μηδενικός στις συμμετρικές αεροτομές, αλλά έχει μη-μηδενική τιμή στις μη-συμμετρικές αεροτομές (εξισώσεις (4.26) και (4.49) αντίστοιχα).

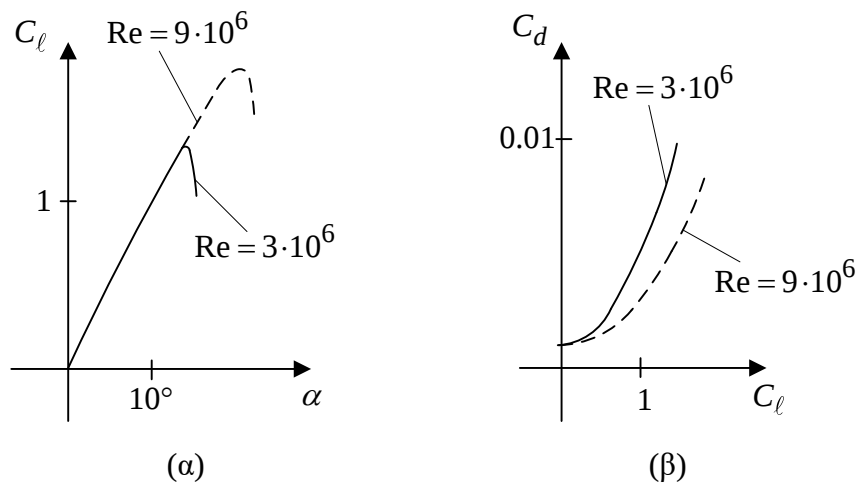


Σχήμα 4.21: Επίδραση της καμπυλότητας στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά αεροτομής.

4.5.3 Αριθμός Reynolds

Η επίδραση της ιξώδους ροής στις αεροδυναμικές δυνάμεις της αεροτομής εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds της ροής και απεικονίζεται στο Σχήμα 4.22. Κατά την αύξηση του αριθμού Reynolds παρατηρείται μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή κοντά στο χείλος προσβολής της αεροτομής. Η τυρβώδης ροή κατέχει διττό ρόλο αφού αφενός αυξάνει την παρασιτική αντίσταση (αντίσταση λόγω διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια της αεροτομής) και αφετέρου «καθυστερεί» την αποκόλληση της ροής, μειώνοντας έτσι την αντίσταση λόγω διαφοράς πίεσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να

μην είναι ξεκάθαρο αν αυξάνει ή μειώνει τον συνολικό συντελεστή αντίστασης σε μικρές γωνίες προσβολής. Σε μεγάλες γωνίες, λόγω της εντονότερης αποκόλλησης της ροής, κυρίαρχη μορφή αντίστασης αποτελεί η αντίσταση λόγω διαφοράς πίεσης, με αποτέλεσμα η «καθυστέρηση» στην αποκόλληση της ροής, στους υψηλούς αριθμούς Reynolds, να μειώνει τελικά την συνολική αντίσταση, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.22(β). Για τον ίδιο λόγο, σε υψηλούς αριθμούς Reynolds αυξάνεται η γωνία απώλειας στήριξης και ο μέγιστος συντελεστής άντωσης ($C_{\ell \max}$), όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 4.22(α).



Σχήμα 4.22: Επίδραση του αριθμού Reynolds στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά αεροτομής.

4.6 Οικογένειες Αεροτομών NACA

Οι αεροτομές της NACA είναι από τις πιο γνωστές οικογένειες αεροτομών και εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται από τη δεκαετία του '20. Ακολουθεί σύντομη περιγραφή των κυριότερων ομάδων. Λεπτομερέστερη εξέτασή τους παρουσιάζεται στο [2].

NACA τεσσάρων ψηφίων ("4-digit")

Οι αεροτομές NACA 'τεσσάρων ψηφίων' καθορίζονται από τη *Μέση Γραμμή* και το μέγιστο πάχος. Το πρώτο ψηφίο δηλώνει τη μέγιστη καμπυλότητα σε ποσοστό επί τοις εκατό του μήκους της χορδής. Το δεύτερο ψηφίο δείχνει τη θέση της μέγιστης καμπυλότητας κατά μήκος της χορδής σε δέκατα της χορδής. Τα δύο τελευταία ψηφία δίνουν το μέγιστο πάχος και πάλι σε ποσοστό επί τοις εκατό του μήκους της χορδής. Για παράδειγμα, η αεροτομή NACA 2410 έχει μέγιστο πάχος 10% και καμπυλότητα 2% του μήκους χορδής στη θέση 0.4 c.

NACA πέντε ψηφίων ("5-digit")

Οι αεροτομές NACA 'πέντε ψηφίων' αποτελούν βελτίωση των αεροτομών τεσσάρων ψηφίων. Το σημείο μέγιστης καμπυλότητας μετατέθηκε προς τα εμπρός "δίνοντας" μεγαλύτερο συντελεστή ($C_{\ell \max}$) με διατήρηση σχετικά χαμηλής ροπής ($C_{m,c/4}$).

Το πρώτο ψηφίο πολλαπλασιαζόμενο με 3/2 δίνει τη θεωρητική τιμή για τον συντελεστή άντωσης σε δέκατα. Το δεύτερο και το τρίτο ψηφίο διαιρεμένα δια του 2 δίνουν τη θέση της μέγιστης καμπυλότητας σε ποσοστό % της χορδής. Τα δύο τελευταία ψηφία δίνουν το μέγιστο πάχος της αεροτομής σε ποσοστό % του μήκους της χορδής της. Για παράδειγμα, η αεροτομή NACA 23012 έχει μέγιστο πάχος 12%, συντελεστή $C_{\ell}=0.3$ και η θέση της μέγιστης καμπυλότητας είναι στο 15% της χορδής.

Οι τιμές του μέγιστου βέλους καμπυλότητας κυμαίνονται μεταξύ των τιμών $C_{\min}=0.05$ και $C_{\max}=0.25$, ενώ υψηλότερες τιμές αποφεύγονται γιατί οδηγούν σε μεγάλη αύξηση του συντελεστή $C_{m,c/4}$.

NACA σειρά 6

Οι αεροτομές NACA "σειράς 6" αποτελούν βελτίωση ως προς την διανομή του πάχους και της καμπυλότητας έτσι ώστε να έχουμε στρωτό οριακό στρώμα σε ευρεία περιοχή του χείλους προσβολής και να διατηρηθεί χαμηλός ο συντελεστής αντίστασης C_d . Ο χαμηλός C_d διατηρείται συνήθως για τιμές του συντελεστή άντωσης μεταξύ 0.1 και 0.2 (τρίτο ψηφίο της ονομασίας).

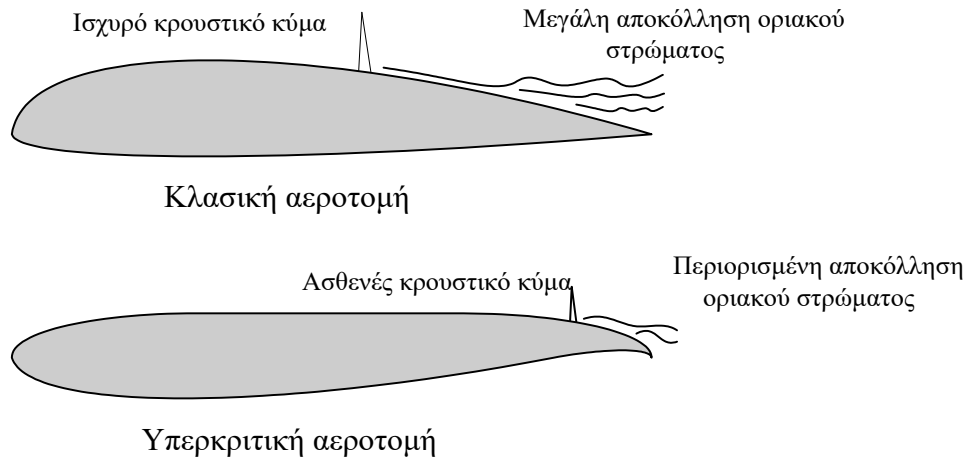
Το πρώτο ψηφίο είναι απλά το δηλωτικό της σειράς. Το δεύτερο ψηφίο δίνει τη θέση της ελάχιστης πίεσης σε δέκατα του μήκους της χορδής. Το τρίτο ψηφίο δίνει τη τιμή για τον συντελεστή άντωσης $C_{\ell,design}$ σε δέκατα. Τα δύο τελευταία ψηφία δίνουν το

μέγιστο πάχος της αεροτομής σε ποσοστό % του μήκους της χορδής. Τέλος, ο δείκτης στο δεύτερο ψηφίο δηλώνει το εύρος των τιμών του C_ℓ που αντιστοιχούν στις μικρότερες τιμές του C_d σε δέκατα.

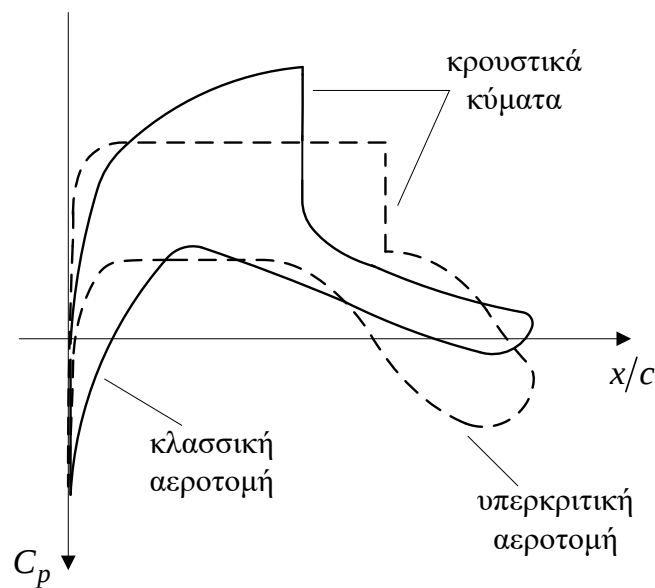
Για παράδειγμα θεωρούμε την αεροτομή NACA 63₂-210. Το 6 είναι δηλωτικό σειράς, η θέση ελάχιστης πίεσης είναι 0.3c, ο συντελεστής άντωσης είναι 0.2 και το μέγιστο πάχος είναι $t_{\max} = 0.10c$.

Υπερκριτική Αεροτομή

Η πτήση σε υψηλές υποηχητικές ταχύτητες απαιτεί ειδικές αεροτομές οι οποίες δεν προκαλούν ισχυρά κύματα κρούσης. Οι υπερκριτικές αεροτομές έχουν καλύτερη συμπεριφορά σε υψηλές υποηχητικές ταχύτητες πτήσης επειδή το τυχόν κρουστικό κύμα που σχηματίζεται στην επιφάνεια είναι ασθενές, το οποίο επίσης συνεπάγεται μικρότερη αποκόλληση του οριακού στρώματος. Αυτό επιτυγχάνεται χάρη στην επίπεδη επάνω επιφάνειά τους, όπως απεικονίζει και το Σχήμα 4.23. Το Σχήμα 4.24 απεικονίζει τις κατανομές του συντελεστή πίεσης κατά τη χορδή για μια κλασσική και μια υπερκριτική αεροτομή σε υψηλή υποηχητική πτήση. Παρατηρείται ότι και στις δύο αεροτομές υπάρχει απότομη αύξηση της πίεσης λόγω του κύματος κρούσης, με την αύξηση ωστόσο να είναι πιο μικρή στην υπερκριτική αεροτομή, επειδή το κύμα κρούσης είναι πιο ασθενές. Επίσης, παρατηρώντας τα εμβαδά των δύο καμπυλών, προκύπτει ότι η απώλεια άντωσης στην υπερκριτική αεροτομή λόγω της σχετικά επίπεδης άνω επιφάνειας αντισταθμίζεται από την αύξηση της άντωσης λόγω της αυξημένης καμπυλότητας στο πίσω τμήμα της.



Σχήμα 4.23: Κλασική και υπερκριτική αεροτομή για πτήση με υψηλή υποηχητική ταχύτητα.

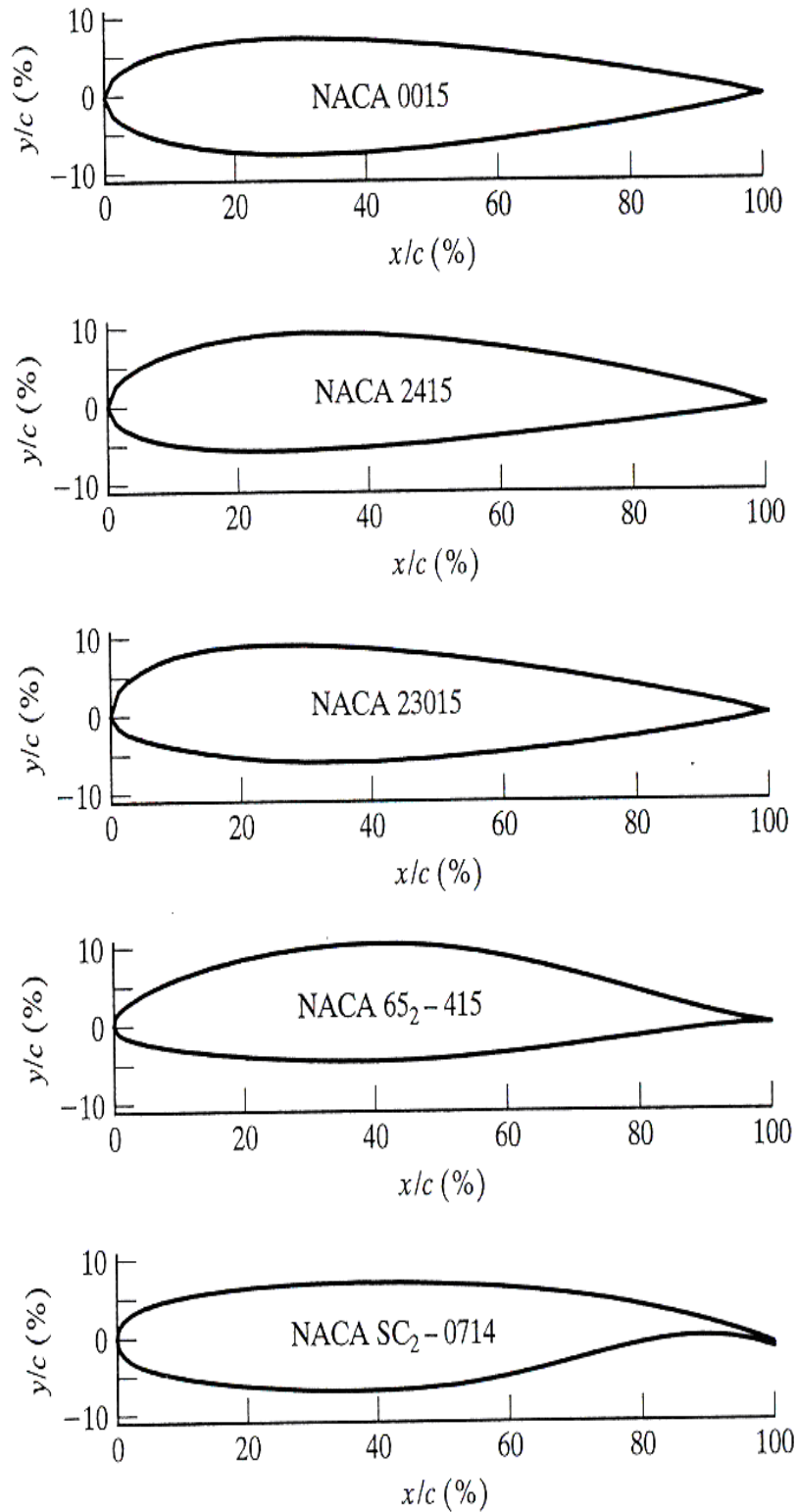


Σχήμα 4.24: Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p κατά τη χορδή για μια κλασική και μια υπερκριτική αεροτομή για πτήση με υψηλή υποηχητική ταχύτητα.

Το Σχήμα 4.25 απεικονίζει χαρακτηριστικές αεροτομές NACA συμπεριλαμβανομένης και μίας αεροτομής κατάλληλης για υψηλή υποηχητική πτήση ($M_{cruise} \cong 0.8$), η οποία είναι *υπερκριτική* (“supercritical”) αεροτομή.

Μικρά αεροσκάφη με $M_{cruise} \leq 0.4$ συνήθως χρησιμοποιούν αεροτομή NACA πέντε ψηφίων η οποία δίνει υψηλό συντελεστή $C_{\ell_{max}}$. Μεγάλα επιβατηγά και μικρά

αεριοθούμενα αεροσκάφη που έχουν μεγάλη εμβέλεια και πετούν σε υψηλές υποηχητικές ταχύτητες συνήθως χρησιμοποιούν υπερκριτικές αεροτομές NACA. Για παράδειγμα, αυτός ο τύπος αεροτομής χρησιμοποιείται από τα αεροσκάφη Boeing 777 και Airbus A-330/340. Υπερηχητικά στρατιωτικά αεροσκάφη μπορούν να χρησιμοποιήσουν αεροτομές NACA σειράς 6 μικρού πάχους με $(t/c)_{\max} \cong 0.04$.



Σχήμα 4.25: Χαρακτηριστικές αεροτομές NACA. Η τελευταία είναι υπερκριτική αεροτομή.

4.7 Παράρτημα: Μερικά Χρήσιμα Ολοκληρώματα

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{(\cos\theta - \cos\theta_P)} d\theta = \pi \frac{\sin(n\theta_P)}{\sin\theta_P}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta)\sin\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_P)} d\theta = -\pi \cos(n\theta_P), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_P)} d\theta = \pi$$

$$\int_0^{\pi} A_n \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0, \quad \text{αν } n \neq m$$

$$\int_0^{\pi} A_n \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} A_n, \quad \text{αν } n = m$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = -\frac{\cos(n\pi) - 1}{n}, \quad \text{για } n \neq 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = \frac{\sin(n\pi)}{n}, \quad \text{για } n \neq 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = 0, \quad \text{για } n \neq m$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

4.8 Παραδείγματα – Ασκήσεις

4.8.1 Εφαρμογή της Θεωρίας Λεπτών Αεροτομών

Δίνεται μη-συμμετρική αεροτομή με εξίσωση μέσης γραμμής $z = z_0 \left[\frac{x}{c} - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right]$.

Να υπολογιστούν σύμφωνα με τη θεωρία των λεπτών αεροτομών.

1. Η εξίσωση του συντελεστή άντωσης C_ℓ και η γωνία μηδενικής άντωσης $\alpha_{L=0}$
2. Οι συντελεστές ροπής πρόνευσης $C_{m,LE}$, $C_{m,c/4}$ και το κέντρο πίεσης X_{cp} .

Λύση

1) Για τον υπολογισμό των συντελεστών A_0 , A_n της θεωρίας των λεπτών αεροτομών

χρησιμοποιούμε την dz/dx . Έχουμε $\frac{dz}{dx} = \frac{z_0}{c} \left(1 - 2 \frac{x}{c} \right)$.

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες $x = \frac{1}{2} c (1 - \cos \theta)$

(Σχέση (4.12)) έχουμε τελικά:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{z_0}{c} \cos \theta}$$

Οι συντελεστές έχουν ως εξής:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z_0}{c} \cos \theta d\theta = \alpha,$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{z_0}{c} \cos \theta \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{z_0}{c} \frac{\pi}{2} = \frac{z_0}{c},$$

$$A_n = 0, \quad n \geq 2.$$

Η εξίσωση του συντελεστή άντωσης C_ℓ δίνεται από τη Σχέση (4.40)

$$C_\ell = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left(\alpha + \frac{z_0}{2c} \right)$$

Εξάλλου από τη σχέση (4.43) έχουμε :

$$C_\ell = 2\pi (\alpha - \alpha_{L=0}) \Rightarrow \boxed{\alpha_{L=0} = - \frac{z_0}{2c}}$$

2) Για τους συντελεστές ροπής πρόνευσης έχουμε:

Από την Σχέση (4.47) έχουμε:

$$C_{m,LE} = - \frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \Rightarrow C_{m,LE} = - \frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{z_0}{c} \right)$$

Αντίστοιχα, από την Σχέση (4.49) έχουμε:

$$C_{m,c/4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1) \Rightarrow C_{m,c/4} = - \frac{\pi}{4} \frac{z_0}{c}$$

Τέλος από τη Σχέση (4.50) έχουμε:

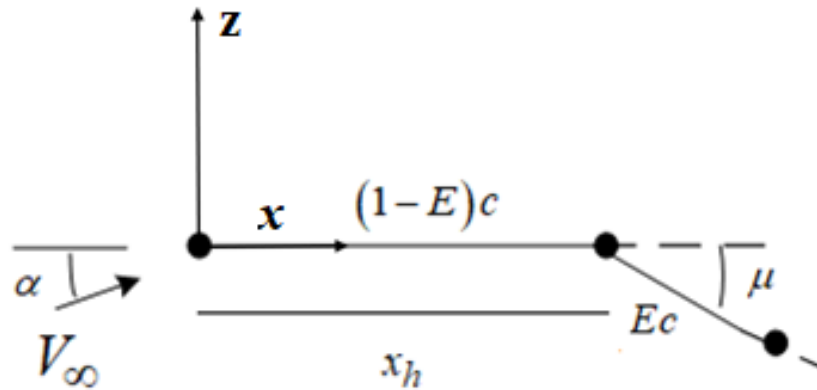
$$\frac{X_{CP}}{c} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{A_1 - A_2}{2 A_0 + A_1} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{X_{CP}}{c} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{z_0/c}{2 \alpha + z_0/c} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{X_{CP} = \frac{c}{4} + \frac{z_0}{2 \alpha + z_0/c}}$$

4.8.2 Αύξηση της άντωσης και της ροπής πρόνευσης λόγω μεταπτερυγίου

Να υπολογιστεί η αύξηση του συντελεστή άντωσης και ροπής πρόνευσης αεροτομής από την παρουσία μεταπτερυγίου μήκους Ec που ανοίγει σε γωνία μ .



Λύση

Για την θέση του μεταπτερυγίου θα ισχύει:

$$x_h = (1 - E) c$$

Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες θα έχουμε:

$$x_h = \frac{c}{2} [1 - \cos(\theta_h)] \xrightarrow{x_h = (1-E)c} \theta_h = \cos^{-1}(2E - 1)$$

Για την κλίση της μέσης γραμμής θα ισχύει:

$$\frac{dz}{dx} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_h \\ -\tan(\mu), & x_h \leq x \leq c \end{cases}$$

Από τις Σχέσεις (4.33) και (4.34) για τους συντελεστές μη-συμμετρικών αεροτομών έχουμε:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} d\theta = \alpha - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\theta_h} 0 d\theta + \int_{\theta_h}^\pi -\tan(\mu) d\theta \right] \Rightarrow$$

$$A_0 = \alpha + \tan(\mu) \left(1 - \frac{\theta_h}{\pi}\right)$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_h} 0 \cdot \cos(\theta) d\theta + \int_{\theta_h}^\pi -\tan(\mu) \cos(\theta) d\theta \right] \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \tan(\mu) \sin(\theta_h)$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos(2\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_h} 0 \cdot \cos(2\theta) d\theta + \int_{\theta_h}^\pi -\tan(\mu) \cos(2\theta) d\theta \right] \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{1}{\pi} \tan(\mu) \sin(2\theta_h)$$

- Για τον συντελεστή άντωσης, από την σχέση (4.40) έχουμε:

$$C_\ell = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left[\alpha + \tan(\mu) \left(1 - \frac{\theta_h}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi} \tan(\mu) \sin(\theta_h) \right] \Rightarrow$$

$$C_\ell = 2\pi\alpha + 2\tan(\mu)[\pi - \theta_h + \sin(\theta_h)]$$

Παρατηρούμε πως ο όρος $2\pi\alpha$ αποτελεί την αναλυτική λύση, της θεωρίας λεπτών αεροτομών, για την συμμετρική αεροτομή χωρίς την χρήση μεταπτερυγίων. Οπότε θα ισχύει:

$$C_{\ell, flap} = C_{\ell, without flap} + 2\tan(\mu)[\pi - \theta_h + \sin(\theta_h)]$$

Ο συντελεστής άντωσης επομένως αυξάνεται με την παρουσία μεταπτερυγίου.

- Για τον συντελεστή ροπής πρόνευσης, από την σχέση (4.49) θα έχουμε:

$$C_{m, c/4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{\pi} \tan(\mu) \sin(2\theta_h) - \frac{2}{\pi} \tan(\mu) \sin(\theta_h) \right] \Rightarrow$$

$$C_{m, c/4} = \frac{\tan(\mu)}{4} [\sin(2\theta_h) - 2\sin(\theta_h)]$$

Για την συμμετρική αεροτομή γνωρίζουμε ότι στην θέση $c/4$ ισχύει:

$$C_{m, c/4} = 0$$

οπότε παρατηρούμε ότι με την χρήση μεταπτερυγίου θα έχουμε $C_{m,c/4} \neq 0$.

- Για $E = 0.15$, $\alpha = 0^\circ$ και $\mu = 10^\circ$ να υπολογισθούν οι νέοι αεροδυναμικοί συντελεστές:

$$\theta_h = \cos^{-1}(2E - 1) = \cos^{-1}(2 \cdot 0.15 - 1) = 134.43^\circ = 2.35 \text{ rad}$$

$$C_{\ell, \text{without flap}} = 2\pi\alpha = 0$$

$$C_{\ell, \text{flap}} = 2 \tan(\mu)[\pi - \theta_h + \sin(\theta_h)] = 2 \tan(10^\circ)[\pi - 2.35 + \sin(2.35)] = 0.53$$

$$C_{m,c/4} = \frac{\tan(\mu)}{4} [\sin(2\theta_h) - 2\sin(\theta_h)] = -0.11$$

4.8.3 Εφαρμογή της Μεθόδου των Σημειακών Στροβίλων στην αεροτομή NACA 0012

Εφαρμόστε τη μέθοδο των σημειακών στροβίλων για την εύρεση του συντελεστή άντωσης (C_ℓ) της αεροτομής NACA 0012.

1. Να μελετηθεί η επίδραση του αριθμού των πλαισίων, στον συντελεστή άντωσης, για γωνίες προσβολής $\alpha = 2^\circ$ και $\alpha = 10^\circ$.
2. Να κατασκευαστεί διάγραμμα $C_\ell(\alpha)$ στο εύρος $0^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ$, χρησιμοποιώντας την Μέθοδο των Σημειακών Στροβίλων με 49 πλαίσια.

Σε κάθε περίπτωση, συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά της Θεωρίας Λεπτών Αεροτομών.

Λύση

1.

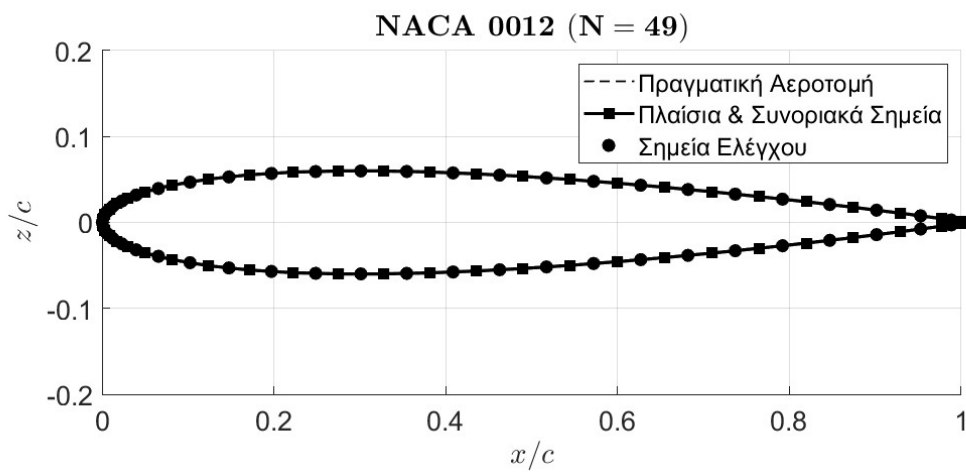
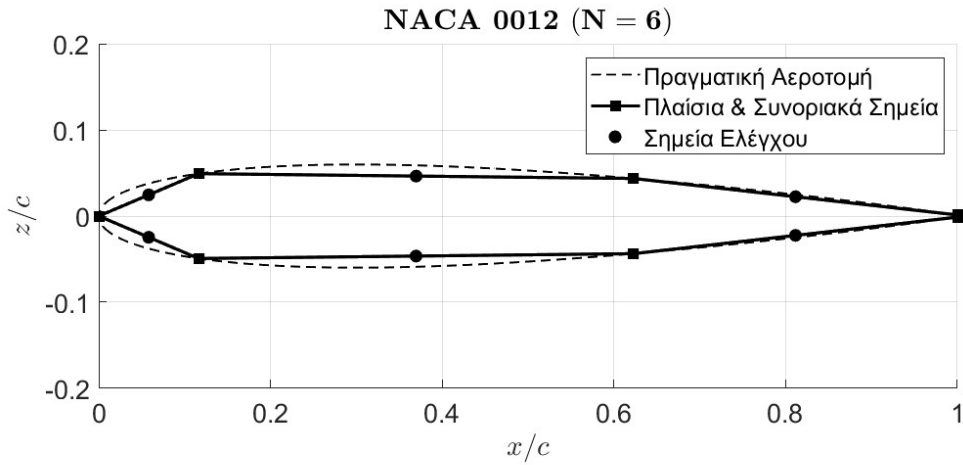
Η αεροτομή NACA 0012 αποτελεί συμμετρική αεροτομή με μέγιστο πάχος 12% επί της χορδής, με συνέπεια να μην μπορεί να χαρακτηριστεί ως λεπτή αεροτομή. Η επίδραση του πάχους της θα μελετηθεί με την Μέθοδο των Σημειακών Στροβίλων.

Η εξίσωση της εξωτερικής επιφάνειας μιας συμμετρικής αεροτομής NACA 4-ψηφίων με μέγιστο πάχος $t_{\max}$, έχει την παρακάτω μορφή:

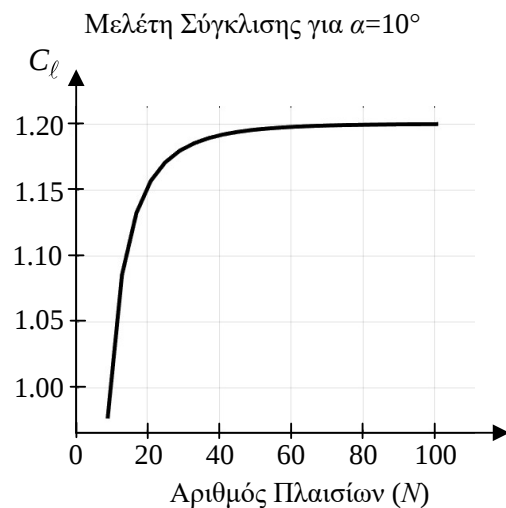
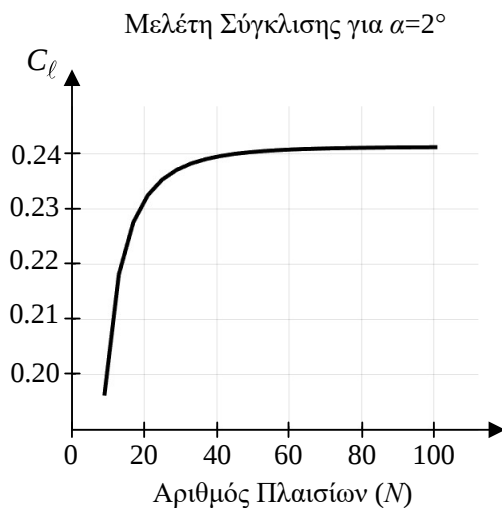
$$z = \pm 5 t_{\max} \cdot (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad , \quad 0 < x < 1$$

όπου τα μήκη x , z και $t_{\max}$ εκφράζονται ως κλάσματα του μήκους της χορδής. Οι θετικές τιμές του z αντιστοιχούν στην άνω επιφάνεια και οι αρνητικές στην κάτω επιφάνεια της αεροτομής. Για την αεροτομή NACA 0012 θα ισχύει $t_{\max} = 0.12$.

Με κατάλληλο διαμερισμό του άξονα των x σε $N+1$ σημεία μπορούμε να διακριτοποιήσουμε την αεροτομή σε N πλαίσια. Παρακάτω φαίνονται δύο ενδεικτικές περιπτώσεις διακριτοποίησης, για αριθμό πλαισίων $N = 6$ και $N = 49$:



Η μελέτη της επίδρασης του αριθμού των πλαισίων στα αποτελέσματα καλείται «Μελέτη Σύγκλισης». Παρακάτω παρουσιάζεται η μελέτη σύγκλισης του συντελεστή άντωσης (C_ℓ) για γωνίες προσβολής $\alpha = 2^\circ$ και $\alpha = 10^\circ$:



Παρατηρούμε πως οι συντελεστές άντωσης συγκλίνουν στις τιμές $C_\ell(\alpha = 2^\circ) = 0.24$ και $C_\ell(\alpha = 10^\circ) = 1.2$. Οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών χρησιμοποιώντας την Θεωρία Λεπτών Αεροτομών είναι:

$$C_{\ell, \Theta\Lambda\Lambda}(\alpha = 2^\circ) = 2\pi \left(2 \frac{\pi}{180} \right) = 0.22$$

$$C_{\ell, \Theta\Lambda\Lambda}(\alpha = 10^\circ) = 2\pi \left(10 \frac{\pi}{180} \right) = 1.10$$

Η απόκλιση (Δ) στον υπολογισμό του συντελεστή άντωσης μεταξύ των δύο μεθόδων, για τις δύο γωνίες προσβολής είναι:

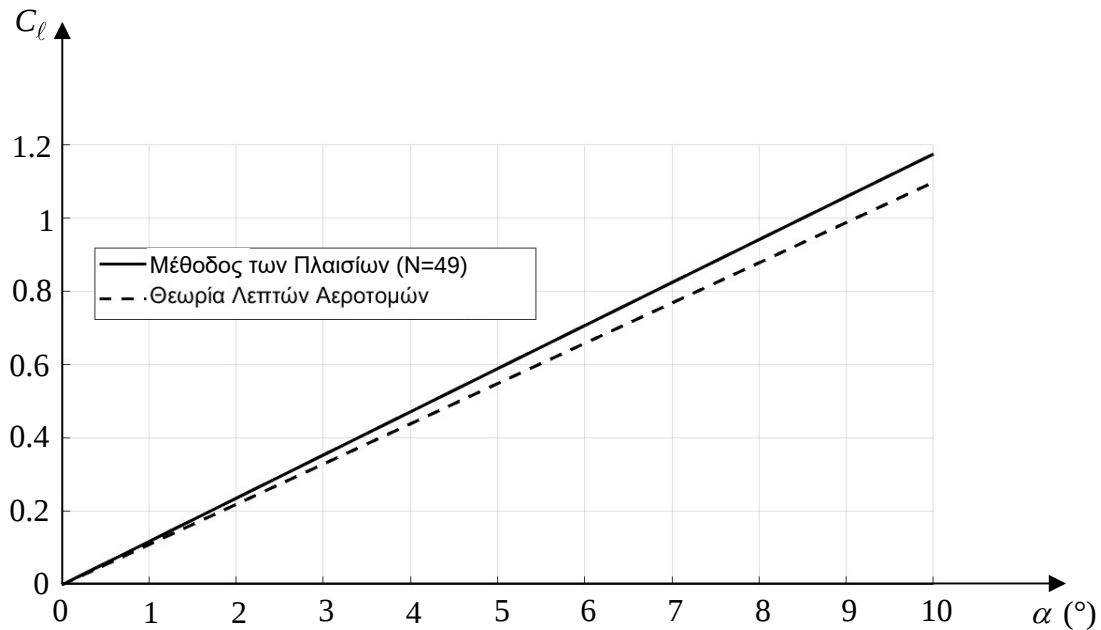
$$\Delta(\alpha = 2^\circ) = C_\ell(\alpha = 2^\circ) - C_{\ell, \Theta\Lambda\Lambda}(\alpha = 2^\circ) = 0.02$$

$$\Delta(\alpha = 10^\circ) = C_\ell(\alpha = 10^\circ) - C_{\ell, \Theta\Lambda\Lambda}(\alpha = 10^\circ) = 0.1$$

Παρατηρείται ότι η απόκλιση είναι μικρότερη για τη μικρότερη γωνία προσβολής ($\alpha = 2^\circ$).

2.

Τα αποτελέσματα της Μεθόδου των Πλαισίων για $N = 49$ πλαίσια και της Θεωρίας Λεπτών Αεροτομών στο διάστημα $0^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ$, παρουσιάζονται στο ακόλουθο γράφημα:



Παρατηρούμε πως για δεδομένη γωνία προσβολής, ο συντελεστής άντωσης που υπολογίζεται με τη μέθοδο των πλαισίων είναι μεγαλύτερος σε σχέση με αυτόν που προκύπτει από τη Θεωρία Λεπτών Αεροτομών. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η μέθοδος των πλαισίων μοντελοποιεί και το πάχος της αεροτομής, το οποίο επιφέρει επιτάχυνση της ροής στην άνω επιφάνεια της αεροτομής και αυξάνει περεταίρω τον συντελεστή άντωσης.

Σε κάθε περίπτωση, στην περιοχή σύγκλισης της Μεθόδου των Πλαισίων, τα αποτελέσματα διαφέρουν με αποδεκτό και λογικό τρόπο από την Θεωρία Λεπτών Αεροτομών και η επίδραση του πάχους μοντελοποιείται επιτυχώς.

Βιβλιογραφία

1. B.W. Mc Cormick, *"Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics"*, John Wiley and Sons Inc., 2nd Edition, 1995.
2. I. H. Abbott and A.E von Doenhoff, *"Theory of Wing Sections"*, Dover, 1959.
3. I. H. Abbott, A.E von Doenhoff and Louis S. Stivers, Jr, *"Summary of Airfoil Data"*, NACA Report 824, 1945.
4. J. Katz and A. Plotkin, *"Low-speed aerodynamics"*. Vol. 13. Cambridge University Press, 2001.
5. S.A. Brandt, R.J. Stiles, J.J. Bertin and R. Whitford, *"Introduction to Aeronautics: A Design Perspective."* , AIAA education series , 2nd edition, 2004.
6. J.J. Bertin and R.M. Cummings, *"Aerodynamics for Engineers"*, Pearson Education, 6th edition, 2014