
2 Γεωμετρικά και Αεροδυναμικά Χαρακτηριστικά Αεροτομής

Περιεχόμενα

2.1	Γεωμετρία Αεροτομής	17
2.2	Αεροδυναμικές Δυνάμεις και Ροπές.....	19
2.2.1	Αεροδυναμικοί Συντελεστές	21
2.3	Κέντρο Πίεσης και το Αεροδυναμικό Κέντρο	28
2.4	Παραδείγματα – Ασκήσεις	32
2.4.1	Υπολογισμός Χαρακτηριστικών Αεροτομής.....	32
2.4.2	Υπολογισμός Συντελεστή Άντωσης Αεροτομής	34
	Βιβλιογραφία	37

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή ή η μετάφραση όλου ή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου και με οποιοδήποτε τρόπο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

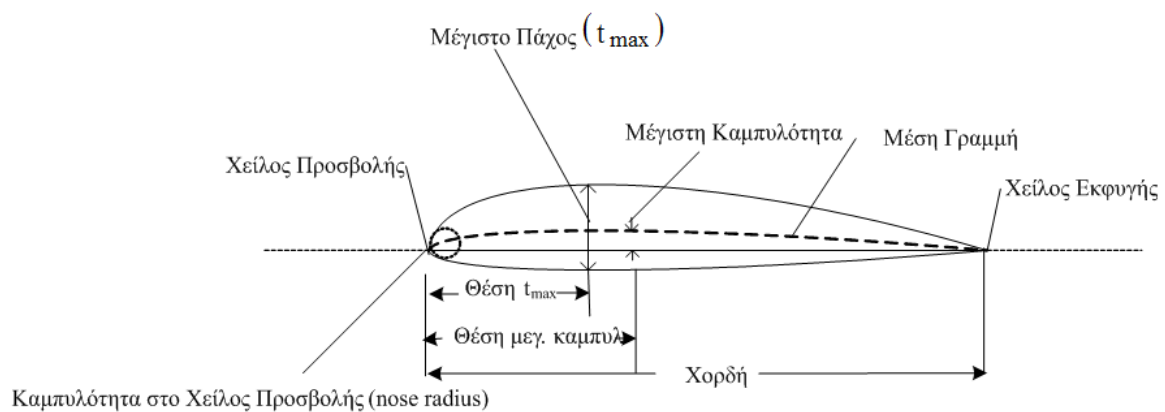
Το πρώτο βήμα στη μελέτη της αεροτομής είναι η παρουσίαση της γεωμετρίας της καθώς και των δυνάμεων και ροπών που αναπτύσσονται σε αυτήν από το αεροδυναμικό πεδίο.

2.1 Γεωμετρία Αεροτομής

Τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά μιας αεροτομής είναι τα εξής:

- Η *Μέση Γραμμή* της αεροτομής ("Mean Camber Line") είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από την πάνω και την κάτω επιφάνεια της αεροτομής.
- Η *Ακμή* ή *Χείλος Προσβολής* της αεροτομής ("Leading Edge") είναι το εμπρός άκρο της Μέσης Γραμμής.
- Η *Ακμή* ή *Χείλος Εκφυγής* της αεροτομής ("Trailing Edge") είναι το πίσω άκρο της Μέσης Γραμμής.
- Η *Χορδή* της αεροτομής ("Chord Line") ονομάζεται η ευθεία γραμμή που συνδέει το χείλος προσβολής με το χείλος εκφυγής.
- Η *Μέγιστη Καμπυλότητα* της αεροτομής ("Camber") είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ της χορδής και της Μέσης Γραμμής.
- Το *Πάχος* της αεροτομής ("Thickness") είναι η απόσταση μεταξύ της πάνω και της κάτω επιφάνειας αεροτομής μετρούμενη κάθετα στη χορδή.

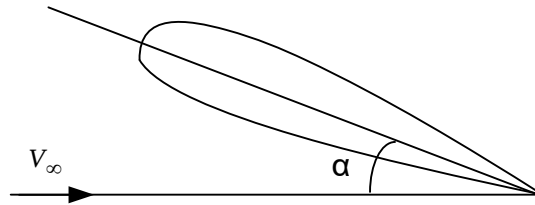
Τα παραπάνω γεωμετρικά χαρακτηριστικά απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.1: Βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά αεροτομής.

Όταν η μέση γραμμή και η χορδή ταυτίζονται, τότε η αεροτομή είναι *συμμετρική*.

Η γωνία προσβολής (α) της αεροτομής είναι η γωνία που σχηματίζει η χορδή της με την διεύθυνση της ελεύθερης ροής ταχύτητας $\vec{V}_\infty$, όπως απεικονίζει το Σχήμα 2.2. Όπως θα δούμε παρακάτω, ακόμα και μηδενική γωνία προσβολής "δίνει" άντωση στην καμπύλη αεροτομή.



Σχήμα 2.2: Ορισμός της γωνίας προσβολής (α).

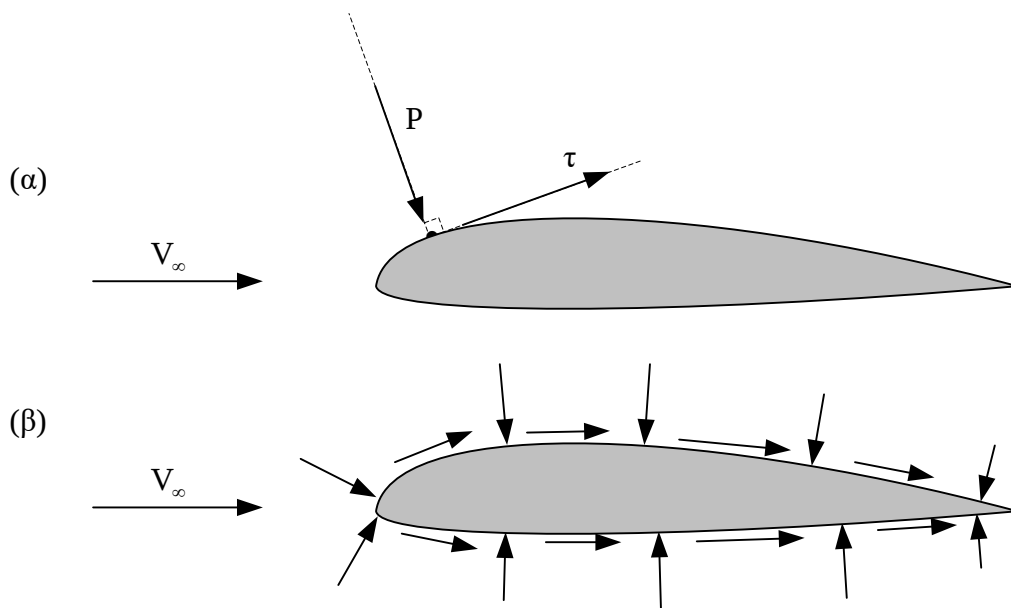
Στο Σχήμα 2.3 περιγράφεται μια διαδικασία που μπορεί να ακολουθηθεί για την γεωμετρική κατασκευή της αεροτομής.

- | | | |
|----|---|--|
| 1. | Ορίζονται τα χείλη προσβολής και εκφυγής και κατασκευάζεται η χορδή της αεροτομής | |
| 2. | Προσθήκη καμπυλότητας με την κατασκευή της Μέσης Γραμμής | |
| 3. | Σχηματίζεται η επανω επιφάνεια της αεροτομής με τον καθορισμό του πάχους | |
| 4. | Σχηματίζεται η κάτω επιφάνεια της αεροτομής με τον καθορισμό ίσου πάχους ως προς τη Μέση Γραμμή | |
| 5. | Η αεροτομή παίρνει την τελική της μορφή | |

Σχήμα 2.3: Γεωμετρική κατασκευή αεροτομής

2.2 Αεροδυναμικές Δυνάμεις και Ροπές

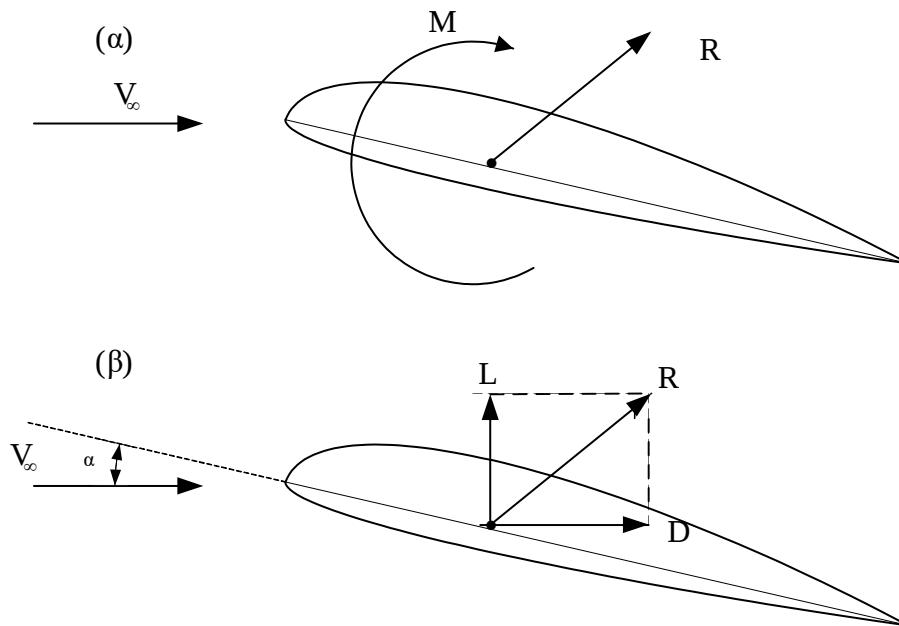
Οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές που αναπτύσσονται στην αεροτομή είναι το αποτέλεσμα δύο βασικών πηγών, της πίεσης του αέρα και της τριβής μεταξύ της επιφάνειας της αεροτομής και του αέρα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4 η πίεση ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια, ενώ η διατμητική τάση που αναπτύσσεται λόγω της τριβής ενεργεί εφαπτομενικά σε αυτή.



Σχήμα 2.4: Πιέσεις και διατμητικές τάσεις στην επιφάνεια της αεροτομής.

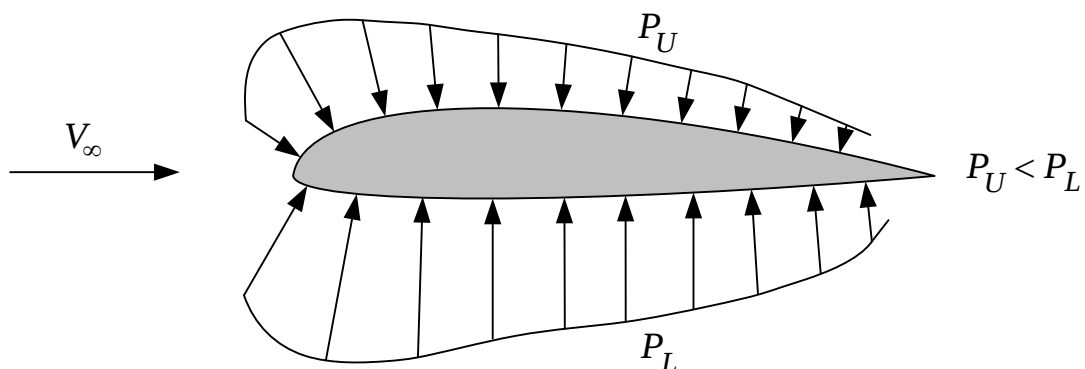
Η πίεση και η διατμητική τάση κατά μήκος της επιφάνειας μπορούν να αναλυθούν σε μία ισοδύναμη δύναμη R και μια ροπή M όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5α. Η δύναμη R συνήθως αναλύεται σε συνιστώσες κάθετα και παράλληλα στη διεύθυνση της ελεύθερης ροής V_∞ (Σχήμα 2.5β). Ορίζουμε λοιπόν τα μεγέθη:

- *Αντωση* L της αεροτομής ("Lift") ορίζεται η κάθετη στη διεύθυνση της ελεύθερης ροής συνιστώσα της δύναμης R .
- *Αντίσταση* ή *Οπισθέλκουσα* D της αεροτομής ("Drag") ορίζεται η παράλληλη στη διεύθυνση της ελεύθερης ροής συνιστώσα της δύναμης R .



Σχήμα 2.5: (α) Ισοδύναμο ζεύγος δύναμης R και ροπής M , και (β) Ανάλυση της δύναμης R σε συνιστώσες L και D , κάθετα και παράλληλα στην ελεύθερη ροή, αντίστοιχα.

Η παραγόμενη άντωση σε μια αεροτομή οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στην διαφορά πίεσης μεταξύ της άνω και της κάτω επιφάνειας, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.6. Η διαφορά πίεσης δημιουργείται είτε εξαιτίας της καμπυλότητας της άνω και της κάτω επιφάνειας είτε λόγω της γωνίας προσβολής. Η καμπυλότητα οδηγεί σε επιτάχυνση της ροής στην άνω επιφάνεια, και άρα σε ελάττωση της πίεσης. Το αντίθετο συμβαίνει στην κάτω επιφάνεια της αεροτομής, με αποτέλεσμα τη δημιουργία της διαφοράς πίεσης.



Σχήμα 2.6: Κατανομή πίεσης στην άνω και την κάτω επιφάνεια αεροτομής

Η Ροπή Πρόνευσης M συνήθως θεωρείται είτε (i) ως προς το χείλος προσβολής είτε (ii) ως προς το τέταρτο της χορδής, ή (iii) ως προς το αεροδυναμικό κέντρο που θα οριστεί στη

συνέχεια. Έχει επικρατήσει η ροπή M να λαμβάνεται θετική όταν είναι δεξιόστροφη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.

2.2.1 Αεροδυναμικοί Συντελεστές

Οι αεροδυναμικοί συντελεστές είναι αριθμοί οι οποίοι εκφράζουν σε αδιάστατη μορφή την εξάρτηση των αεροδυναμικών δυνάμεων και ροπών από τις συνθήκες του ροϊκού πεδίου. Υπάρχουν τέσσερις βασικοί αεροδυναμικοί συντελεστές: (i) ο συντελεστής πίεσης C_p , (ii) ο συντελεστής άντωσης C_ℓ , (iii) ο συντελεστής αντίστασης C_d , και (iv) ο συντελεστής ροπής πρόνευσης C_m .

Συντελεστής Πίεσης C_p ("Pressure Coefficient")

Η πίεση του πεδίου της ροής αδιαστατοποιείται συνήθως με τη δυναμική πίεση $\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$. Είναι σύνηθες η κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια της αεροτομής να εκφράζεται με το συντελεστή πίεσης (C_p) ο οποίος ορίζεται ως εξής:

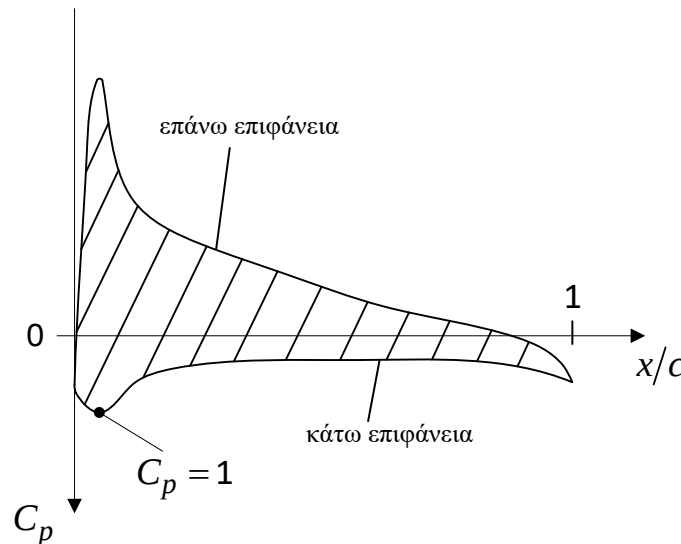
$$C_p \equiv \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}, \quad (2.1)$$

όπου P_∞ , ρ_∞ , V_∞ είναι η πίεση, η πυκνότητα και η ταχύτητα της ελεύθερης ροής. Υπενθυμίζουμε εδώ την εξίσωση του Bernoulli (1.11) η οποία συνδέει την κατάσταση της ελεύθερης ροής (ρ_∞ , P_∞ , V_∞) με το πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο γύρω από την αεροτομή (ρ , P , V):

$$P_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 = P + \frac{\rho}{2} V^2. \quad (2.2)$$

Το Σχήμα 2.7 απεικονίζει ένα τυπικό διάγραμμα κατανομής του C_p γύρω από την αεροτομή. Το διάγραμμα αυτό σχεδιάζεται συνήθως με τις θετικές τιμές του C_p να βρίσκονται στο κάτω μισό του κατακόρυφου άξονα (όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7). Ο λόγος είναι ότι ο συντελεστής πίεσης είναι χαμηλότερος στην άνω επιφάνεια της αεροτομής σε σχέση με την κάτω. Με την αντιστροφή της φοράς του κατακόρυφου άξονα στο Σχήμα 2.7, επιτυγχάνεται η

ευκρινέστερη αντιστοίχιση των δύο σκελών της καμπύλης με την άνω και κάτω επιφάνεια της αεροτομής. Η επιφάνεια που περικλείεται από τις καμπύλες $(C_p - x)$ της πάνω και κάτω επιφάνειας της αεροτομής εκφράζει την άντωση που ασκείται στην αεροτομή.



Σχήμα 2.7: Παράδειγμα κατανομής του συντελεστή πίεσης γύρω από την επιφάνεια αεροτομής. Το εμβαδόν της κλειστής επιφάνειας εκφράζει την άντωση.

Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται πως η μέγιστη τιμή του συντελεστή πίεσης είναι $C_p = 1$, και παρουσιάζεται στο σημείο ανακοπής της ροής ($V = 0$), το οποίο βρίσκεται στην περιοχή του χείλους προσβολής. Ακόμη παρατηρείται πως το μεγαλύτερο κομμάτι της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι συγκεντρωμένο κοντά στο χείλος προσβολής, και επομένως το τμήμα αυτό της αεροτομής συνεισφέρει περισσότερο στην άντωση.

Συντελεστής Άντωσης Αεροτομής C_ℓ ("Lift Coefficient")

Ο συντελεστής άντωσης της αεροτομής C_ℓ ορίζεται ως:

$$C_\ell \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c}, \quad (2.3)$$

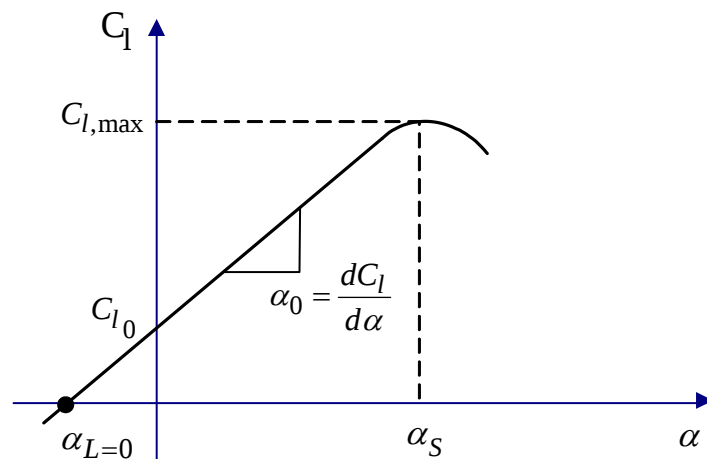
όπου: $\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ είναι η δυναμική πίεση της ελεύθερης ροής, και c το μήκος της χορδής.

Ο ανωτέρω ορισμός θεωρεί μοναδιαίο μήκος εκπετάσματος της πτέρυγας η οποία σχηματίζεται με παράλληλη μετατόπιση της αεροτομής στην διεύθυνση κάθετα στο επίπεδό της. Στις τρεις διαστάσεις, ο συντελεστής άντωσης πτέρυγας (C_L) ορίζεται ως:

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S}, \quad (2.4)$$

όπου S είναι η επιφάνεια της κάτοψης της πτέρυγας.

Ο συντελεστής άντωσης είναι συνάρτηση της γωνίας προσβολής καθώς και άλλων παραγόντων μεταξύ των οποίων είναι ο αριθμός Reynolds, η συμπίεστικότητα της ροής (αριθμός Mach) και η τραχύτητα της επιφάνειας του σώματος.



Σχήμα 2.8: Τυπική μεταβολή του συντελεστή άντωσης αεροτομής C_ℓ συναρτήσει της γωνίας προσβολής (α).

Στο Σχήμα 2.8 παριστάνεται τυπική μεταβολή του C_ℓ με τη γωνία προσβολής α για μη συμμετρική αεροτομή. Με βάση αυτή τη καμπύλη, ορίζονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά της:

- Γωνία Μηδενικής Άντωσης $\alpha_{L=0}$ ("Zero-Lift Angle") είναι η γωνία προσβολής για την οποία η άντωση της αεροτομής είναι μηδέν. Όπως θα δούμε, η καμπύλη αεροτομή "παράγει" άντωση ακόμα και για αρνητική γωνία α .
- Κλίση της Καμπύλης Άντωσης $\alpha_0 = \frac{dC_\ell}{d\alpha}$ ("Lift Curve Slope") είναι η κλίση της καμπύλης του C_ℓ συναρτήσει της γωνίας προσβολής α της αεροτομής.
- Μέγιστος Συντελεστής Άντωσης $C_{\ell,max}$ είναι η μέγιστη τιμή του συντελεστή άντωσης.

Η γωνία προσβολής η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη άντωση ονομάζεται

Γωνία Απώλειας Στήριξης α_s ("Stall Angle").

- Συντελεστής Άντωσης C_{ℓ_0} είναι η τιμή του συντελεστή άντωσης σε μηδενική γωνία προσβολής.
- Για μεγαλύτερες γωνίες εμφανίζεται σημαντική αποκόλληση του οριακού στρώματος στην επάνω επιφάνεια, η οποία όπως θα δούμε οδηγεί σε σημαντική μείωση της άντωσης.

Συντελεστής Αντίστασης Αεροτομής C_d ("Drag Coefficient")

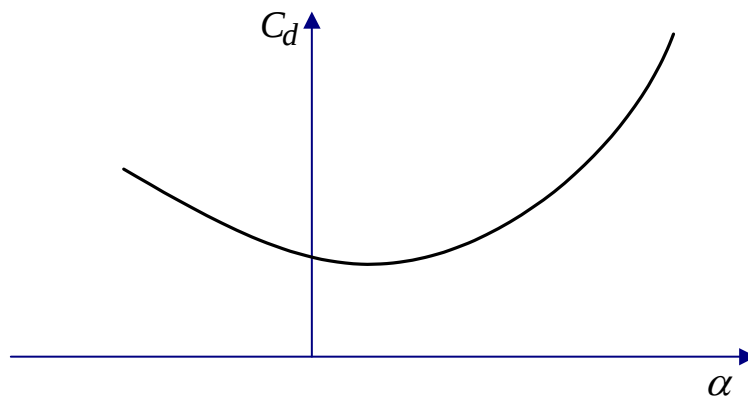
Ο συντελεστής αντίστασης της αεροτομής C_d ορίζεται ως:

$$C_d \equiv \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} \quad (2.5)$$

Ο ανωτέρω ορισμός θεωρεί μοναδιαίο μήκος εκπετάσματος της αντίστοιχης πτέρυγας. Στις τρεις διαστάσεις η χαρακτηριστική επιφάνεια που χρησιμοποιείται για την αδιαστατοποίηση της αντίστασης είναι η επιφάνεια της κάτοψης της πτέρυγας (S):

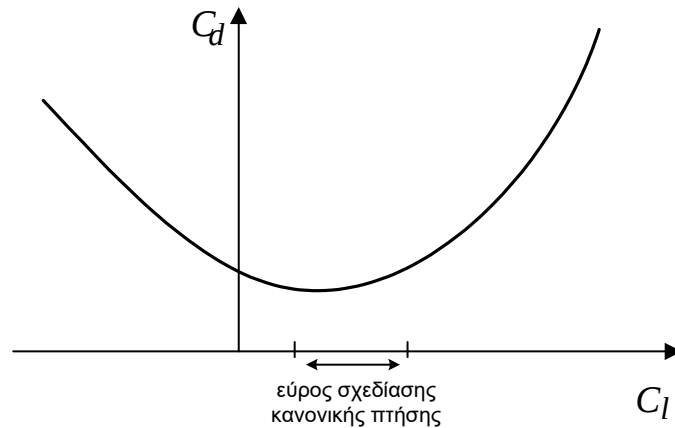
$$C_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S} \quad (2.6)$$

Στο Σχήμα 2.9 παριστάνεται η μεταβολή του C_d με τη γωνία προσβολής α της αεροτομής. Παρατηρούμε ότι ο C_d παίρνει ελάχιστη τιμή σε μικρές γωνίες προσβολής, όπου η οπισθέλκουσα λόγω τριβής στην επιφάνεια έχει κυρίαρχο ρόλο, ενώ σε μεγάλες γωνίες η τιμή του αυξάνεται απότομα καθώς τότε επηρεάζει σημαντικά και η οπισθέλκουσα λόγω διαφοράς της πίεσης μεταξύ των δύο επιφανειών της αεροτομής (οπισθέλκουσα μορφής).



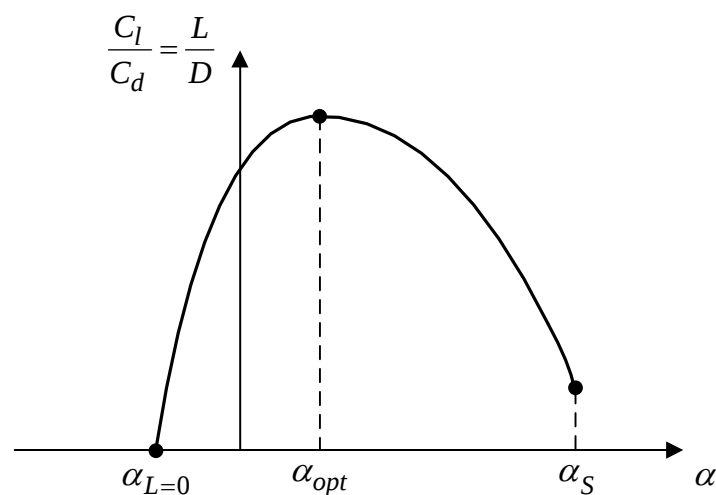
Σχήμα 2.9: Μεταβολή του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής C_d συναρτήσει της γωνίας προσβολής (α).

Η συσχέτιση μεταξύ άντωσης και αντίστασης απεικονίζεται στο διάγραμμα του Σχήματος 2.10, το οποίο παριστάνει τον συντελεστή αντίστασης C_d ως συνάρτηση του συντελεστή άντωσης C_ℓ ("Drag Polar"). Η αεροτομή σχεδιάζεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η αντίσταση με ταυτόχρονη επίτευξη ικανοποιητικής τιμής της άντωσης.



Σχήμα 2.10: Παράδειγμα διαγράμματος $C_d - C_\ell$ ("Drag Polar") για αεροτομή.

Ένα σημαντικό μέτρο της αποδοτικότητας μιας αεροδυναμικής σχεδίασης είναι ο λόγος άντωσης και αντίστασης (L/D) της αεροτομής. Η μεταβολή του λόγου ως προς τη γωνία προσβολής παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 2.11. Παρατηρείται ότι η γωνία μεγιστοποίησης του αεροδυναμικού λόγου (α_{opt}) είναι διαφορετική από τη Γωνία Απώλειας Στήριξης (α_s), στην οποία μεγιστοποιείται η άντωση.



Σχήμα 2.11: Μεταβολή του λόγου της άντωσης προς την αντίσταση (L/D) μιας αεροτομής συναρτήσει της της γωνίας προσβολής (α).

Συντελεστής Ροπής Πρόνευσης C_m ("Pitching Moment Coefficient")

Ο συντελεστής ροπής πρόνευσης C_m της αεροτομής ανά μονάδα μήκους εκπετάσματος ορίζεται ως:

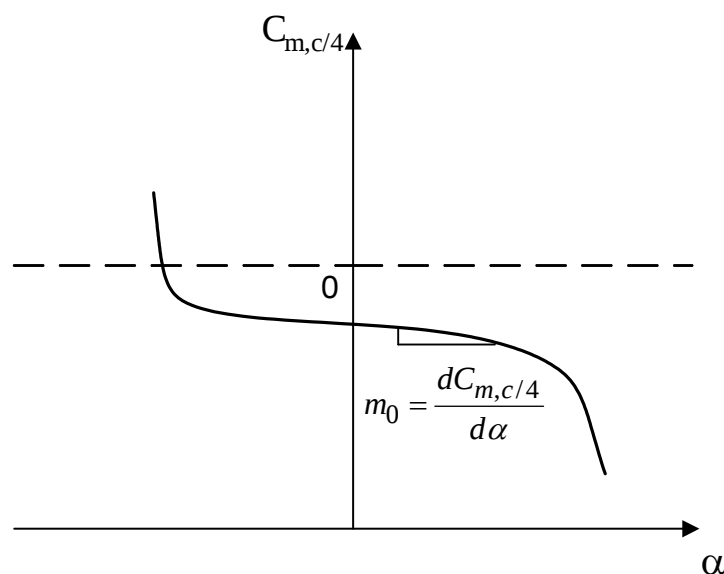
$$C_m \equiv \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c^2} \quad (2.7)$$

Ο ανωτέρω ορισμός θεωρεί μοναδιαίο μήκος εκπετάσματος της αντίστοιχης πτέρυγας. Στις τρεις διαστάσεις η χαρακτηριστική επιφάνεια που χρησιμοποιείται για την αδιαστατοποίηση της δύναμης είναι η επιφάνεια κάτοψης της πτέρυγας (S), ενώ το χαρακτηριστικό μήκος για την αδιαστατοποίηση του μοχλοβραχίονα της ροπής είναι το μήκος της χορδής (c). Έτσι προκύπτει ο συντελεστής πρόνευσης πτέρυγας C_M ως:

$$C_M \equiv \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \cdot c} \quad (2.8)$$

Σημειώνεται ότι, επειδή η ροπή πρόνευσης μεταβάλλεται επί της χορδής, ο συντελεστής πρόνευσης πρέπει να ορίζεται ως προς δεδομένο σημείο.

Το Σχήμα 2.12 απεικονίζει χαρακτηριστική μεταβολή του συντελεστή C_m για μη συμμετρική αεροτομή στο τέταρτο της χορδής ($c/4$), σε συνάρτηση με τη γωνία προσβολής α .

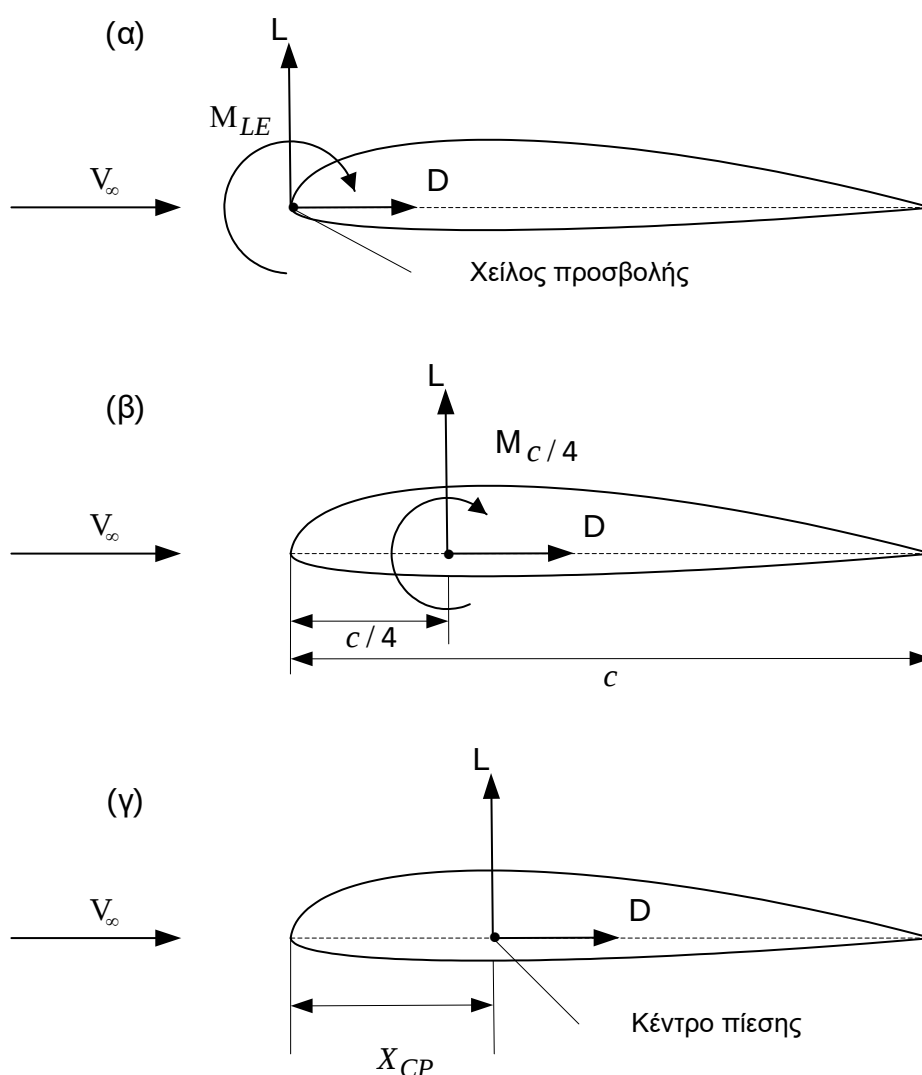


Σχήμα 2.12: Παράδειγμα μεταβολής του συντελεστή ροπής πρόνευσης με τη γωνία προσβολής μη-συμμετρικής αεροτομής.

Στο Σχήμα 2.12 φαίνεται πως ο συντελεστής $C_{m, c/4}$ είναι αρνητικός για ένα μεγάλο εύρος γωνιών προσβολής. Η ροπή δηλαδή είναι αριστερόστροφη και έχει την τάση να μειώσει την γωνία προσβολής της αεροτομής. Αυτό είναι επιθυμητό για τη διατήρηση της ευστάθειας κατά την πτήση. Στο Σχήμα 2.12, παρατηρείται πως για μικρές κατ' απόλυτη τιμή γωνίες προσβολής ο συντελεστής $C_{m, c/4}$ μεταβάλλεται σχεδόν γραμμικά με την α , με κλίση m_0 . Για μεγαλύτερες γωνίες προσβολής, ο συντελεστής της ροπής αυξάνεται απότομα κατ' απόλυτη τιμή, λόγω του φαινομένου της απώλειας στήριξης της αεροτομής.

2.3 Κέντρο Πίεσης και το Αεροδυναμικό Κέντρο

Χαρακτηριστικά σημεία πάνω στη χορδή της αεροτομής στα οποία συνήθως θεωρούμε ότι επενεργεί το ισοδύναμο σύστημα δυνάμεων (L, D) και ροπής M είναι το χείλος προσβολής (Σχήμα 2.13α), το σημείο στο τέταρτο της χορδής (Σχήμα 2.13β), καθώς και το κέντρο πίεσης (Σχήμα 2.13γ).



Σχήμα 2.13: Ανάλυση δυνάμεων και ροπών: (α) στο χείλος προσβολής, (β) στο τέταρτο της χορδής, και (γ) στο κέντρο πίεσης.

- Το Κέντρο Πίεσης είναι το σημείο της χορδής ως προς το οποίο η ροπή M μηδενίζεται (Σχήμα 2.13γ). Αποτελεί το σημείο εφαρμογής των συγκεντρωμένων δυνάμεων άντωσης και αντίστασης της αεροτομής. Η θέση του κέντρου πίεσης προσδιορίζεται από την ισοδυναμία

των εντατικών καταστάσεων στο χείλος προσβολής και στο κέντρο πίεσης. Σύμφωνα με αυτήν πρέπει:

$$M_{LE} = -L \cdot \cos \alpha \cdot X_{cp} . \quad (2.9)$$

Για μικρές γωνίες προσβολής μπορούμε να θεωρήσουμε $\cos \alpha \approx 1$ οπότε

$$X_{cp} = -\frac{M_{LE}}{L}$$

και με βάση τις (2.3) και (2.7) προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{X_{cp}}{c} = -\frac{C_{m, LE}}{C_\ell}} . \quad (2.10)$$

Η εξίσωση (2.10) δείχνει πως η θέση του κέντρου πίεσης (X_{cp}) μεταβάλλεται ως προς το συντελεστή άντωσης (C_ℓ), και άρα ως προς τη γωνία προσβολής (α). Σε γωνία προσβολής ίση με τη γωνία μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$), η θέση του κέντρου πίεσης απειρίζεται ($X_{cp} \rightarrow \infty$), και βρίσκεται εκτός της αεροτομής. Καθώς η γωνία προσβολής αυξάνεται, το κέντρο πίεσης μετατοπίζεται προς το χείλος προσβολής. Το πιο εμπρόσθιο σημείο της αεροτομής στο οποίο μπορεί να βρεθεί το κέντρο πίεσης είναι το τέταρτο της χορδής ($X_{cp} = c/4$).

Σημειώνεται ότι για τον προσδιορισμό της θέσης του κέντρου πίεσης, αντί να γίνει χρήση της ροπής στο χείλος προσβολής (σχέση (2.10)), μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ροπή ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο αναφοράς (X_{ref}). Έτσι προκύπτει η παρακάτω πιο γενική σχέση:

$$\boxed{\frac{X_{cp}}{c} = \frac{X_{ref}}{c} - \frac{C_{m, X_{ref}}}{C_\ell}} . \quad (2.11)$$

Ιστορικά, η θέση του κέντρου πίεσης έχει μελετηθεί σαν παράγοντας που επηρεάζει την ευστάθεια της πτήσης ενός αεροσκάφους. Ωστόσο, το γεγονός ότι η θέση του κέντρου πίεσης μεταβάλλεται σημαντικά σε σχέση με τη γωνία προσβολής κάνει πολλές φορές δύσκολη την χρήση του για ανάλυση ευστάθειας. Έτσι προκύπτει η ανάγκη για τον ορισμό του *Αεροδυναμικού Κέντρου*.

Το *Αεροδυναμικό Κέντρο* (αc) είναι ένα μοναδικό σημείο πάνω στη χορδή της αεροτομής για το οποίο ο συντελεστής ροπής $C_{m, \alpha c}$ είναι ανεξάρτητος της γωνίας προσβολής. Για τον υπολογισμό της θέσης του αεροδυναμικού κέντρου θεωρούμε την ισοδυναμία των εντατικών καταστάσεων. Από την ισότητα των ροπών έχουμε :

$$M_{\alpha c} = M_{c/4} + L \left(X_{\alpha c} - \frac{c}{4} \right). \quad (2.12)$$

Διαιρώντας με τον όρο $\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c^2$, η (2.12) γίνεται:

$$C_{m,\alpha c} = C_{m,c/4} + C_{\ell} \left(\frac{X_{\alpha c}}{c} - \frac{1}{4} \right). \quad (2.13)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τη γωνία προσβολής α προκύπτει:

$$\frac{dC_{m,\alpha c}}{d\alpha} = \frac{dC_{m,c/4}}{d\alpha} + \frac{dC_{\ell}}{d\alpha} \left(\frac{X_{\alpha c}}{c} - \frac{1}{4} \right). \quad (2.14)$$

Όμως εξ ορισμού είναι:

$$\frac{dC_{m,\alpha c}}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dC_{m,c/4}}{d\alpha} \equiv m_0 \quad \text{και} \quad \frac{dC_{\ell}}{d\alpha} \equiv \alpha_0, \quad (2.15)$$

όπου m_0 και α_0 είναι οι κλίσεις των καμπυλών $(C_{m,c/4} - \alpha)$ και $(C_{\ell} - \alpha)$, οι οποίες προσεγγίζονται ως γραμμικές.

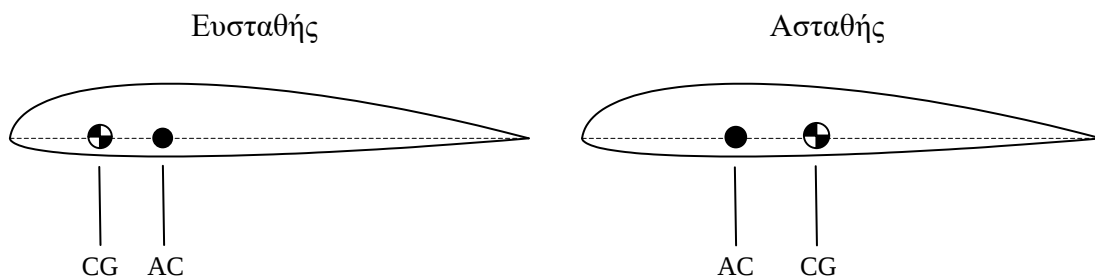
Επομένως η (2.14) γίνεται :

$$\boxed{\frac{X_{\alpha c}}{c} = -\frac{m_0}{\alpha_0} + \frac{1}{4}}. \quad (2.16)$$

Μια εναλλακτική μορφή της εξίσωσης (2.16) είναι η παρακάτω:

$$\boxed{\frac{X_{\alpha c}}{c} = -\frac{dC_{m,c/4}}{dC_{\ell}} + \frac{1}{4}}. \quad (2.17)$$

Η σημασία του αεροδυναμικού κέντρου για την ευστάθεια πτήσης απεικονίζεται στο Σχήμα 2.14, όπου χάριν απλότητας θεωρείται μια αεροτομή. Για να είναι ευσταθής η πτήση θα πρέπει το αεροδυναμικό κέντρο να βρίσκεται πίσω από το κέντρο βάρους της αεροτομής, ειδάλλως η πτήση είναι ασταθής.



Σχήμα 2.14: Η σημασία του αεροδυναμικού κέντρου για την ευστάθεια πτήσης, θεωρώντας απλή αεροτομή.

Η θέση του αεροδυναμικού κέντρου μπορεί να συσχετιστεί με αυτή του κέντρου πίεσης. Αντικαθιστώντας $X_{ref} = X_{ac}$ στην εξίσωση (2.11), προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{X_{cp}}{c} = \frac{X_{ac}}{c} - \frac{C_{m,ac}}{C_\ell} \quad (2.18)$$

Κατ' αναλογία με τον $C_{m, c/4}$ (Σχήμα 2.12), ο συντελεστής ροπής ως προς το αεροδυναμικό κέντρο είναι αρνητικός ($C_{m,ac} < 0$). Επομένως, από την εξίσωση (2.18) προκύπτει ότι $X_{cp} > X_{ac}$, δηλαδή το κέντρο πίεσης (CP) βρίσκεται πιο μακριά από το χείλος προσβολής σε σχέση με το αεροδυναμικό κέντρο (AC).

Για την ειδική περίπτωση της συμμετρικής αεροτομής, η παραπάνω ανάλυση για το κέντρο πίεσης και το αεροδυναμικό κέντρο απλοποιείται σημαντικά. Συγκριμένα, όπως θα δειχθεί σε επόμενο κεφάλαιο, ο συντελεστής ροπής ως προς το αεροδυναμικό κέντρο είναι μηδενικός ($C_{m,ac} = 0$). Αντικαθιστώντας στην σχέση (2.18), προκύπτει πως το κέντρο πίεσης και το αεροδυναμικό κέντρο ταυτίζονται, δηλαδή:

$$X_{cp} = X_{ac} \quad (2.19)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, εφόσον η θέση του αεροδυναμικού κέντρου (X_{ac}) δεν μεταβάλλεται με τη γωνία προσβολής (α), από την (2.19) προκύπτει πως η θέση του κέντρου πίεσης (X_{cp}) επίσης δεν μεταβάλλεται συναρτήσει της α , για την ειδική περίπτωση της συμμετρικής αεροτομής.

2.4 Παραδείγματα – Ασκήσεις

2.4.1 Υπολογισμός Χαρακτηριστικών Αεροτομής

Δίνεται αεροτομή με συντελεστή άνωσης $C_\ell = -0.31$ και συντελεστή ροπής πρόνευσης $C_{m,c/4} = -0.041$ για $\alpha = -5^\circ$. Επίσης για $\alpha = 3^\circ$ οι συντελεστές είναι $C_\ell = 0.52$ και $C_{m,c/4} = -0.038$. Να υπολογιστούν:

1. Τα κέντρα πίεσης X_{cp} για $\alpha = -5^\circ$, $\alpha = 3^\circ$.
2. Η γωνία μηδενικής άντωσης $\alpha_{L=0}$.
3. Το αεροδυναμικό κέντρο X_{ac} .

Λύση

1) Από την Σχέση (2.10) έχουμε $\frac{X_{cp}}{c} = -\frac{C_{mLE}}{C_\ell}$, όπου C_m η ροπή πρόνευσης στην ακμή πρόσπτωσης. Ακόμη από την ισότητα των ροπών γύρω από το χείλος προσβολής έχουμε $C_{mLE} = C_{m,c/4} - C_\ell / 4$, οπότε:

$$\alpha = -5^\circ, \quad \frac{X_{cp}}{c} = -\frac{-0.041 + 0.31/4}{-0.31} = 0.118,$$

$$\alpha = 3^\circ, \quad \frac{X_{cp}}{c} = -\frac{-0.038 - 0.52/4}{0.52} = 0.323.$$

2) Η μεταβολή του συντελεστή άντωσης θεωρείται γραμμική και ισχύει ότι:

$$C_\ell = \alpha_0 (\alpha - \alpha_{L=0})$$

όπου η κλίση υπολογίζεται ως $\alpha_0 = \frac{0.52 + 0.31}{(3+5)\pi/180} = \frac{0.83}{8\pi/180}$, οπότε τελικά προκύπτει:

$$C_\ell = 0.104 \cdot \frac{180}{\pi} (\alpha - \alpha_{L=0}).$$

Αντικαθιστώντας για $\alpha = 3^\circ$ έχουμε:

$$0,52 = 0,104 \frac{180}{\cancel{\pi}} (3 - \alpha_{L=0}) \cdot \frac{\cancel{\pi}}{180} \Rightarrow \alpha_{L=0} = 3 - 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_{L=0} = -2^\circ}$$

3) Από τη Σχέση (2.16) έχουμε για το αεροδυναμικό κέντρο:

$$\frac{X_{ac}}{c} = -\frac{m_0}{\alpha_0} + \frac{1}{4},$$

$$\text{όπου, } m_0 = \frac{-0,041 + 0,038}{-8\pi/180} = \frac{0,003}{8\pi/180}.$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\frac{X_{ac}}{c} = -\frac{0,003}{0,83} + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{X_{ac}}{c} = 0,246}$$

2.4.2 Υπολογισμός Συντελεστή Άντωσης Αεροτομής

Για μια αεροτομή NACA 2412 γνωρίζουμε από πειραματικά δεδομένα ότι για $\alpha = 0$ ισχύει $C_\ell = 0.25$. Για γωνία προσβολής $\alpha = 3^\circ$, έχουν προκύψει μέσω προσαρμογής καμπυλών σε πειραματικά δεδομένα, οι παρακάτω σχέσεις για την κατανομή της ταχύτητας ως συνάρτηση της θέσης x :

$$V_u(x) = a_u \cdot \exp(b_u \cdot x) + c_u \cdot \exp(d_u \cdot x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$V_l(x) = a_l \cdot \exp(b_l \cdot x) + c_l \cdot \exp(d_l \cdot x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

όπου V_u και V_l είναι οι ταχύτητες στην άνω και την κάτω επιφάνεια της αεροτομής αντίστοιχα. Το μήκος της χορδής θεωρείται $c=1$. Οι τιμές των συντελεστών a, b, c, d δίνονται στους παρακάτω πίνακες:

a_u	b_u	c_u	d_u
1.50	-0.45	-0.71	-271.40

a_l	b_l	c_l	d_l
1.03	-0.14	-0.83	-39.62

Θεωρείστε ότι η ταχύτητα της ελεύθερης ροής είναι $V_\infty = 1$.

Ζητούνται:

1. Να υπολογιστεί ο συντελεστής άντωσης της αεροτομής για γωνία προσβολής $\alpha = 3^\circ$
2. Να βρεθεί η γωνία προσβολής μηδενικής άντωσης ($\alpha_{L=0}$)

Λύση

1) Συνδυάζοντας τον ορισμό του συντελεστή πίεσης (σχέση (2.1)) με την εξίσωση Bernoulli (2.2), προκύπτει η παρακάτω σχέση για το συντελεστή πίεσης:

$$C_p \equiv 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

Θεωρώντας $V_\infty = 1$ και αντικαθιστώντας τις σχέσεις των ταχυτήτων στην άνω και στην κάτω επιφάνεια της αεροτομής προκύπτουν τα παρακάτω:

$$C_{p,u} \equiv 1 - V_u^2 \Rightarrow C_{p,u} = 1 - a_u^2 \cdot \exp(2 \cdot b_u \cdot x) - 2 \cdot a_u \cdot c_u \cdot \exp((b_u + d_u) \cdot x) - c_u^2 \cdot \exp(2 \cdot d_u \cdot x)$$

$$C_{p,l} \equiv 1 - V_l^2 \Rightarrow C_{p,l} = 1 - a_l^2 \cdot \exp(2 \cdot b_l \cdot x) - 2 \cdot a_l \cdot c_l \cdot \exp((b_l + d_l) \cdot x) - c_l^2 \cdot \exp(2 \cdot d_l \cdot x)$$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.7, ο συντελεστής άντωσης ισούται με το εμβαδό μεταξύ των καμπυλών $C_{p,l}$ και $C_{p,u}$. Για μοναδιαίο μήκος χορδής ($c = 1$), ο C_ℓ δίνεται από τη σχέση:

$$C_\ell = \int_0^1 (C_{p,l} - C_{p,u}) dx$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα τις εκφράσεις των $C_{p,l}$ και $C_{p,u}$ και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα, προκύπτει η παρακάτω τιμή για το συντελεστή άντωσης:

$$C_\ell = 0.58$$

2) Η μεταβολή του συντελεστή άντωσης θεωρείται γραμμική και ισχύει ότι:

$$C_\ell = \alpha_0 (\alpha - \alpha_{L=0}) \Rightarrow \alpha_{L=0} = \alpha - \frac{C_\ell}{\alpha_0} \quad (I)$$

Η κλίση α_0 υπολογίζεται ως:

$$\alpha_0 = \frac{C_{\ell, 3^\circ} - C_{\ell, 0^\circ}}{3^\circ - 0^\circ} = \frac{0.58 - 0.25}{3^\circ - 0^\circ} = 0.11$$

Παραδείγματα - Ασκήσεις

Αντικαθιστώντας στην σχέση (I) $C_\ell = 0.25$ και $\alpha = 0$, προκύπτει ότι:

$$\alpha_{L=0} = -2.27^\circ$$

Βιβλιογραφία

1. I.H. Abbott and A.E. von Doenhoff, "*Theory of Wing Sections*", Dover Publications, New York, 1959.
2. UIUC Airfoil Coordinates Database,
https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html , UIUC Applied Aerodynamics Group
3. A. Pope, "*Basic Wing and Airfoil Theory*", McGraw-Hill, New York, 1951
4. J. Chen , Q. Wang, "*Wind Turbine Airfoils and Blades*", Science Press, Beijing, China, 2017