

---

# 3 Βασικές Ροές Μοντελοποίησης Αεροδυναμικών Πεδίων

---

## Περιεχόμενα

|        |                                                                         |    |
|--------|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1    | Στροβιλότητα και Κυκλοφορία.....                                        | 40 |
| 3.2    | Ειδικές Απεικονίσεις Πεδίων Ροής.....                                   | 43 |
| 3.2.1  | Η Ροϊκή Συνάρτηση .....                                                 | 43 |
| 3.2.2  | Το Δυναμικό Ροής.....                                                   | 45 |
| 3.3    | Ομοιόμορφη Ροή.....                                                     | 47 |
| 3.4    | Σημειακή Πηγή .....                                                     | 49 |
| 3.4.1  | Κατανομή Πηγών .....                                                    | 51 |
| 3.5    | Στρόβιλος σε Δύο Διαστάσεις .....                                       | 52 |
| 3.5.1  | Επίδραση του εδάφους σε στρόβιλο - Μέθοδος των ειδώλων.....             | 54 |
| 3.5.2  | Αλληλεπίδραση δυο στρόβιλων .....                                       | 57 |
| 3.5.3  | Κατανομές Στροβιλότητας .....                                           | 58 |
| 3.6    | Μεταβολή της Στροβιλότητας και της Κυκλοφορίας - Το θεώρημα Kelvin..... | 59 |
| 3.6.1  | Η Εξίσωση της Στροβιλότητας .....                                       | 59 |
| 3.6.2  | Διατήρηση της Κυκλοφορίας – Το Θεώρημα Kelvin .....                     | 61 |
| 3.6.3  | Στρόβιλος Εκκίνησης .....                                               | 63 |
| 3.7    | Το Θεώρημα Kutta - Joukowski .....                                      | 65 |
| 3.8    | Η Συνθήκη Kutta.....                                                    | 67 |
| 3.9    | Επαγόμενη Ταχύτητα από Γενική Κατανομή Στροβιλότητας .....              | 70 |
| 3.10   | Δινοσωλήνας στις τρεις διαστάσεις.....                                  | 72 |
| 3.10.1 | Θεωρήματα Helmholtz.....                                                | 72 |
| 3.10.2 | Επαγόμενες Ταχύτητες από Δινοσωλήνα: Ο Νόμος Biot-Savart .....          | 74 |
| 3.11   | Παραδείγματα – Ασκήσεις .....                                           | 78 |
| 3.11.1 | Η Ροϊκή Συνάρτηση και το Δυναμικό Ταχύτητας.....                        | 78 |
| 3.11.2 | Δύναμη που ασκείται από ρευστό σε περιστρεφόμενο δίσκο.....             | 79 |

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 3.11.3 Συντελεστής άντωσης αεροτομής .....                     | 81 |
| 3.11.4 Αλληλεπίδραση ροής γύρω από αεροτομή με το έδαφος ..... | 82 |
| 3.11.5 Αλληλεπίδραση πηγής με το έδαφος.....                   | 84 |
| 3.11.6 Επαγόμενη ταχύτητα από κυκλικό δινωσώληνα .....         | 86 |
| 3.11.7 Επαγόμενη ταχύτητα από σύστημα στροβίλων .....          | 87 |
| Βιβλιογραφία .....                                             | 89 |

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή ή η μετάφραση όλου ή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου και με οποιοδήποτε τρόπο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται θεμελιώδεις ροές οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να "κτίσουν" ένα αρκετά ρεαλιστικό αεροδυναμικό πεδίο. Επίσης εισάγονται οι βασικές έννοιες της ροϊκής συνάρτησης και του δυναμικού ροής, καθώς και της στροβιλότητας και κυκλοφορίας της ροής.

### 3.1 Στροβιλότητα και Κυκλοφορία

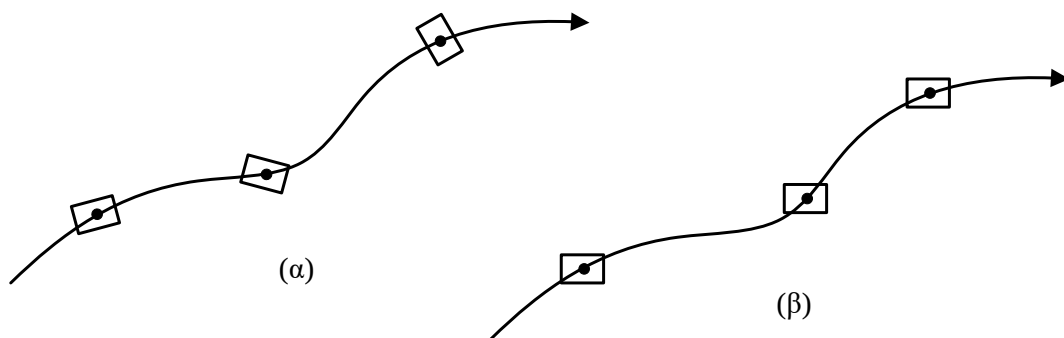
Η ταχύτητα περιστροφής ενός στοιχείου ρευστού που κινείται με ταχύτητα  $\vec{V}$ , με συνιστώσες  $u$  και  $v$  εκφράζεται ως:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Η περιστροφή θεωρείται ως προς άξονα κάθετο στους άξονες  $x$  και  $y$  που περνά από το στοιχείο. Ως στροβιλότητα  $\vec{\omega}$  της ροής ορίζεται το διπλάσιο της ταχύτητας περιστροφής και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{V} \quad (3.1)$$

Το Σχήμα 3.1(α) απεικονίζει στροβιλή ροή στοιχείου του ρευστού και το 3.1(β) δείχνει περίπτωση αστρόβιλης ροής του.



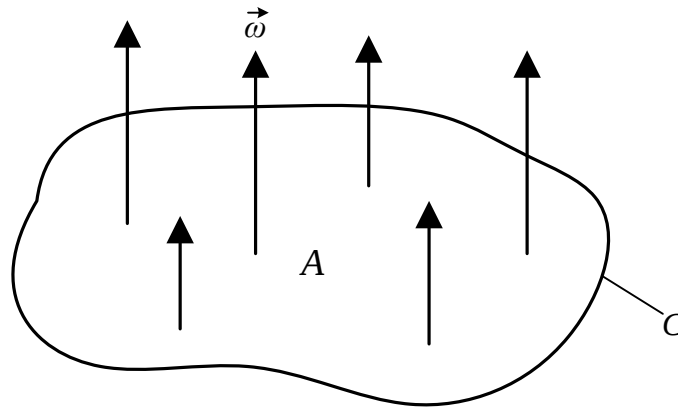
**Σχήμα 3.1:** (α) Στροβιλή και (β) αστρόβιλη ροή στοιχείου ρευστού

Η περιστροφή των στοιχείων του ρευστού γύρω από τον άξονα τους οφείλεται στις δυνάμεις συνεκτικότητας που ασκούνται στα σύνορα των στοιχείων από τα γειτονικά

τους. Αντίθετα, οι δυνάμεις πίεσης που ασκούνται κάθετα στο σύνορο του στοιχείου δεν προκαλούν ροπή περιστροφής. Έτσι, η στροβιλότητα μεταδίδεται μόνο μέσω γειτονικών στοιχείων ρευστού. Αντίθετα, αλλαγές πίεσης διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου. Σε πρακτικό επίπεδο, στροβιλότητα δημιουργείται στο οριακό στρώμα κοντά στην επιφάνεια της αεροτομής.

Η μη συνεκτική ασυμπίεστη ροή δεν δημιουργεί στροβιλότητα, μόνο τη μεταφέρει εάν αυτή προϋπήρχε. Δηλαδή, αρχικά αστρόβιλη ροή παραμένει αστρόβιλη. Το ανωτέρω χαρακτηριστικό της μη συνεκτικής και ασυμπίεστης ροής ονομάζεται 3<sup>ος</sup> νόμος του Helmholtz.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια κατανομή στροβιλότητας  $\vec{\omega}$  σε επιφάνεια  $A$  η οποία περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη  $C$ , όπως απεικονίζει το παράδειγμα του Σχήματος 3.2.



**Σχήμα 3.2:** Απεικόνιση διανυσμάτων κατανομής στροβιλότητας σε επιφάνεια  $A$  με σύνορο την καμπύλη  $C$

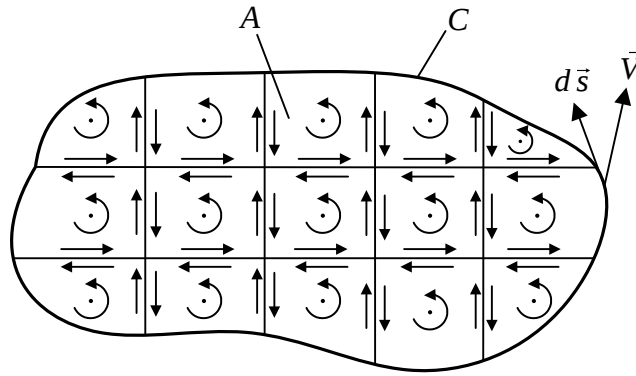
Μπορούμε να θεωρήσουμε μια "συνολική" στροβιλότητα στην επιφάνεια  $A$  ίση με:

$$\iint_A \vec{\omega} \, d\vec{A} = \iint_A (\nabla \times \vec{V}) \, d\vec{A} \quad (3.2)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (3.2) με βάση το θεώρημα του Stokes είναι ίσο με το ακόλουθο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\iint_A (\nabla \times \vec{V}) \, d\vec{A} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (3.3)$$

Στο Σχήμα 3.3 απεικονίζεται η φυσική σημασία του θεωρήματος Stokes. Έστω ότι η στροβιλότητα ( $\bar{\omega}$ ) της επιφάνειας  $A$  αναπαρίσταται από στρόβιλους εντός αυτής. Οι ταχύτητες που επάγουν οι διαφορετικοί στρόβιλοι στα εσωτερικά σύνορα της επιφάνειας αλληλοαναιρούνται και τελικά απομένουν μόνο οι ταχύτητες που επάγονται στην εξωτερική καμπύλη  $C$ .



Σχήμα 3.3: Φυσική σημασία του θεωρήματος Stokes.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (3.3) ορίζει ένα μέγεθος χρήσιμο στην Αεροδυναμική το οποίο ονομάζεται *κυκλοφορία* της ροής ( $\Gamma$ ). Μάλιστα, θετική κυκλοφορία ορίζεται η δεξιόστροφη ολοκλήρωση, είναι δηλαδή:

$$\Gamma \equiv - \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (3.4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.2), (3.3) και (3.4) παίρνουμε:

$$\Gamma = - \iint_A \bar{\omega} \, d\vec{A} \quad (3.5)$$

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) προκύπτει πως σε μια αστρόβιλη ροή, η κυκλοφορία γύρω από μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη θα είναι πάντοτε μηδενική.

### 3.2 Ειδικές Απεικονίσεις Πεδίων Ροής

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ροής μπορούν να οριστούν γραμμές του πεδίου κατά μήκος των οποίων διατηρείται ένα μέγεθος σταθερό. Μάλιστα, οι συνιστώσες της ταχύτητας μπορούν να εκφραστούν σε σχέση με το σταθερό αυτό μέγεθος.

#### 3.2.1 Η Ροϊκή Συνάρτηση

Ας θεωρήσουμε ένα μέγεθος  $Q$  το οποίο έχει την ίδια τιμή κατά μήκος μιας γραμμής του πεδίου χρονικά αμετάβλητης και ασυμπίεστης ροής. Η μεταβολή του μεγέθους αυτού στις δυο διαστάσεις  $(x, y)$  μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy = 0 \quad (3.6)$$

Μια γραμμή ενός πεδίου ροής που συνδέει μεταξύ τους τα ροϊκά στοιχεία, έτσι ώστε τα διανύσματα ταχύτητάς τους να είναι εφαπτόμενα σε κάθε σημείο επ' αυτής, καλείται *ροϊκή γραμμή* ή *γραμμή ροής*. Το σύνολο των γραμμών ροής του πεδίου αποτελεί έναν εύχρηστο τρόπο για την απεικόνισή του σε μια χρονική στιγμή. Αν η ροή είναι χρονικά αμετάβλητη, τότε οι γραμμές ροής θα παραμένουν σταθερές με το χρόνο, οπτικοποιώντας έτσι την συνεχή κίνηση του ρευστού.

Εφόσον τα διανύσματα των ταχυτήτων είναι εφαπτόμενα στις γραμμές ροής, η εξίσωση μιας γραμμής ροής του πεδίου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} \frac{v}{u} &= \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ -v dx + u dy &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

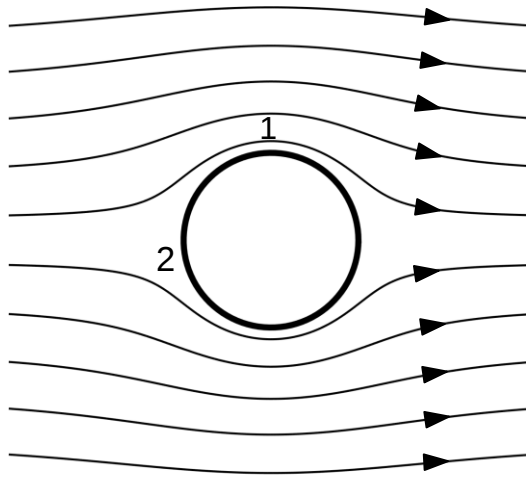
Συγκρίνοντας τις (3.6) και (3.7) βλέπουμε ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του μεγέθους  $Q$ :

$$u = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.8)$$

Παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες αυτές ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0 \quad (3.9)$$

Το μέγεθος  $Q$  που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις το ονομάζουμε *ροϊκή συνάρτηση* και το συμβολίζουμε με  $\Psi$ . Οι ισοϋψείς γραμμές της ροϊκής συνάρτησης  $\Psi$  απεικονίζουν τις γραμμές ροής σε χρονικά αμετάβλητο πεδίο. Οι γραμμές αυτές δεν τέμνονται. Το Σχήμα 3.4 απεικονίζει ροϊκές γραμμές για ροή γύρω από κύλινδρο. Η οπτικοποίησή τους γίνεται διατηρώντας ίδια τη διαφορά  $\Delta\Psi$  μεταξύ των γειτονικών ροϊκών γραμμών.



**Σχήμα 3.4:** Ροϊκές γραμμές για ροή γύρω από κύλινδρο.

Η παροχή μάζας σέ έναν νοητό σωλήνα ο οποίος ορίζεται από δυο ροϊκές γραμμές είναι:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho u \, dy - \rho v \, dx \Rightarrow \\ \frac{\dot{m}}{\rho} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \, dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \, dx \equiv \Delta\Psi \end{aligned} \quad (3.10)$$

Επομένως, η διαφορά  $\Delta\Psi$  στην τιμή δύο διαφορετικών γραμμών της  $\Psi$  εκφράζει την παροχή μάζας του ρευστού στο χώρο μεταξύ των δυο γραμμών.

Ακόμη, αν  $h$  είναι η τοπική απόσταση μεταξύ δυο ροϊκών γραμμών και  $V$  είναι η τοπική τιμή του μέτρου της ταχύτητας, τότε ισχύει ότι:

$$\Delta\Psi = \frac{\dot{m}}{\rho} \sim V \cdot h \Rightarrow V \sim \frac{\Delta\Psi}{h} \quad (3.11)$$

Εφόσον η διαφορά  $\Delta\Psi$  είναι ίδια μεταξύ των γειτονικών ροϊκών γραμμών στο Σχήμα 3.4, προκύπτει πως μικρή απόσταση ( $h$ ) μεταξύ των ροϊκών γραμμών υποδεικνύει μεγάλη τοπική τιμή της ταχύτητας, όπως στην περιοχή 1 του Σχήματος 3.4, επάνω από τον κύλινδρο. Αντίθετα, αν η τοπική απόσταση  $h$  είναι μεγάλη, τότε αυτό υποδεικνύει μικρή τιμή της ταχύτητας, όπως στην περιοχή 2 του Σχήματος 3.4 εμπρός από τον κύλινδρο.

Σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ , οι συνιστώσες της ταχύτητας  $u_r$  και  $u_\theta$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.12)$$

Τέλος, στην περίπτωση στροβιλής δισδιάστατης ροής, η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  ικανοποιεί την εξίσωση Poisson. Η στροβιλότητα δίνεται από τη σχέση (3.1):

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.13)$$

και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.8) έχουμε:

$$\boxed{\nabla^2 \Psi = -\omega} \quad (3.14)$$

Αξίζει να τονιστεί ότι η ροϊκή συνάρτηση δεν ορίζεται στις τρεις διαστάσεις.

### 3.2.2 Το Δυναμικό Ροής

Η συνθήκη αστρόβιλης ροής εκφράζεται ως εξής σύμφωνα με τον ορισμό της στροβιλότητας (3.1):

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (3.15)$$

Ισχύει επίσης για κάθε συνάρτηση  $Q(x, y, z, t)$

$$\nabla \times (\nabla Q) = 0 \quad (3.16)$$

Συγκρίνοντας τις (3.15) και (3.16) έχουμε:

$$\vec{V} = \nabla Q \quad (3.17)$$

Στη νέα συνάρτηση  $Q$  δίνουμε την ονομασία *δυναμικό ταχύτητας* και τη συμβολίζουμε με  $\Phi$ . Επομένως, οι συνιστώσες της ταχύτητας σε τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.18)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες οι αντίστοιχες σχέσεις είναι:

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.19)$$

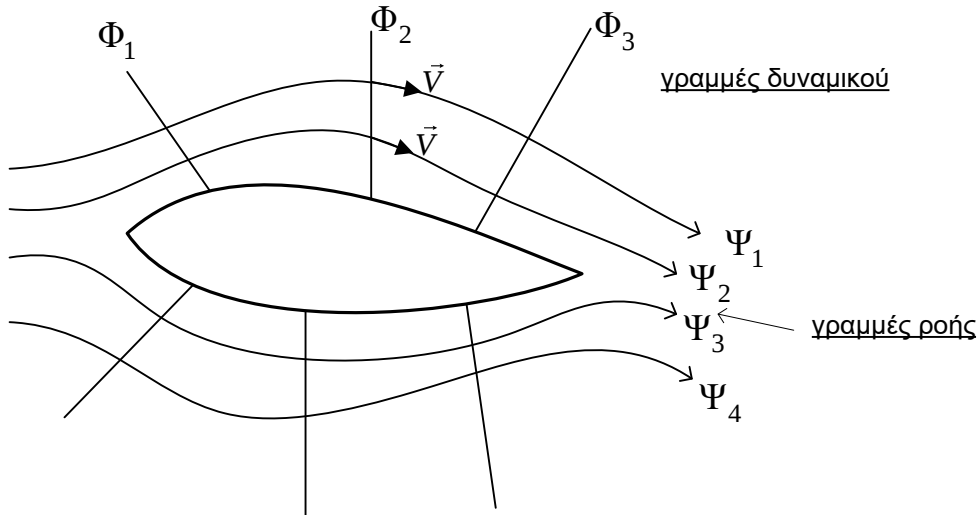
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της συνέχειας της ασυμπίεστης ροής  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$  τις σχέσεις (3.18) καταλήγουμε στην εξίσωση Laplace για το δυναμικό ταχύτητας:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad (3.20)$$

Από την εξίσωση αυτή είναι δυνατός ο υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικού, η οποία κατόπιν δίνει άμεσα τις συνιστώσες της ταχύτητας σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.18) και (3.19).

Εφόσον η εξίσωση Laplace είναι γραμμική, ισχύει η αρχή της υπέρθεσης στοιχειωδών λύσεων. Επομένως, ένα σύνθετο αστρόβιλο ροϊκό πεδίο μπορεί να «κατασκευαστεί» μέσω της επαλληλίας απλούστερων πεδίων, όπως είναι οι στοιχειώδεις ροές που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο.

Η συνάρτηση  $\Phi$  αναπαριστά γραμμές ή επιφάνειες στο επίπεδο και στον χώρο αντίστοιχα, πάνω στις οποίες η τιμή της παραμένει σταθερή. Οι γραμμές και οι επιφάνειες αυτές καλούνται, ως εκ τούτου, *ισοδυναμικές*. Οι ισοδυναμικές γραμμές/επιφάνειες έχουν πάντα σε αυτές κάθετο το διάνυσμα της ταχύτητας της ροής, αφού ισχύει ότι  $\vec{V} = \nabla \Phi$ . Δεδομένου ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι επίσης εφαπτόμενο στις γραμμές ροής, προκύπτει ότι οι γραμμές της ροϊκής συνάρτησης και αυτές του δυναμικού είναι κάθετες μεταξύ τους, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.5.



**Σχήμα 3.5:** Γραμμές δυναμικού ( $\Phi$ ) και ροϊκές γραμμές ( $\Psi$ ) γύρω από αεροτομή.

Αξίζει να αναφερθεί πως η συνάρτηση δυναμικού μπορεί να οριστεί για τρισδιάστατα πεδία ροής τα οποία όμως θα πρέπει να είναι αστρόβιλα, και άρα μη-συνεκτικά. Αντίθετα, η ροϊκή συνάρτηση μπορεί να οριστεί μόνο σε δισδιάστατα πεδία, τα οποία όμως μπορούν να έχουν στροβιλότητα.

### 3.3 Ομοιόμορφη Ροή

Το πεδίο μακριά από την αεροτομή (ελεύθερη ροή) θεωρείται ομοιόμορφο, δηλαδή χωρίς μεταβολή κατά  $x$  και  $y$ .

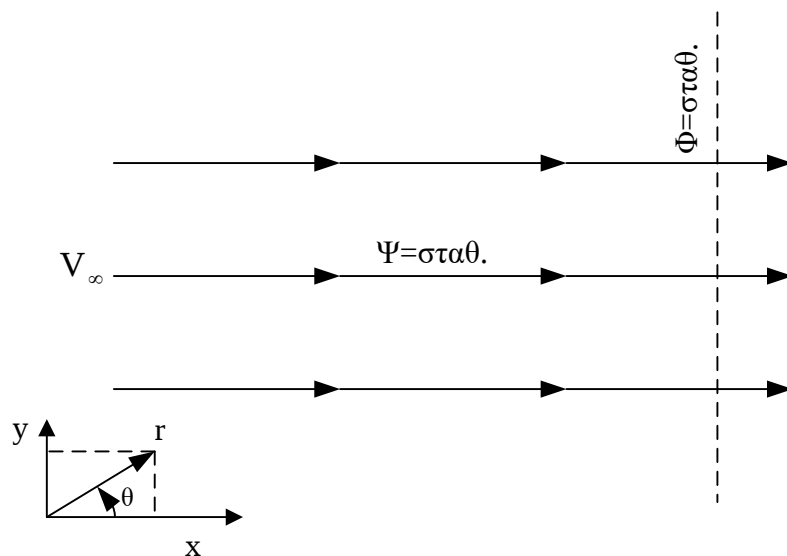
Στην ομοιόμορφη ροή ισχύει ότι  $\nabla \times \vec{V} = 0$  δηλαδή η ροή είναι αστρόβιλη. Επομένως, μπορεί να οριστεί δυναμικό ταχύτητας έτσι ώστε:

$$V_{\infty} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \Phi = V_{\infty} \cdot x + \text{σταθερά} \quad (3.21)$$

και θεωρώντας  $\Phi = 0$  για  $x = 0$ , η συνάρτηση του δυναμικού είναι:

$$\boxed{\Phi = V_{\infty} \cdot x} \quad (3.22)$$

Επίσης είναι:  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ , το οποίο σημαίνει ότι οι γραμμές δυναμικού είναι κατακόρυφες, όπως απεικονίζεται το Σχήμα 3.6.



**Σχήμα 3.6:** Γραμμές ροϊκής συνάρτησης και του δυναμικού ταχύτητας στην περίπτωση ομοιόμορφης ροής.

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$ , έτσι ώστε:

$$V_{\infty} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Rightarrow \Psi = V_{\infty} \cdot y + \text{σταθερά} \quad (3.23)$$

και θεωρώντας  $\Psi = 0$  για  $y = 0$ , προκύπτει ότι στην ομοιόμορφη ροή η ροϊκή συνάρτηση είναι:

$$\boxed{\Psi = V_{\infty} \cdot y} \quad (3.24)$$

Επίσης, ισχύει ότι  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$ , το οποίο σημαίνει ότι οι ροϊκές γραμμές είναι οριζόντιες (Σχήμα 3.6). Αντίστοιχα, σε πολικές συντεταγμένες το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση εκφράζονται:

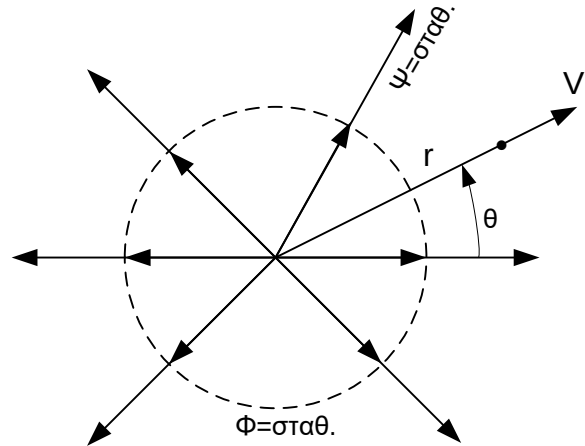
$$\Phi = V_{\infty} r \cos \theta \quad (3.25)$$

και

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta \quad (3.26)$$

### 3.4 Σημειακή Πηγή

Η αεροτομή εκτοπίζει την ελεύθερη ροή. Η "στρέβλωση" των ροϊκών γραμμών μπορεί να μοντελοποιηθεί με την τοποθέτηση στο ομοιόμορφο πεδίο σημειακών πηγών.



**Σχήμα 3.7:** Ισοϋψείς της ροϊκής συνάρτησης και του δυναμικού της ταχύτητας για σημειακή πηγή.

Η σημειακή πηγή χαρακτηρίζεται από ακτινική ροή με ταχύτητα  $V_r$ , όπως δείχνει το Σχήμα 3.7. Η ροή είναι αστρόβιλη. Η παροχή μάζας που περνά από ομόκεντρους κύκλους ακτίνας  $r$  γύρω από σημειακή πηγή είναι σταθερή:

$$\dot{m} = \rho V_r 2\pi r = \text{σταθερή} \Rightarrow$$

$$V_r = \frac{\text{σταθερά}}{2\pi r} \equiv \frac{\Lambda}{2\pi r}, \quad (3.27)$$

όπου  $\Lambda$  είναι η ένταση της πηγής. Η ένταση έχει αρνητική τιμή (σημειακή απαγωγή) στην περίπτωση αντίθετης φοράς των διανυσμάτων της ταχύτητας.

Από την εξίσωση (3.27) προκύπτει ότι η ταχύτητα τείνει να απειρισθεί στο σημείο της πηγής ( $r=0$ ). Το σημείο της πηγής αποτελεί ένα ιδιόμορφο σημείο ("singular point") της ροής.

Θεωρώντας το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  και την ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$ , έχουμε:

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r} \quad (3.28)$$

και

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Psi = \frac{\Lambda}{2\pi} \theta} \quad (3.29)$$

Στις τρεις διαστάσεις οι ομόκεντροι κύκλοι αντικαθίστανται από ομόκεντρες σφαίρες επιφάνειας  $4\pi r^2$ . Η παροχή της μάζας είναι:

$$\dot{m} = \rho V_r 4\pi r^2 \Rightarrow$$

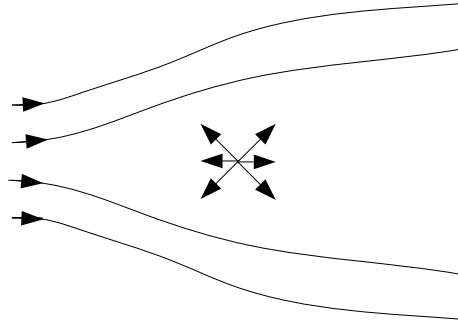
$$V_r = \frac{\dot{m}/\rho}{4\pi r^2} \equiv \frac{\Lambda}{4\pi r^2} \quad (3.30)$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι:

$$\Phi = - \frac{\Lambda}{4\pi r}, \quad (3.31)$$

$$\Psi = - \frac{\Lambda}{4\pi} \cos \theta \quad (3.32)$$

Σημειακές πηγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να προσομοιώσουμε την εκτόπιση της ελεύθερης ροής από την ύπαρξη στερεού σώματος, όπως απεικονίζει το Σχήμα 3.8.



**Σχήμα 3.8:** Εκτόπιση των ροϊκών γραμμών της ελεύθερης ροής από σημειακή πηγή.

### 3.4.1 Κατανομή Πηγών

Μπορούμε να θεωρήσουμε κατανομή σημειακών πηγών διατεταγμένων σε γραμμή. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε την ένταση πηγής ανά μονάδα μήκους κατά μήκος της γραμμής  $s$  ως  $\lambda(s)$ .

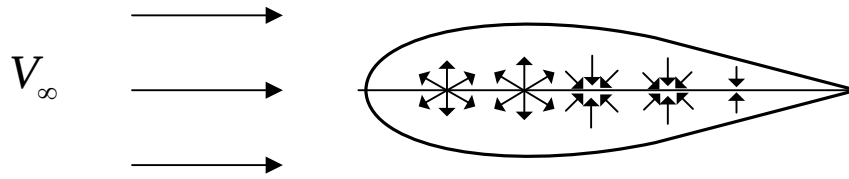
Η επαγόμενη ταχύτητα σε σημείο το οποίο απέχει απόσταση  $r$  από το τμήμα  $ds$  της γραμμής πηγών είναι:

$$dV = \frac{\lambda ds}{2\pi r} \quad (3.33)$$

Η συνολική επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο προκύπτει με την ακόλουθη ολοκλήρωση στη γραμμή πηγών:

$$V = \int \frac{\lambda(s) ds}{2\pi r(s)} \quad (3.34)$$

Με τη βοήθεια της κατανομής  $\lambda(s)$  μπορούμε να προσομοιώσουμε ροή γύρω από συμμετρική αεροτομή όπως δείχνει το Σχήμα 3.9.



**Σχήμα 3.9:** Συνδυασμός ομοιόμορφης ροής και κατανομής σημειακών πηγών/δινών στη χορδή μοντελοποιεί ροή γύρω από συμμετρική αεροτομή.

Η κατανομή των πηγών  $\lambda(s)$  μπορεί να υπολογισθεί έτσι ώστε το περίγραμμα της αεροτομής να είναι ροϊκή γραμμή, δηλαδή η ταχύτητα της ροής κάθετα στην επιφάνεια της αεροτομής να μηδενίζεται. Πρακτικά, ένα τέτοιο πρόβλημα λύνεται αριθμητικά με τη μέθοδο των πλαισίων.

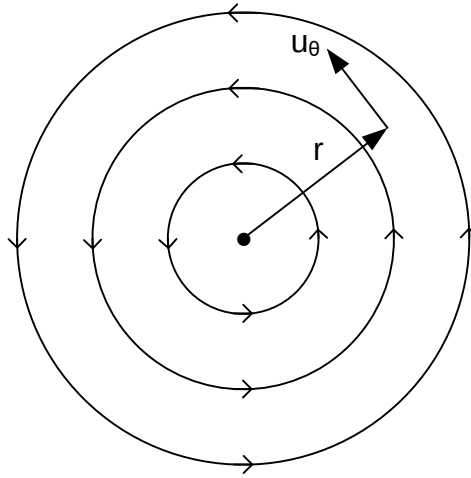
Έχοντας υπολογίσει την  $\lambda(s)$ , μπορεί πλέον να υπολογισθεί η επαγόμενη ταχύτητα σε κάθε σημείο του πεδίου ροής. Η δε χρήση της εξίσωσης Bernoulli επιτρέπει τον υπολογισμό της πίεσης γύρω από την αεροτομή.

### 3.5 Στρόβιλος σε Δύο Διαστάσεις

Σε πολλά αεροδυναμικά πεδία παρατηρούνται κινήσεις των στοιχείων του ρευστού σε κυκλικές περίπου τροχιές. Ο σημειακός στρόβιλος χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση τέτοιων κινήσεων.

Θεωρούμε δισδιάστατη μη συνεκτική και ασυμπίεστη ροή με μηδενική ακτινική ταχύτητα ( $u_r = 0$ ) και με περιφερειακή ταχύτητα  $u_\theta = u_\theta(r)$  η οποία είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας  $r$ . Οι γραμμές ροής, δηλαδή, είναι ομόκεντροι κύκλοι, όπως απεικονίζει το Σχήμα 3.10. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των στοιχείων του ρευστού, και συνεπώς αυτά δεν περιστρέφονται γύρω από τον άξονα τους (αστρόβιλη ροή), αλλά γύρω από το κέντρο του στροβίλου που αποτελεί ιδιόμορφο σημείο με άπειρη στροβιλότητα. Συνεπώς, είναι σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{V} &= \frac{u_\theta}{r} + \frac{du_\theta}{dr} = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \cdot u_\theta) &= 0 \Rightarrow \\ u_\theta &= \frac{c}{r}\end{aligned}\tag{3.35}$$



**Σχήμα 3.10:** Σημειακός στρόβιλος σε δυο διαστάσεις.

Για να βρούμε τη σταθερά  $c$  υπολογίζουμε την κυκλοφορία  $\Gamma$  με ολοκλήρωση πάνω σε έναν από τους ομόκεντρους κύκλους του Σχήματος 3.10.

$$\begin{aligned}\Gamma &= - \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = - u_\theta (2\pi r) \Rightarrow \\ \boxed{u_\theta} &= - \frac{\Gamma}{2\pi r}\end{aligned}\tag{3.36}$$

Ως  $\Gamma$  ορίζουμε την ένταση του στροβίλου. Σημειώνεται ότι η κυκλοφορία  $\Gamma$  οφείλεται αποκλειστικά στην άπειρη στροβιλότητα που υπάρχει στο κέντρο του στροβίλου, αφού η στροβιλότητα σε όλα τα άλλα σημεία είναι μηδέν.

Το δυναμικό της ταχύτητας συνδέεται με την ταχύτητα μέσω της παρακάτω σχέσης σε πολικές συντεταγμένες:

$$u_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω την (3.36) και ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta} \quad (3.37)$$

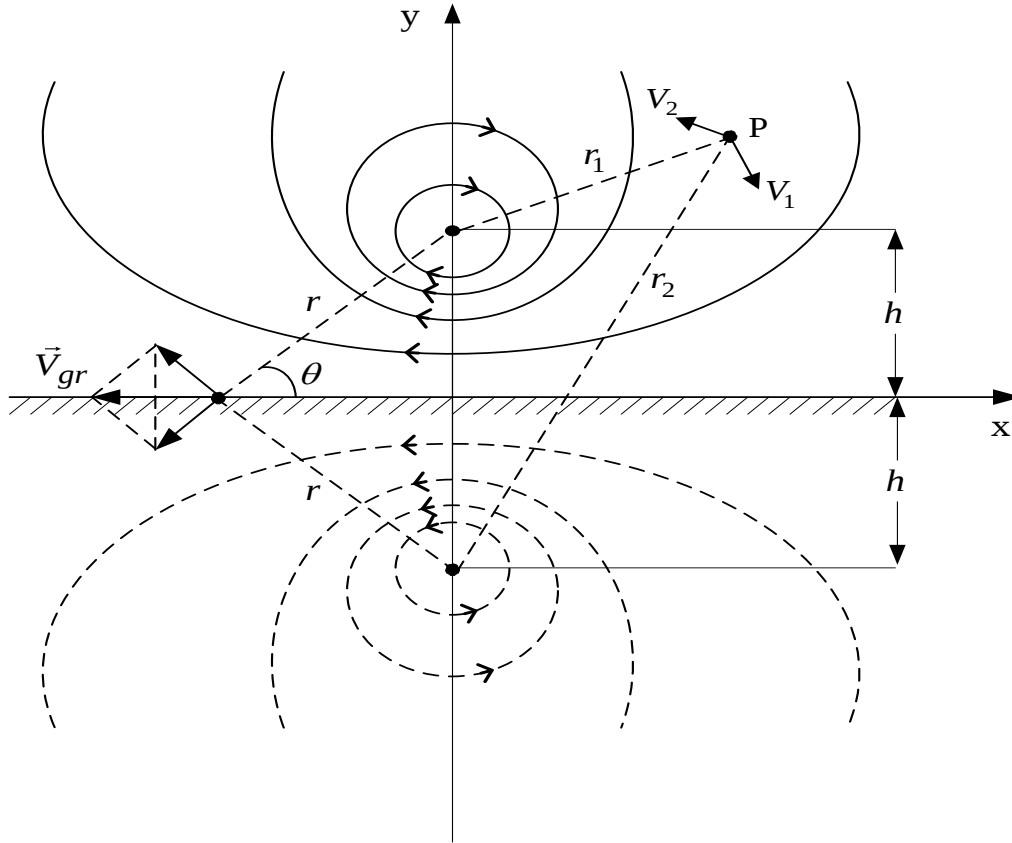
Με όμοιο τρόπο προκύπτει και η ροϊκή συνάρτηση:

$$u_{\theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow$$
$$\boxed{\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r} \quad (3.38)$$

### 3.5.1 Επίδραση του εδάφους σε στρόβιλο - Μέθοδος των ειδώλων

Η μελέτη της αλληλεπίδρασης στροβίλων είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς προσφέρει τη δυνατότητα της μοντελοποίησης πεδίων ροής, τα οποία βρίσκονται κοντά σε τοιχώματα ή αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η μέθοδος βάσει της οποίας γίνεται η μοντελοποίηση τέτοιων πεδίων ροής καλείται μέθοδος των ειδώλων και υποθέτει ότι ένα στερεό τοίχωμα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα είδωλο ενός ροϊκού στοιχείου.

Θεωρούμε στρόβιλο έντασης  $\Gamma$ , οποίος βρίσκεται σε απόσταση  $h$  από το έδαφος, όπως δείχνει το Σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Επίδραση εδάφους σε στρόβιλο.

Κατά την προσγείωση και απογείωση αεροσκαφών συναντούμε τέτοιους στρόβιλους κοντά στο έδαφος. Για την εύρεση του πεδίου ροής μπορούμε να αντικαταστήσουμε το έδαφος με έναν δεύτερο στρόβιλο-είδωλο, όπως απεικονίζει το Σχήμα 3.11. Το είδωλο έχει την ίδια ένταση με τον πραγματικό στρόβιλο αλλά αντίθετη κυκλοφορία έτσι ώστε να μηδενιστεί στο έδαφος η κατακόρυφη συνιστώσα της επαγόμενης ταχύτητας. Παρατηρείται ότι οι γραμμές ροής του συνολικού πεδίου δεν είναι κύκλοι. Το συνολικό πεδίο ροής σε τυχαία θέση P (x, y) του πεδίου μπορεί να εκφραστεί με άθροιση των ταχυτήτων που αντιστοιχούν στο πεδίο του καθενός στρόβιλου.

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας ( $u$ ) για το συνολικό πεδίο ροής είναι:

$$u = V_1 \cdot \cos \theta_1 - V_2 \cdot \cos \theta_2 \Rightarrow$$

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r_1} \cdot \cos \theta_1 - \frac{\Gamma}{2\pi r_2} \cdot \cos \theta_2$$

όπου  $V$  είναι το μέτρο ταχύτητας και  $\theta_1, \theta_2$  είναι οι γωνίες των ταχυτήτων  $V_1, V_2$  ως προς τον οριζόντιο άξονα. Εκφράζοντας τις ακτίνες και τα συνημίτονα των γωνιών με βάση τις συντεταγμένες  $x, y$  καθώς και την απόσταση  $h$  προκύπτει:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{y+h}{x^2+(y+h)^2} \quad (3.39)$$

Ομοίως η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ( $v$ ) για το συνολικό πεδίο ροής είναι:

$$v = -V_1 \cdot \sin \theta_1 + V_2 \cdot \sin \theta_2 \Rightarrow$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+(y-h)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+(y+h)^2} \quad (3.40)$$

Θέτοντας  $x=0$  και  $y=h$  στις σχέσεις (3.39) και (3.40) υπολογίζεται η ταχύτητα στο κέντρο του άνω στρόβιλου. Ο στρόβιλος τελικά θα κινηθεί παράλληλα στο έδαφος προς τα αριστερά με ταχύτητα  $\frac{\Gamma}{2\pi 2h}$ , η οποία είναι η επαγόμενη ταχύτητα στο κέντρο του από το στρόβιλο-είδωλο.

Η ταχύτητα σε μια τυχαία θέση του εδάφους ( $x$ ) υπολογίζεται αντικαθιστώντας  $y=0$  στη σχέση (3.39) και προκύπτει:

$$V_{gr} = -\frac{\Gamma}{\pi h \cdot \left[ \left( \frac{x}{h} \right)^2 + 1 \right]} \quad (3.41)$$

Η πίεση στο έδαφος ( $P_{gr}$ ) υπολογίζεται εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli, θεωρώντας  $V_\infty = 0$ :

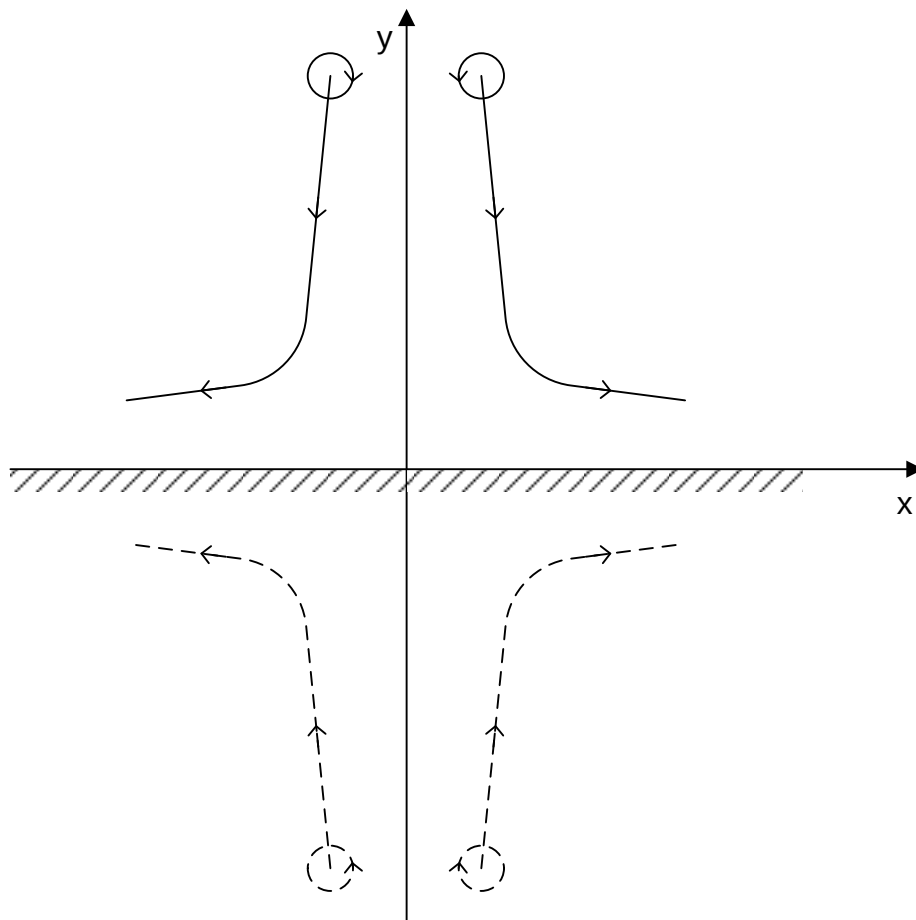
$$P_{gr} = P_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 - \frac{\rho}{2} V_{gr}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{P_{gr}}{P_\infty} = 1 - \frac{\rho}{2P_\infty} \left( \frac{\Gamma}{\pi h} \right)^2 \cdot \frac{1}{\left[ \left( \frac{x}{h} \right)^2 + 1 \right]^2}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι η πίεση στο έδαφος είναι μικρότερη από την πίεση του αδιατάρακτου ρευστού ( $P_{gr} < P_\infty$ ).

### 3.5.2 Αλληλεπίδραση δυο στροβίλων

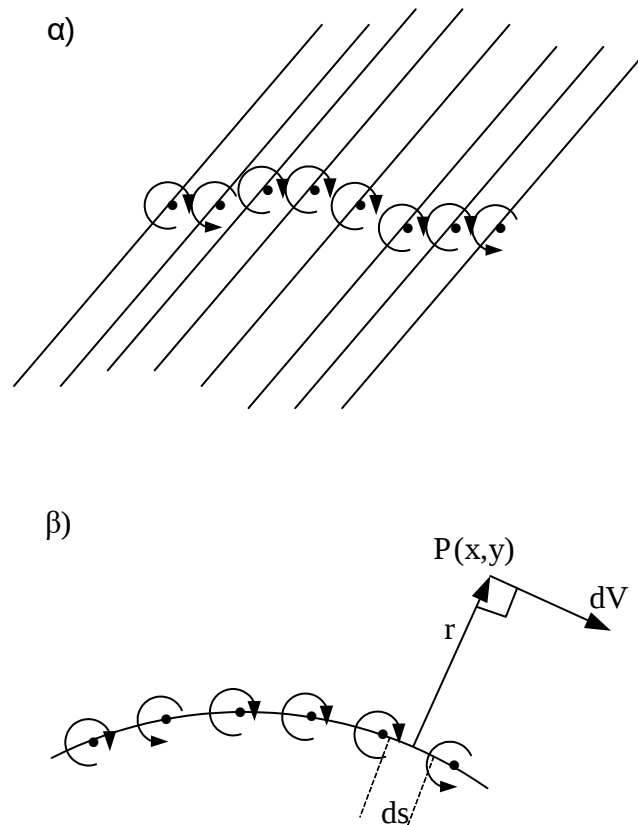
Θεωρούμε δύο στροβίλους αντίθετης κυκλοφορίας σε κάποιο ύψος κοντά στο έδαφος, όπως εικονίζονται στο Σχήμα 3.12. Ο κάθε στρόβιλος θα κινηθεί όπως στο σχήμα εξαιτίας των ταχυτήτων που επάγονται από τον άλλο στρόβιλο και τα δυο είδωλα. Παράδειγμα τέτοιας αλληλεπίδρασης είναι η περίπτωση στροβίλων από τα άκρα της πτέρυγας αεροσκάφους όταν αυτό βρίσκεται κοντά στο έδαφος.



**Σχήμα 3.12:** Αλληλεπίδραση δυο στροβίλων και εδάφους.

### 3.5.3 Κατανομές Στροβιλότητας

Θεωρούμε κατανομή στροβίλων στις τρεις ή στις δύο διαστάσεις όπως δείχνει το Σχήμα 3.13. Ορίζουμε  $\gamma = \gamma(s)$  την τοπική ένταση της γραμμής στροβιλότητας ανά μονάδα μήκους κατά το  $s$ .



**Σχήμα 3.13:** Κατανομή στροβιλότητας σε τρεις και σε δυο διαστάσεις.

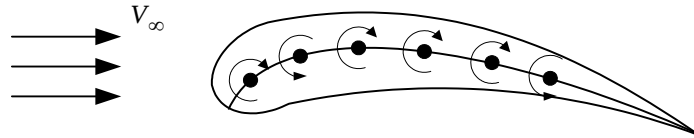
Το τμήμα  $ds$  της γραμμής στροβιλότητας επάγει ταχύτητα:

$$dV = - \frac{\gamma ds}{2\pi r} \quad (3.42)$$

όπου, το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού για κατανομή στροβιλότητας ωρολογιακής φοράς.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι η ροή γύρω από μη-συμμετρική αεροτομή μπορεί να μοντελοποιηθεί από την υπέρθεση μιας ομοιόμορφης ροής και μιας

κατανομής στροβιλότητας όπως απεικονίζει το Σχήμα 3.14. Η κατανομή  $\gamma(s)$  υπολογίζεται αριθμητικά αν θεωρήσουμε την συνθήκη ότι η συνολική ταχύτητα της ροής  $\vec{V}_\infty + \vec{V}_{επαγόμενη}$ , πρέπει να είναι εφαπτομενική στην επιφάνεια της αεροτομής.



**Σχήμα 3.14:** Συνδυασμός ομοιόμορφης ροής και κατανομής σημειακών στροβίλων στη μέση γραμμή αεροτομής είναι μια προσέγγιση της ροής γύρω από μη-συμμετρική αεροτομή.

### 3.6 Μεταβολή της Στροβιλότητας και της Κυκλοφορίας - Το θεώρημα Kelvin

Σε αυτή την ενότητα εξετάζονται η μεταβολή της στροβιλότητας καθώς και της κυκλοφορίας, δύο ποσοτήτων σημαντικών για τη μοντελοποίηση αεροδυναμικών πεδίων.

#### 3.6.1 Η Εξίσωση της Στροβιλότητας

Η στροβιλότητα είναι μια ποσότητα της ροής η οποία μεταβάλλεται στο χρόνο, μεταφέρεται με την τοπική ταχύτητα του πεδίου, καθώς και διαχέεται λόγω της τριβής μεταξύ των στοιχείων του ρευστού.

Για την εξαγωγή της εξίσωσης της στροβιλότητας θεωρείται ασυμπίεστο πεδίο ροής, για το οποίο η εξίσωση της ορμής έχει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V} \quad (3.43)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή  $(\nabla \times)$  και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του διανυσματικού λογισμού ότι  $\nabla \times (\nabla p) = 0$ , προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = \frac{\mu}{\rho} \nabla \times (\nabla^2 \vec{V})$$

Αναδιατάσσοντας τους διαφορικούς τελεστές και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της στροβιλότητας προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \times \vec{V})}{\partial t} + \nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \vec{V}) \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$  αλλά και ταυτότητες του διανυσματικού λογισμού, γίνεται μετασχηματισμός του όρου  $\nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})$  ως εξής:

$$\nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} \quad (3.45)$$

Αντικαθιστώντας την (3.45) στην (3.44) και αναδιατάσσοντας, προκύπτει:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} \quad (3.46)$$

Οι όροι στο πρώτο μέλος της (3.46) αποτελούν την ολική ή ουσιώδη παράγωγο της στροβιλότητας  $\left( \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right)$ . Η ολική ή ουσιώδης παράγωγος ενός ροϊκού μεγέθους εκφράζει την ολική μεταβολή του μεγέθους μέσα στο ροϊκό πεδίο, λόγω της μεταβολής του πεδίου στο χρόνο και της μεταφοράς του μεγέθους αυτού στο χώρο. Χρησιμοποιώντας την ολική παράγωγο, η (3.46) γίνεται:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} \quad (3.47)$$

ή οποία αποτελεί την εξίσωση της στροβιλότητας για ασυμπίεστη ροή.

Στην (3.47) όρος  $\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega}$  εκφράζει τη διάχυση της στροβιλότητας λόγω της συνεκτικότητας του ρευστού και ο όρος  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V}$  εκφράζει τη μεταβολή της στροβιλότητας λόγω της χωρικής βάρμωσης του πεδίου ταχυτήτων.

Αν η ροή είναι μη-συνεκτική, η εξίσωση της στροβιλότητας (3.47) γίνεται:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} \quad (3.48)$$

Από την ανωτέρω εξίσωση προκύπτει πως αν σε μια μη-συνεκτική ροή, η στροβιλότητα τη χρονική στιγμή  $t=0$  είναι μηδενική, τότε θα είναι  $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$ , και επομένως δε θα δημιουργηθεί στροβιλότητα στο πεδίο ροής. Αυτό οφείλεται στην απουσία των δυνάμεων τριβής, οι οποίες είναι οι μόνες που μπορούν να θέσουν σε περιστροφή τα στοιχεία του ρευστού γύρω από τον άξονά τους.

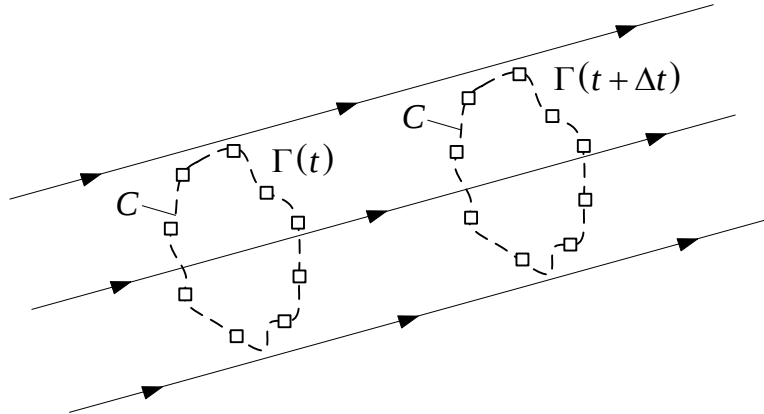
Επιπλέον, σε μια διδιάστατη ροή, όπως είναι η ροή γύρω από αεροτομή, τα διανύσματα  $\vec{\omega}$  και  $\nabla \vec{V}$  είναι κάθετα μεταξύ τους. Επομένως, για την ειδική περίπτωση της διδιάστατης και μη-συνεκτικής ροής, από την (3.47) προκύπτει και πάλι ότι  $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$ .

### 3.6.2 Διατήρηση της Κυκλοφορίας – Το Θεώρημα Kelvin

Θεωρούμε χρονικά μεταβαλλόμενη, μη συνεκτική και ασυμπίεστη ροή. Η κυκλοφορία ορισμένη σε κλειστή καμπύλη η οποία κινείται έτσι ώστε να "ακολουθεί" τα ίδια στοιχεία του ρευστού δεν αλλάζει με το χρόνο  $\left( \frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \right)$ . Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως *θεώρημα Kelvin* και οφείλεται στο ότι δεν ασκούνται δυνάμεις τριβής στα στοιχεία του ρευστού, έτσι ώστε να μεταβληθεί η κυκλοφορία. Παρακάτω παρατίθεται μια απλοποιημένη απόδειξη του θεωρήματος Kelvin.

Έστω η ροή του Σχήματος 3.15, όπου τη χρονική στιγμή  $t$  κάποια στοιχεία ρευστού σχηματίζουν την κλειστή καμπύλη  $C$ , η οποία έχει κυκλοφορία  $\Gamma(t)$ . Τη

χρονική στιγμή  $t+\Delta t$ , η καμπύλη  $C$  έχει μετατοπιστεί σε νέα θέση και έχει κυκλοφορία  $\Gamma(t+\Delta t)$ .



**Σχήμα 3.15:** Στοιχεία ρευστού σχηματίζουν κλειστή καμπύλη  $C$ , η οποία μετατοπίζεται μεταξύ δύο χρονικών στιγμών

Η ολική παράγωγος της κυκλοφορίας είναι:

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left( -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \right) \Rightarrow \\ \frac{D\Gamma}{Dt} &= - \oint_C \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} - \oint_C \vec{V} \cdot \frac{D(d\vec{s})}{Dt}\end{aligned}\quad (3.49)$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα της (3.49) παρουσιάζεται η ολική παράγωγος της ταχύτητας, η οποία δίνεται από την εξίσωση ορμής για μη συνεκτική και ασυμπίεστη ροή:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.50)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι  $\frac{D(d\vec{s})}{Dt} = 0$ , διότι η καμπύλη  $C$  δεν παραμορφώνεται από τη χρονική στιγμή  $t$  στη χρονική στιγμή  $t+\Delta t$ . Επομένως, η (3.49) γίνεται:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\rho} \oint_C dp \quad (3.51)$$

όπου η πυκνότητα  $(\rho)$  είναι σταθερή και βγαίνει εκτός του ολοκληρώματος.

Το ολοκλήρωμα της (3.51) γράφεται εναλλακτικά ως  $\int_1^2 dp = p_2 - p_1 = 0$ , εφόσον η καμπύλη  $C$  είναι κλειστή και άρα οι θέσεις ολοκλήρωσης 1 και 2 ταυτίζονται. Προκύπτει τελικά λοιπόν ότι η ουσιώδης παράγωγος της κυκλοφορίας γύρω από την κλειστή καμπύλη  $C$  είναι μηδενική:

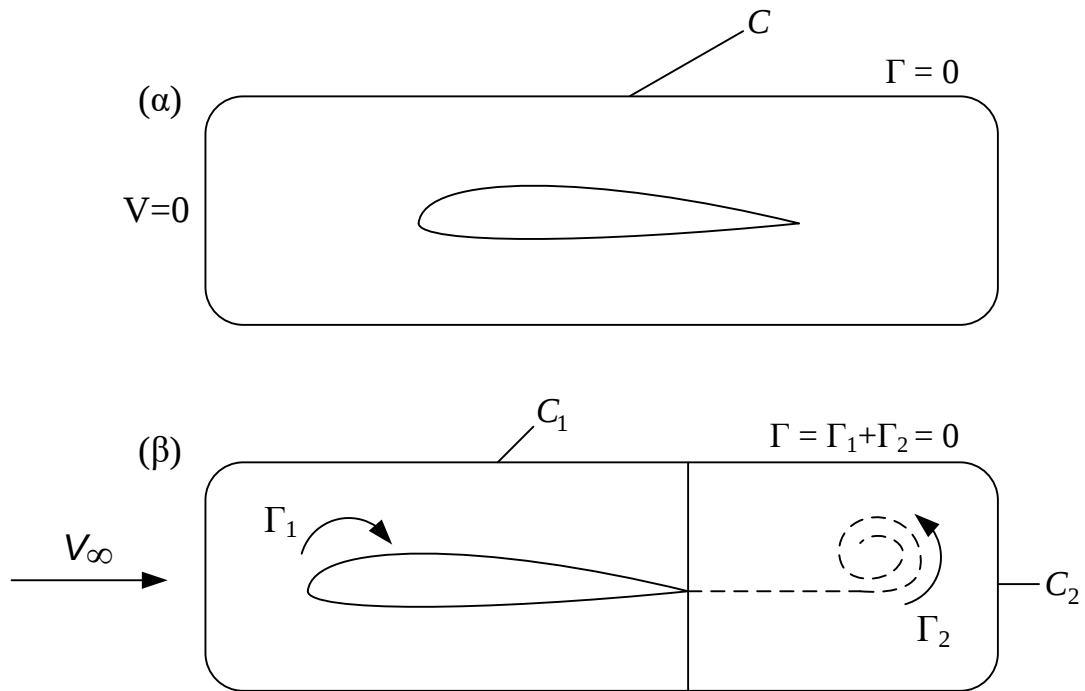
$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (3.52)$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα Kelvin.

### 3.6.3 Στρόβιλος Εκκίνησης

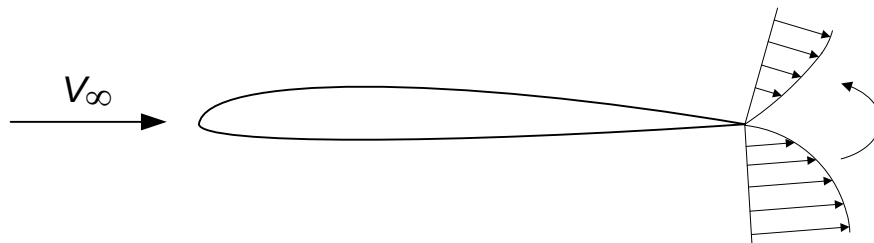
Παρακάτω παρουσιάζεται μια εφαρμογή του θεωρήματος Kelvin σε ροή γύρω από αεροτομή. Η αεροτομή βρίσκεται μέσα σε ένα ρευστό σε ηρεμία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16(α). Επειδή η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική, η κυκλοφορία στην καμπύλη  $C$  είναι μηδέν. Την χρονική στιγμή εκκίνησης της αεροτομής, σχηματίζεται στο χείλος εκφυγής τμήμα ρευστού πολύ μεγάλης ταχύτητας και στροβιλότητας, το οποίο εξ' αιτίας της αστάθειάς του τείνει να περιστραφεί. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16(β) σχηματίζεται στρόβιλος, ο οποίος καλείται *στρόβιλος εκκίνησης* ("starting vortex"). Η κυκλοφορία στην καμπύλη  $C$  η οποία περιλαμβάνει την αεροτομή και τον στρόβιλο εκκίνησης, βάσει του θεωρήματος Kelvin είναι ίση με την αρχική κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη, δηλαδή μηδέν. Αν διαιρέσουμε την  $C$  σε δύο μέρη δημιουργούνται οι περιοχές  $C_1$  και  $C_2$ . Η  $C_1$  περιλαμβάνει την αεροτομή και έχει κυκλοφορία  $\Gamma_1$ , ενώ η  $C_2$  περιλαμβάνει τον στρόβιλο εκκίνησης και έχει κυκλοφορία  $\Gamma_2$ . Το άθροισμά τους είναι ίσο με την συνολική κυκλοφορία  $\Gamma$  η οποία είναι μηδέν. Οπότε είναι:  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ . Επομένως προκύπτει  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ . Ο στρόβιλος εκκίνησης αποκολλάται από την αεροτομή και κινείται κατάντι.

Η κυκλοφορία  $\Gamma_1$  μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε στρόβιλο που ακολουθεί την αεροτομή στην κίνηση της και καλείται *προσδεμένος στρόβιλος* ("bound vortex").



**Σχήμα 3.16:** Στρόβιλος εκκίνησης και προσδεμένος στρόβιλος κατά την κίνηση αεροτομής.

Η αριστερόστροφη φορά του στροβίλου εκκίνησης μπορεί να εξηγηθεί εναλλακτικά και μέσω των τοπικών ταχυτήτων στην περιοχή του χείλους εκφυγής. Λαμβάνοντας υπόψη και τη συνεκτικότητα του ρευστού, σχηματίζονται οριακά στρώματα στην περιοχή πάνω και κάτω από το χείλος εκφυγής, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.17. Οι ταχύτητες στο οριακό στρώμα κάτω από το χείλος εκφυγής είναι συνήθως μεγαλύτερες («πιο γεμάτο προφίλ») και αυτό οδηγεί στη δημιουργία του αριστερόστροφου στροβίλου εκκίνησης.



**Σχήμα 3.17:** Οι ταχύτητες είναι πιο μεγάλες στο οριακό στρώμα κάτω από το χείλος εκφυγής με συνέπεια τη δημιουργία του αριστερόστροφου στροβίλου εκκίνησης.

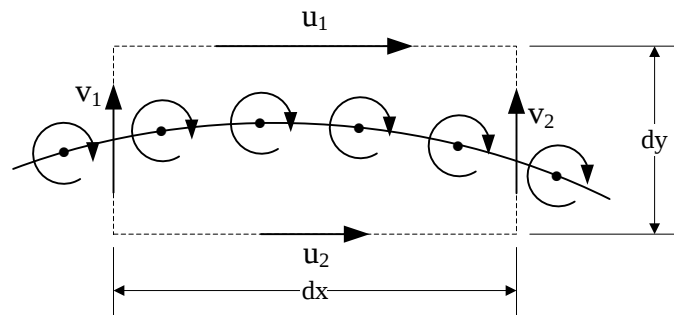
Ένα ακόμα φαινόμενο που μπορεί να περιγραφεί με όμοιο τρόπο από το θεώρημα Kelvin, είναι αυτό της ανάπτυξης ενός στροβίλου όταν η αεροτομή σταματά την κίνησή της εντός ρευστού (“stopping vortex”). Ο στρόβιλος αυτός σχηματίζεται στο χείλος εκφυγής, ως αποτέλεσμα της διάχυσης του προσδεμένου στροβίλου μέσα στο ρευστό, και περιστρέφεται με αντίθετη φορά σε σχέση με τον στρόβιλο εκκίνησης.

### 3.7 Το Θεώρημα Kutta - Joukowski

Η κυκλοφορία  $\Gamma$  και η άντωση  $L$  συνδέονται μεταξύ τους με βάση το σημαντικότερο θεώρημα της Αεροδυναμικής, το οποίο διατυπώθηκε το 1906 από τον N. Joukowski. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γραμμή στροβιλότητας για να αποδείξουμε τη σχέση.

Για τον υπολογισμό της κυκλοφορίας θεωρούμε ορθογώνιο περίγραμμα με διαστάσεις  $dx$  και  $dy$  το οποίο περικλείει ένα τμήμα  $ds$  της γραμμής στροβιλότητας όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.18. Η κυκλοφορία δίνεται από τη σχέση:

$$\Gamma \equiv -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = (u_1 - u_2)dx + (v_1 - v_2)dy \quad (3.53)$$



**Σχήμα 3.18:** Διαφορά ταχύτητας στις δυο πλευρές της γραμμής στροβιλότητας.

Όταν το  $dy$  τείνει στο μηδέν, οι  $u_1$  και  $u_2$  γίνονται εφαπτομενικές στη γραμμή και η κυκλοφορία προσεγγίζεται ως εξής:

$$\Gamma = (u_1 - u_2)ds \Rightarrow \gamma ds = (u_1 - u_2)ds \Rightarrow \gamma = u_1 - u_2 \quad (3.54)$$

Παρατηρούμε ότι η ένταση  $\gamma$  εκφράζει τη διαφορά της ταχύτητας στις δυο πλευρές της γραμμής στροβιλότητας.

Η διαφορά της πίεσης μεταξύ των δυο πλευρών της γραμμής στροβιλότητας του Σχήματος 3.18 μπορεί να προσεγγιστεί με την εξίσωση Bernoulli:

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) = \rho \frac{u_1 + u_2}{2} (u_1 - u_2) \quad (3.55)$$

Η γραμμή στροβιλότητας προκαλεί διαταραχή  $u'$  στην οριζόντια ταχύτητα  $U_\infty$  της ελεύθερης ροής και οι ταχύτητες  $u_1$  και  $u_2$  μπορούν να προσεγγιστούν ως εξής:

$$u_1 = U_\infty + u', \quad u_2 = U_\infty - u' \quad (3.56)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.55) έχουμε:

$$\Delta P = \rho U_\infty \gamma \quad (3.57)$$

Η δύναμη της άντωσης ανά μονάδα βάθους του πεδίου στο τμήμα  $ds$  είναι:

$$\Delta L = \Delta P ds \Rightarrow$$

$$\Delta L = \rho U_\infty \gamma ds \quad (3.58)$$

Ολοκληρώνοντας σε όλη τη γραμμή στροβιλότητας, έχουμε:

$$L = \rho U_\infty \int \gamma ds \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \rho U_\infty \Gamma} \quad (3.59)$$

Να σημειωθεί ότι, η κυκλοφορία δεν αποτελεί τη γενεσιουργό αιτία της άντωσης ενός σώματος. Η άντωση προκαλείται ως αποτέλεσμα των διαφορετικών πιέσεων που ασκούνται στην επιφάνειά του.

Η ανωτέρω σχέση (3.59) εκφράζει το *θεώρημα Kutta - Joukowski*. Η γενική διατύπωση του θεωρήματος αυτού έχει ως εξής:

Θεωρούμε μη συνεκτική και ασυμπίεστη ροή με ελεύθερη ταχύτητα  $\vec{V}_\infty$ . Η δύναμη  $\vec{F}$  που εξασκείται πάνω σε σώμα οποιασδήποτε διατομής, γύρω από το περίγραμμα του οποίου έχει αναπτυχθεί κυκλοφορία  $\Gamma$ , δίνεται ανά μονάδα εκπετάσματος από τη σχέση:

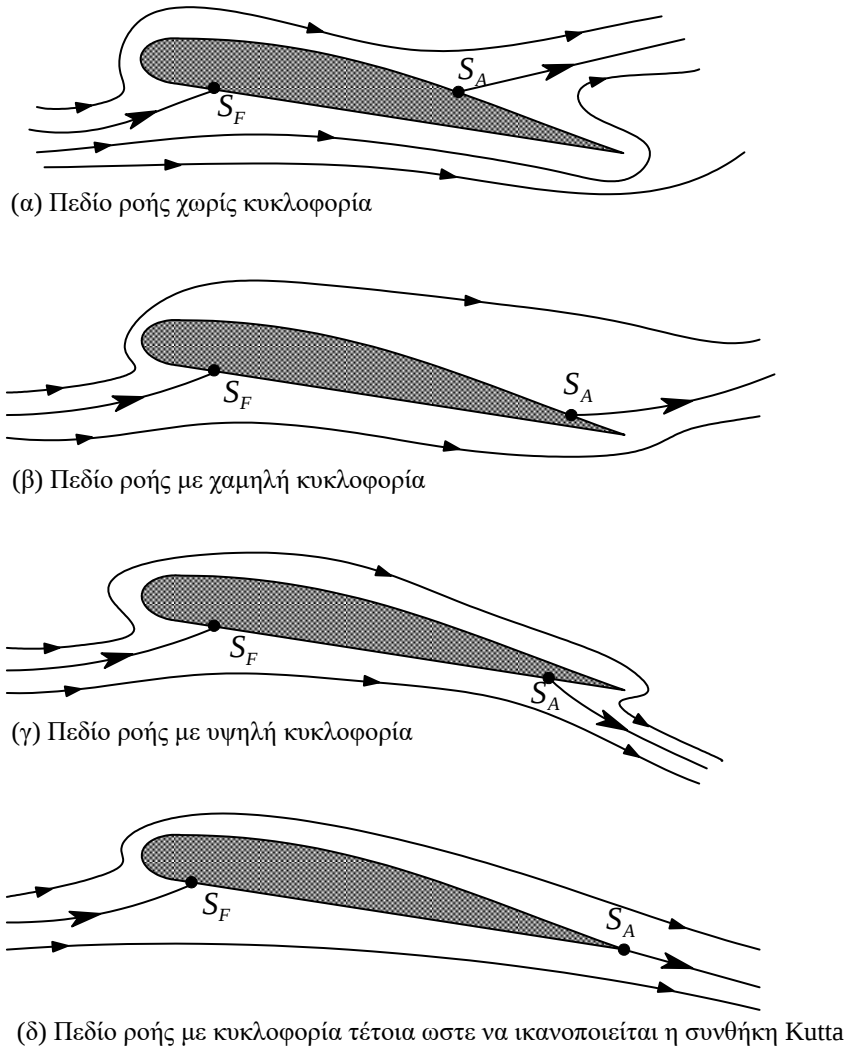
$$\vec{F} = \rho \vec{V}_{\infty} \times \vec{\Gamma} \quad (3.60)$$

Το διάνυσμα  $\vec{\Gamma}$  ορίζεται βάσει του "κανόνα του δεξιού χεριού". Παρατηρούμε ότι η δύναμη είναι κάθετη στην ταχύτητα το οποίο σημαίνει ότι δεν αναπτύσσεται δύναμη αντίστασης. Το μειονέκτημα αυτό της θεωρίας οφείλεται στην αγνόηση της συνεκτικότητας της ροής.

Το θεώρημα Kutta – Joukowski αποδεικνύεται πολύ σημαντικό για τον υπολογισμό της άντωσης αεροδυναμικών σωμάτων, όπως αεροτομές και πτέρυγες. Μια αεροτομή μπορεί να αντικατασταθεί απλουστευτικά από έναν *προσδεμένο* σε αυτή στρόβιλο κυκλοφορίας  $\Gamma$ , ίσης με την κυκλοφορία που αναπτύσσεται γύρω από την αεροτομή. Η δύναμη που ασκείται στον *προσδεμένο* στρόβιλο υπολογίζεται από το θεώρημα Kutta – Joukowski.

### 3.8 Η Συνθήκη Kutta

Στην περίπτωση ροής γύρω από αεροτομή το ροϊκό πεδίο μπορεί θεωρητικά να έχει οποιαδήποτε από τις μορφές του Σχήματος 3.19, χωρίς τα σημεία ανακοπής της ροής (μηδενικής ταχύτητας)  $S_F, S_A$  να ορίζονται μονοσήμαντα. Δηλαδή για δεδομένες ροϊκές συνθήκες  $(V_{\infty}, \alpha)$  περισσότερες από μια μορφές του ροϊκού πεδίου είναι θεωρητικά πιθανές για τη συγκεκριμένη αεροτομή. Επίσης, η απεικονιζόμενη ροή στην περιοχή του χείλους εκφυγής για τις περιπτώσεις (α), (β), και (γ) προϋποθέτει πολύ μεγάλες ταχύτητες κατά τη ροή γύρω από αυτό, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει στην πραγματικότητα λόγω της ύπαρξης των δυνάμεων συνεκτικότητας.

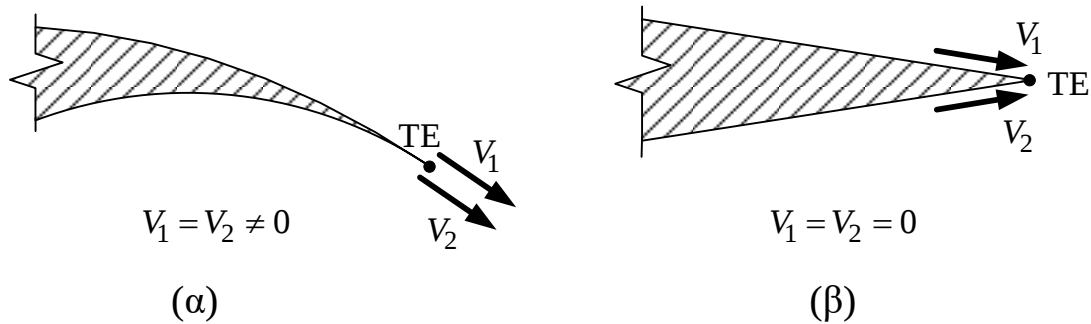


**Σχήμα 3.19:** Ροή γύρω από αεροτομή.

Αυτό που προσδιορίζει μονοσήμαντα το ροϊκό πεδίο και επομένως την κυκλοφορία  $\Gamma$  και άρα την άντωση  $L$  είναι η *συνθήκη Kutta*. Σύμφωνα με αυτή, οι ροές στην επάνω και στην κάτω πλευρά της αεροτομής συγκλίνουν ομαλά στο χείλος εκφυγής και οι ταχύτητες είναι πεπερασμένες. Κάτι τέτοιο συμβαίνει λόγω της συνεκτικότητας του ρευστού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.19(δ).

Για να εκφράσουμε την συνθήκη Kutta μέσω των ταχυτήτων της ροής, θα πρέπει να διακρίνουμε δύο τύπους γεωμετρίας στο χείλος εκφυγής. Στο Σχήμα 3.20(α), η μορφή του χείλους εκφυγής της αεροτομής είναι τέτοια έτσι ώστε η γωνία μεταξύ της πάνω και κάτω επιφάνειας να είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη Kutta επιβάλλει τα διανύσματα της ταχύτητας της ροής επάνω και κάτω από την αεροτομή στο χείλος εκφυγής να είναι ίσα. Στο Σχήμα 3.20(β), η γωνία μεταξύ της πάνω και κάτω επιφάνειας είναι μη μηδενική. Σε αυτή την περίπτωση, το πίσω σημείο

ανακοπής της ροής βρίσκεται στο χείλος εκφυγής (TE). Ειδικά, η ταχύτητα της ροής θα έπρεπε να έχει δύο διαφορετικές διευθύνσεις στο ίδιο σημείο.



**Σχήμα 3.20:** Ταχύτητες στο χείλος εκφυγής (TE) σύμφωνα με τη συνθήκη Kutta: (α) χείλος εκφυγής μηδενικού πάχους, (β) μη μηδενική γωνία μεταξύ πάνω και κάτω πλευράς "επιβάλλει" το χείλος εκφυγής να είναι σημείο ανακοπής.

Αν θεωρήσουμε ότι η αεροτομή μοντελοποιείται με μια γραμμή στροβιλότητας πάνω στη μέση γραμμή της, και η κατανομή της κυκλοφορίας ανά μονάδα μήκους κατά τη μέση γραμμή είναι  $\gamma(s)$ , τότε η μαθηματική έκφραση της συνθήκης Kutta είναι:

$$\gamma_{TE} = 0. \quad (3.61)$$

Η ανωτέρω έκφραση ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις γεωμετρίας στο χείλος εκφυγής που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

### 3.9 Επαγόμενη Ταχύτητα από Γενική Κατανομή Στροβιλότητας

Σε πολλές εφαρμογές τίθεται το ζήτημα του υπολογισμού της ταχύτητας που επάγεται από μια γενική κατανομή στροβιλότητας στο χώρο. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$  ως προς την ταχύτητα  $\vec{V}$ . Παρακάτω παρουσιάζεται η διαδικασία εύρεσης της ταχύτητας για ένα ασυμπίεστο πεδίο ροής.

Αρχικά, η ταχύτητα ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας, που για ασυμπίεστο πεδίο ροής έχει την παρακάτω μορφή:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.62)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε πως η ταχύτητα εκφράζεται ως συνάρτηση ενός διανυσματικού πεδίου  $\vec{K}$  ως εξής:

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{K} \quad (3.63)$$

Η (3.63) επιλέχθηκε να έχει αυτή την μορφή, διότι ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας, αφού σύμφωνα με το διανυσματικό λογισμό ισχύει ότι  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{K}) = 0$ , για κάθε διανυσματικό πεδίο  $\vec{K}$ .

Η στροβιλότητα του ροϊκού πεδίου εκφράζεται ως:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\nabla \times \vec{K})$$

Εφαρμόζοντας ιδιότητες του διανυσματικού λογισμού, η ανωτέρω έκφραση γίνεται:

$$\vec{\omega} = \nabla (\nabla \cdot \vec{K}) - \nabla^2 \vec{K} \quad (3.64)$$

Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών επιλέγεται το διανυσματικό πεδίο  $\vec{K}$  να έχει την ιδιότητα  $\nabla \cdot \vec{K} = 0$ . Έτσι η (3.64) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{K} = -\vec{\omega} \quad (3.65)$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση Poisson ως προς το διανυσματικό πεδίο  $\vec{K}$ . Η εξίσωση αυτή επιλύεται με χρήση του θεωρήματος του Green (βλ. K. Karamcheti, σελ. 533) και η λύση της είναι:

$$\vec{K}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{r}|} d\Omega \quad (3.66)$$

όπου  $d\Omega$  ένα διαφορικό στοιχείο όγκου του χώρου  $\Omega$  και  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ .

Για την εύρεση της ταχύτητας, αντικαθιστούμε την εξίσωση (3.66) στην (3.63) και προκύπτει ότι:

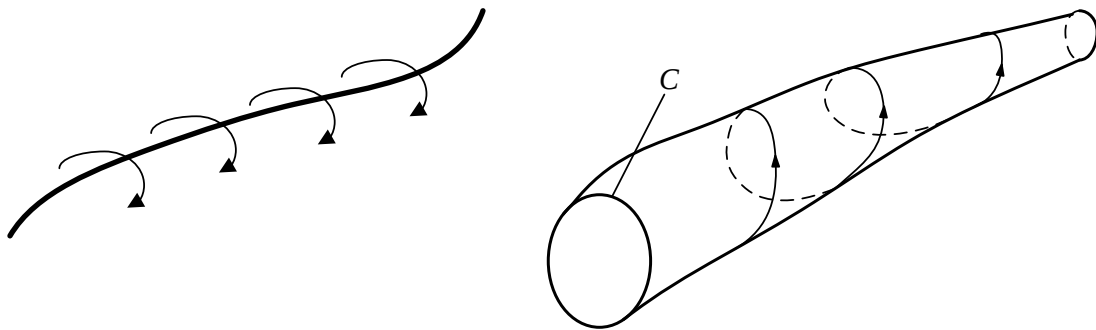
$$\vec{V} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{r}|} d\Omega \quad (3.67)$$

Από την εξίσωση (3.67) υπολογίζεται η ταχύτητα που επάγεται από οποιαδήποτε κατανομή στροβιλότητας  $\vec{\omega}$ , σε ασυμπίεστο πεδίο ροής. Μια εναλλακτική έκφραση της (3.67) προκύπτει εφαρμόζοντας ταυτότητες του διανυσματικού λογισμού:

$$\vec{V} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\nabla \times \vec{\omega}}{|\vec{r}|} d\Omega \quad (3.68)$$

### 3.10 Δινοσωλήνας στις τρεις διαστάσεις

Ο Δινοσωλήνας ("Vortex-tube") είναι μια ειδική κατανομή στροβιλότητας σε τρεις διαστάσεις. Σχηματίζεται από κατανομή γραμμών στροβιλότητας (Σχήμα 3.21) οι οποίες σχηματίζουν μια σωληνοειδή επιφάνεια την οποία δεν "διαπερνούν". Το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι παράλληλο στην επιφάνεια του δινοσωλήνα, δηλαδή ισχύει ότι  $\vec{\omega} \cdot \hat{n} = 0$ , όπου  $\hat{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια αυτή. Παράδειγμα δινοσωλήνα είναι ο κυκλώνας.



Σχήμα 3.21: Γραμμή στροβιλότητας και δινοσωλήνας.

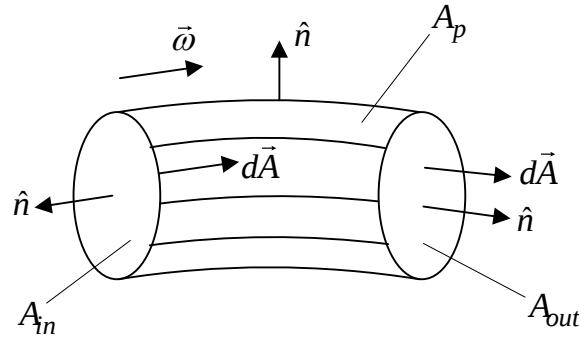
#### 3.10.1 Θεωρήματα Helmholtz

Ως ένταση του δινοσωλήνα ορίζουμε την τιμή της κυκλοφορίας ( $\Gamma$ ) πάνω σε κλειστή επιφανειακή καμπύλη  $C$  όπως αυτή του Σχήματος 3.21.

Το θεώρημα Stokes  $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_A (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$ , η ισοδύναμη μορφή του οποίου δίνεται στην σχέση (3.5), αποδεικνύει πως η ροή στροβιλότητας  $\vec{\omega}$  που «διαρρέει» μια επιφάνεια είναι ποσοτικά ίση με την κυκλοφορία  $\Gamma$  κατά μήκος της καμπύλης που περικλείει την επιφάνεια αυτή. Για έναν δινοσωλήνα ισχύουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Η ένταση του δινοσωλήνα είναι σταθερή κατά το μήκος του.
2. Ο δινοσωλήνας δεν μπορεί να τερματίζει στο εσωτερικό του πεδίου ροής, είτε εκτείνεται έως τα σύνορα, είτε σχηματίζει κλειστή καμπύλη ("Vortex-ring").

Οι ανωτέρω προτάσεις ονομάζονται *θεωρήματα Helmholtz* και ισχύουν για μη συνεκτική και ασυμπίεστη ροή.



**Σχήμα 3.22:** Στοιχειώδης όγκος δινοσωλήνα που περικλείεται από την επιφάνεια εισόδου ( $A_{in}$ ), την επιφάνεια εξόδου ( $A_{out}$ ) και την παράπλευρη επιφάνεια ( $A_p$ ).

Για την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος Helmholtz θεωρούμε έναν στοιχειώδη όγκο  $d\Omega$  του δινοσωλήνα, ο οποίος φαίνεται στο Σχήμα 3.22. Ο στοιχειώδης όγκος περικλείεται από συνολική επιφάνεια  $A$ , η οποία συντίθεται από την επιφάνεια εισόδου ( $A_{in}$ ), την επιφάνεια εξόδου ( $A_{out}$ ) και την παράπλευρη επιφάνεια ( $A_p$ ). Το διάνυσμα  $\hat{n}$  είναι κάθετο στις συνοριακές επιφάνειες του όγκου και δείχνει προς τα «έξω», ενώ το διάνυσμα  $d\vec{A}$  είναι παράλληλο στην στροβιλικότητα  $\vec{\omega}$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss για τον στοιχειώδη όγκο  $d\Omega$  προκύπτει ότι:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\omega} d\Omega = \int_A \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA \quad (3.69)$$

Ωστόσο για το πεδίο της στροβιλικότητας ισχύει σύμφωνα με το διανυσματικό λογισμό ότι  $\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$ . Επομένως η (3.69) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_A \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA &= 0 \Rightarrow \\ \int_{A_{in}} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_{out}} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_p} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA &= 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Όμως η στροβιλικότητα είναι παράλληλη στην παράπλευρη επιφάνεια του δινοσωλήνα ( $A_p$ ) και επομένως  $\int_{A_p} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA = 0$ . Άρα η (3.70) γίνεται:

$$\int_{A_{in}} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_{out}} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA = 0$$

και εισάγοντας το διάνυσμα  $d\vec{A}$  στα ολοκληρώματα προκύπτει:

$$- \int_{A_{in}} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{out}} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{A_{in}} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{out}} \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$$

Επειδή  $\Gamma = - \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$  προκύπτει ότι η ένταση του δινοσωλήνα ( $\Gamma$ ) είναι ίδια στις επιφάνειες  $A_{in}$  και  $A_{out}$ , και άρα μένει σταθερή κατά μήκος του δινοσωλήνα, το οποίο αποδεικνύει το πρώτο θεώρημα του Helmholtz. Το πρώτο θεώρημα του Helmholtz υποδεικνύει πως αν η στροβιλότητα αυξάνει κατά το μήκος του δινοσωλήνα, τότε μικραίνει η διατομή του, δηλαδή πυκνώνουν οι γραμμές στροβιλότητας.

Το δεύτερο θεώρημα Helmholtz προκύπτει άμεσα από το πρώτο, αφού αν ο δινοσωλήνας τερματίζει, τότε θα υπήρχε ξαφνικός μηδενισμός της στροβιλότητας, και επομένως δε θα παρέμενε σταθερή η ένταση του δινοσωλήνα κατά το μήκος του.

### 3.10.2 Επαγόμενες Ταχύτητες από Δινοσωλήνα: Ο Νόμος Biot-Savart

Οι ταχύτητες που επάγει δινοσωλήνας υπολογίζονται με βάση την εξίσωση (3.68). Επειδή το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι παράλληλο στην εξωτερική επιφάνεια του δινοσωλήνα, ισχύει ότι  $\nabla \times \vec{\omega} = 0$ , και η εξίσωση (3.68) απλοποιείται ως εξής:

$$\vec{V} = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\Omega \quad (3.71)$$

όπου  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα θέσης σημείου P ως προς τμήμα  $d\Omega$  του πεδίου της στροβιλότητας. Η σχέση (3.71) είναι γνωστή ως νόμος *Biot-Savart* για δινοσωλήνα.

Οι βασικές παραδοχές του νόμου *Biot-Savart* είναι της μη συνεκτικής και ασυμπίεστης ροής χωρίς σύνορα, επομένως ο νόμος *Biot-Savart* δεν ισχύει για περιπτώσεις εσωτερικών ροών. Ο νόμος αυτός χρησιμοποιήθηκε αρχικά στον

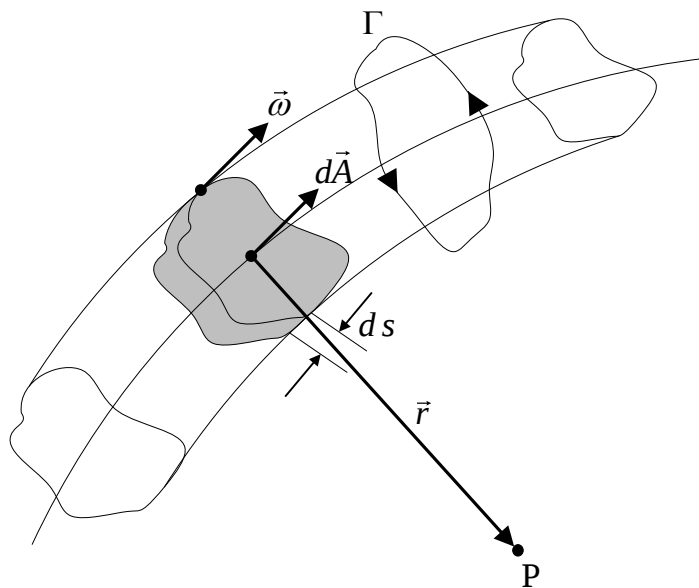
ηλεκτρομαγνητισμό, όπου συνδέει την ένταση του ρεύματος σε έναν αγωγό με την ένταση του μαγνητικού πεδίου που επάγει ο αγωγός αυτός του ρεύματος.

Ο νόμος Biot-Savart μπορεί να εκφραστεί σε εναλλακτική μορφή που να περιλαμβάνει την ένταση του δινοσωλήνα ( $\Gamma$ ). Στο Σχήμα 3.23 φαίνεται τμήμα του δινοσωλήνα με επιφάνεια διατομής  $dA$  και μήκος  $ds$ . Το διαφορικό στοιχείο όγκου του δινοσωλήνα μπορεί να γραφεί σαν  $d\Omega = dA \cdot ds$ . Τότε, με βάση τον νόμο Biot-Savart, η ταχύτητα που επάγει σε ένα τυχαίο σημείο P το στοιχείο όγκου  $d\Omega$  είναι:

$$d\vec{V} = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\Omega \Rightarrow d\vec{V} = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} (dA \cdot ds) \quad (3.72)$$

Το διάνυσμα της στροβιλότητας ( $\vec{\omega}$ ) είναι παράλληλο στο  $d\vec{s}$ . Επομένως ισχύει ότι  $\vec{\omega} ds = \omega d\vec{s}$ . Άρα η εξίσωση (3.72) παίρνει τη μορφή:

$$d\vec{V} = - \frac{1}{4\pi} \cdot \omega \cdot dA \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.73)$$



**Σχήμα 3.23:** Δινοσωλήνας με επιφάνεια διατομής  $dA$  και σημείο P σε απόσταση r από τμήμα του με μήκος  $d\vec{s}$ .

Μπορούμε προσεγγιστικά να θεωρήσουμε ότι ο δινοσωλήνας έχει απειροστά μικρή επιφάνεια διατομής και να τον θεωρήσουμε γραμμή στροβιλότητας ("line

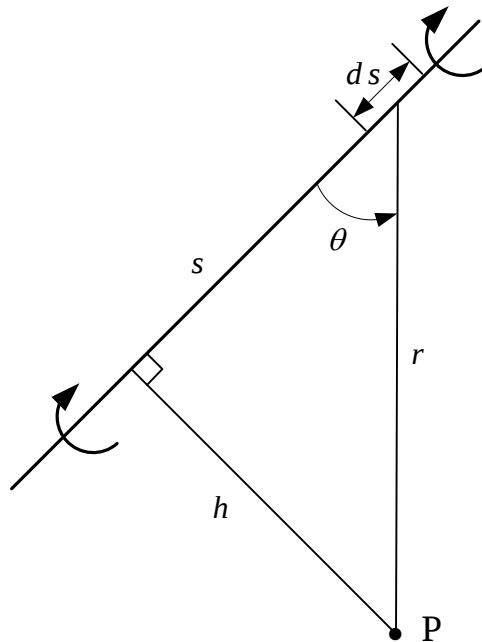
vortex"). Η κυκλοφορία ( $\Gamma$ ) είναι σταθερή κατά μήκος της γραμμής στροβιλότητας και ισούται με:

$$\Gamma = -\vec{\omega} \cdot d\vec{A} = -\omega dA \quad (3.74)$$

εφόσον τα  $\vec{\omega}$  και  $d\vec{A}$  είναι παράλληλα.

Αντικαθιστώντας την (3.74) στην (3.73) προκύπτει η ταχύτητα που επάγει το τμήμα  $d\vec{s}$  της γραμμής στροβιλότητας στο σημείο P που απέχει απόσταση  $r$  από το τμήμα αυτό:

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.75)$$



**Σχήμα 3.24:** Γεωμετρία υπολογισμού επαγόμενης ταχύτητας σε σημείο P από ευθύγραμμο δινοσωλήνα απείρου μήκους.

Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.75) για την ευθύγραμμη και άπειρου μήκους γραμμή στροβιλότητας του Σχήματος 3.24. Το στοιχειώδες τμήμα  $ds$  της γραμμής επάγει ταχύτητα  $dV$  στο σημείο P που δίνεται από τη σχέση:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} ds \quad (3.76)$$

Από τη γεωμετρία του Σχήματος 3.24 έχουμε:  $r = \frac{h}{\sin \theta}$  και

$s = \frac{h}{\tan \theta} \Rightarrow ds = -\frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta$ . Τελικά, αντικαθιστώντας στην (3.76) προκύπτει:

$$dV = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \sin \theta d\theta \Rightarrow V = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{\Gamma}{2\pi h}} \quad (3.77)$$

Ομοίως, για ημιάπειρο ευθύγραμμο δινοσωλήνα προκύπτει:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (3.78)$$

Η διεύθυνση του διανύσματος της επαγόμενης ταχύτητας είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο της γραμμής στροβιλότητας και του σημείου P με την φορά να προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

### 3.11 Παραδείγματα – Ασκήσεις

#### 3.11.1 Η Ροϊκή Συνάρτηση και το Δυναμικό Ταχύτητας

Θεωρούμε δισδιάστατη αστρόβιλη και ασυμπιεστή ροή με ροϊκή συνάρτηση  $\Psi = xy$ .

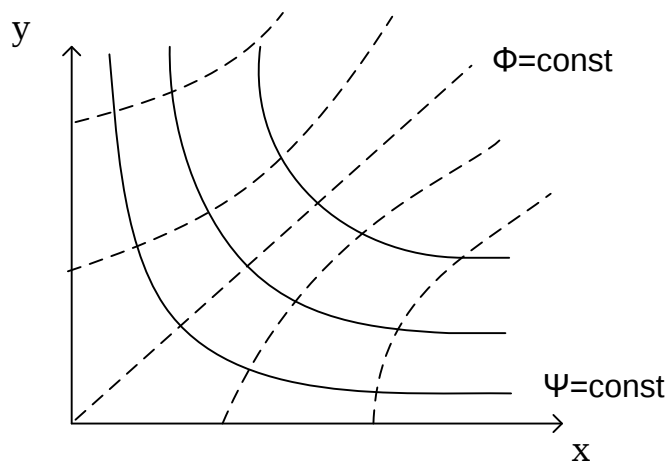
1. Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας  $V(x, y)$  και την ταχύτητα στα σημεία  $(1,1)$  και  $(2, 1/2)$  που ανήκουν στη γραμμή ροής  $\Psi = 1$ .
2. Σχεδιάστε σε σκαρίφημα ορισμένες γραμμές ροής για  $x, y > 0$  και αναφέρετε ποιο τύπο ροής περιγράφουν.
3. Υπολογίστε τη συνάρτηση δυναμικού  $\Phi$  και σχεδιάστε μερικές γραμμές σταθερού δυναμικού.

#### Λύση

1) Έχουμε  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x$ ,  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y$  άρα το διάνυσμα της ταχύτητας είναι

$$\vec{V}(x, y) = (x, -y) \text{ και } |V(1,1)| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, |V(2,1/2)| = \sqrt{4+1/4} = \sqrt{17}/2.$$

2)



Οι γραμμές ροής περιγράφουν ροή σε γωνία  $90^\circ$ .

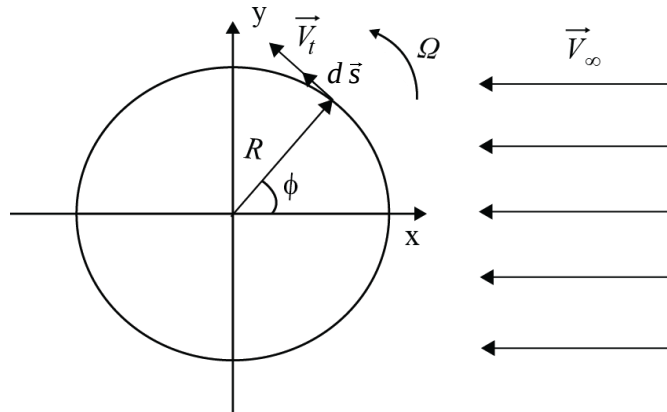
3) Έχουμε  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = x$  και  $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -y$ . Αναζητούμε συνάρτηση του τύπου

$$\Phi = \frac{1}{2}x^2 + f(y) + C \text{ και } \Phi = -\frac{1}{2}y^2 + g(x) + C. \text{ Μια συνάρτηση } \Phi \text{ που ικανοποιεί}$$

και τις δυο αυτές συνθήκες είναι η  $\Phi = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C$  όπου  $C$  μια σταθερά.

### 3.11.2 Δύναμη που ασκείται από ρευστό σε περιστρεφόμενο δίσκο

Να υπολογιστεί η δύναμη η οποία εξασκείται σε δίσκο ακτίνας  $R$  (βλ. Σχήμα) ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  και βρίσκεται εντός πεδίου ασυμπίεστης ροής σταθερής ταχύτητας  $V_\infty$ .



### Λύση

Με βάση το θεώρημα Kutta-Joukowski η δύναμη που ασκείται στο δίσκο δίνεται από τη σχέση (3.60),  $\vec{F} = \rho \vec{V}_\infty \times \vec{\Gamma}$ .

Η διεύθυνση με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού θα είναι παράλληλη στον άξονα  $y$  και προς τα κάτω. Το μέτρο της θα είναι  $F = \rho V_\infty \Gamma$ , όπου  $\Gamma$  η κυκλοφορία στο δίσκο που δίνεται από τη σχέση (3.4)

$$\Gamma = - \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = - \oint_C (\vec{V}_t + \vec{V}_\infty) \cdot d\vec{s},$$

όπου  $\vec{V}_t$  η ταχύτητα λόγω της περιστροφικής κίνησης του δίσκου που έχει την ίδια κατεύθυνση με το  $d\vec{s}$  και μέτρο  $\Omega R$ , ενώ η ομοιόμορφη ροή έχει παράλληλη συνιστώσα στο  $d\vec{s}$  ίση με  $V_\infty \sin \phi$ .

Δεδομένου ότι  $d\vec{s} = R d\vec{\phi}$

$$\begin{aligned} \Gamma &= - \oint_C (\vec{V}_t + \vec{V}_\infty) \cdot d\vec{s} = - \oint_C \vec{V}_t \cdot d\vec{s} - \oint_C \vec{V}_\infty \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_0^{2\pi} \Omega R^2 d\phi - \int_0^{2\pi} V_\infty \sin \phi \cdot R \cdot d\phi = -2\pi \Omega R^2. \end{aligned}$$

Και τελικά,

$$F = -\rho V_\infty 2\pi \Omega R^2.$$

Το αρνητικό πρόσημο, που προέκυψε στο αποτέλεσμα λόγω του ορισμού της κυκλοφορίας (σχέση (3.4)), σχετίζεται με το ότι η προς τα κάτω φορά της δύναμης  $F$  είναι αρνητική.

### 3.11.3 Συντελεστής άντωσης αεροτομής

Αεροτομή μοντελοποιείται με την κατανομή κυκλοφορίας  $\gamma(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)$  όπου  $c$  η χορδή της αεροτομής. Να υπολογιστεί ο συντελεστής άντωσης  $C_\ell$ .

#### Λύση

Η ολική κυκλοφορία  $\Gamma$  που επάγει η αεροτομή είναι:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx = A \int_0^c \sin\left(\frac{\pi x}{c}\right) dx = A \left[ -\frac{c}{\pi} \cos\frac{\pi x}{c} \right]_0^c \Rightarrow$$

$$\Gamma = \frac{2 A c}{\pi}.$$

Από το θεώρημα Kutta-Joukowski έχουμε:

$$L = \rho V_\infty \Gamma \Rightarrow$$

$$L = \rho V_\infty \frac{2 A c}{\pi}.$$

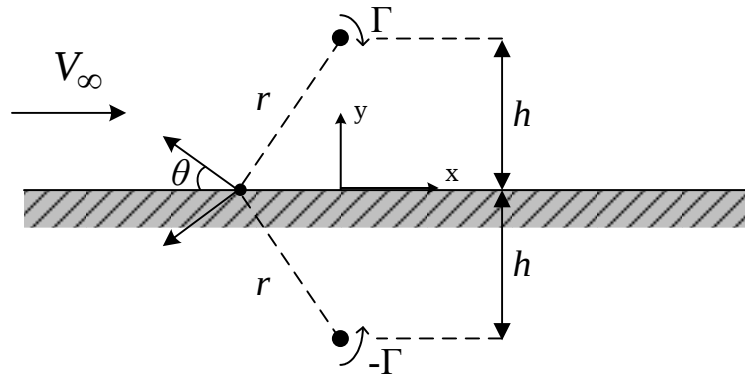
Ο συντελεστής άντωσης της αεροτομής είναι

$$C_\ell = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} \Rightarrow C_\ell = \frac{\rho V_\infty \frac{2 A c}{\pi}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} \Rightarrow \boxed{C_\ell = \frac{4 A}{\pi V_\infty}}$$

### 3.11.4 Αλληλεπίδραση ροής γύρω από αεροτομή με το έδαφος

Αεροτομή βρίσκεται σε ελεύθερη ροή  $V_\infty$  και σε απόσταση  $h$  από το έδαφος. Η αεροτομή μπορεί να μοντελοποιηθεί από στρόβιλο έντασης  $\Gamma$ . Να βρεθεί η κατανομή ταχύτητας και πίεσης που επάγει η αεροτομή στο έδαφος.

#### Λύση



Χρησιμοποιούμε στρόβιλο έντασης  $-\Gamma$  σε απόσταση  $-h$  από το έδαφος για να αναπαραστήσουμε την επίδραση του εδάφους στην αεροτομή ώστε η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στο έδαφος να είναι μηδενική.

Η ταχύτητα στο έδαφος προκύπτει με επαλληλία της  $V_\infty$  με τις ταχύτητες που επάγουν οι δυο στρόβιλοι στο έδαφος:

$$V_{gr} = V_\infty - 2 \cdot \frac{\Gamma}{2\pi r} \cdot \cos(\theta)$$

Θέτοντας  $r = \sqrt{x^2 + h^2}$  και  $\cos(\theta) = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}$  προκύπτει ότι:

$$\boxed{V_{gr} = V_\infty - \frac{\Gamma h}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + h^2}} \quad (I)$$

Για την πίεση στο έδαφος χρησιμοποιούμε το θεώρημα Bernoulli:

$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 = P_{gr} + \frac{1}{2} \rho V_{gr}^2 \Rightarrow P_{gr} - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho (V_{\infty}^2 - V_{gr}^2)$$

και αντικαθιστώντας την ταχύτητα στο έδαφος ( $V_{gr}$ ) από τη σχέση (I) προκύπτει ότι:

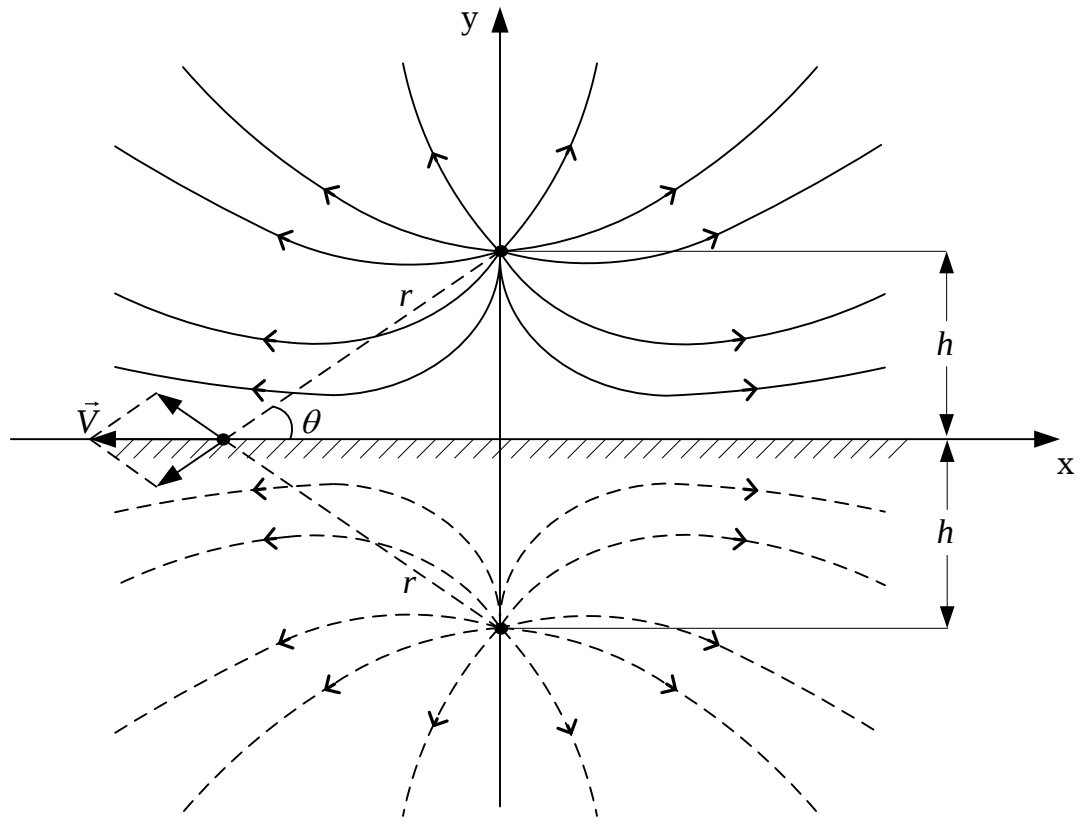
$$P_{gr} - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho \left( V_{\infty}^2 - V_{\infty}^2 - \left( \frac{\Gamma h}{\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} \right)^2 + 2V_{\infty} \frac{\Gamma h}{\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} \right) \Rightarrow$$

$$P_{gr} - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho \left[ 2V_{\infty} \frac{\Gamma h}{\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} - \left( \frac{\Gamma h}{\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{gr} - P_{\infty} = \frac{\rho \Gamma h}{\pi (x^2 + h^2)} \left( V_{\infty} - \frac{\Gamma h}{2\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} \right)}$$

### 3.11.5 Αλληλεπίδραση πηγής με το έδαφος

Έστω πηγή έντασης  $\Lambda$ , η οποία βρίσκεται σε απόσταση  $h$  πάνω από το έδαφος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η αλληλεπίδραση της πηγής με το έδαφος μοντελοποιείται με τη μέθοδο των ειδώλων, τοποθετώντας μια δεύτερη πηγή-είδωλο με ίδια ένταση  $\Lambda$ , σε απόσταση  $h$  κάτω από το έδαφος. Να υπολογιστεί η κατανομή της ταχύτητας επάνω στο έδαφος καθώς και η μέγιστη τιμή της.



#### Λύση

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το διάνυσμα της ταχύτητας σε μια τυχαία θέση του εδάφους ( $x$ ) είναι εφαπτόμενο στο έδαφος, διότι οι κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων των δύο πηγών αλληλοαναιρούνται. Παρατηρείται ότι οι γραμμές ροής του πεδίου δεν είναι ακτινικές, αλλά καμπυλώνονται κοντά στο έδαφος.

Η ταχύτητα της ροής σε μια τυχαία θέση ( $x$ ) του εδάφους είναι:

$$V = 2 \cdot \frac{\Lambda}{2\pi r} \cdot \cos \theta$$

όπου  $\theta$  η γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητες των πηγών με το έδαφος.

Αντικαθιστώντας  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  και  $r = \sqrt{x^2 + h^2}$  προκύπτει:

$$V = \frac{\Lambda x}{\pi(x^2 + h^2)} \quad (I)$$

Παρατηρείται ότι για  $x=0$  είναι  $V=0$ , οπότε το  $x=0$  είναι σημείο ανακοπής της ροής. Επίσης για  $x \rightarrow \infty$  η ταχύτητα τείνει στο 0 ( $V \rightarrow 0$ ). Ενδιάμεσα, η ταχύτητα παρουσιάζει μέγιστο σε κάποια θέση. Για την εύρεση του μεγίστου παραγωγίζουμε αρχικά την έκφραση της ταχύτητας (I):

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\Lambda \pi \cdot (x^2 + h^2) - \Lambda x \cdot 2\pi x}{[\pi(x^2 + h^2)]^2} = \frac{\Lambda \pi \cdot (h^2 - x^2)}{[\pi(x^2 + h^2)]^2}$$

Η θέση του μεγίστου ( $x|_{V_{\max}}$ ) υπολογίζεται θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν:

$$\frac{\Lambda \pi \cdot (h^2 - x^2)}{[\pi(x^2 + h^2)]^2} = 0 \Rightarrow x|_{V_{\max}} = h \quad \text{ή} \quad x|_{V_{\max}} = -h$$

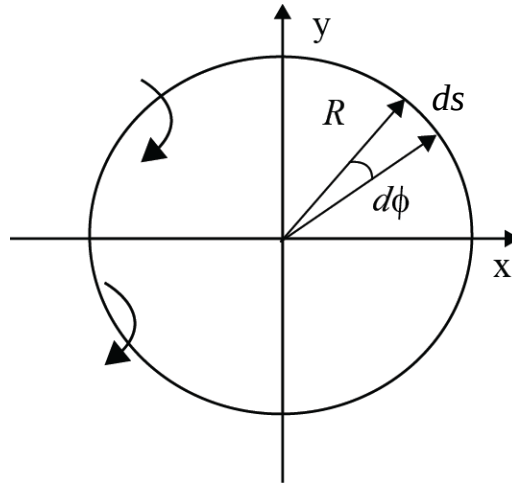
Αντικαθιστώντας  $x = \pm h$  στην εξίσωση (I) προκύπτει η μέγιστη τιμή της ταχύτητας:

$$V_{\max} = \frac{\Lambda}{2\pi h}$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η ροή αυτού του παραδείγματος, σε συνδυασμό με μια ελεύθερη ροή  $V_{\infty}$ , μπορούν να μοντελοποιήσουν την αρχή λειτουργίας ενός οχήματος τύπου “hovercraft”, το οποίο είναι ειδικός τύπος πλοίου που κινείται πάνω σε στρώμα αέρα. Το όχημα αυτό εκτοξεύει ένα τζετ αέρα προς τα κάτω, το οποίο αλληλεπιδρά με την επιφάνεια του νερού, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας περιοχής υψηλής πίεσης κάτω από το όχημα. Πάνω από το όχημα επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση. Η διαφορά πίεσης οδηγεί στη δημιουργία αντωτικής δύναμης, η οποία επιτρέπει στο όχημα να κινείται λίγο πάνω από την επιφάνεια του νερού. Το γεγονός ότι τα “hovercrafts” κινούνται πάνω από το νερό είναι ο λόγος για τον οποίο δέχονται μικρότερη δύναμη αντίστασης, σε σχέση με άλλα πλοία.

### 3.11.6 Επαγόμενη ταχύτητα από κυκλικό δινοσωλήνα

Εφαρμόστε το νόμο Biot-Savart για την εύρεση της ταχύτητας που επάγει κυκλικός δινοσωλήνας ακτίνας  $R$  και έντασης  $\Gamma$  στο κέντρο του.



#### Λύση

Η ταχύτητα που επάγει στοιχειώδες τμήμα  $d\vec{s}$  του δινοσωλήνα στο κέντρο με βάση

τη σχέση (3.75) είναι  $d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{R^3}$ .

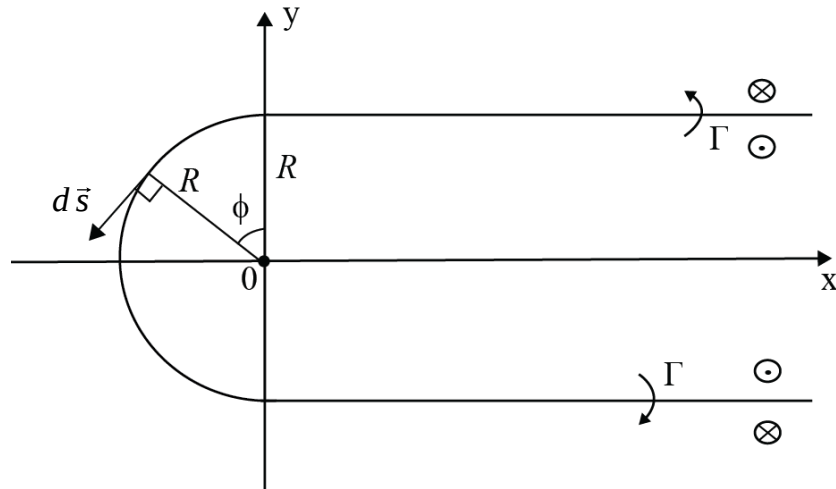
Για το κέντρο του κύκλου ισχύει  $|d\vec{s} \times \vec{r}| = R \cdot ds$ , όπου  $ds = R \cdot d\phi$  οπότε:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds}{R^2} \Rightarrow dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{R \cdot d\phi}{R^2} \Rightarrow dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\phi}{R} \Rightarrow V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{\Gamma}{2R}}$$

### 3.11.7 Επαγόμενη ταχύτητα από σύστημα στροβίλων

Να υπολογιστεί η επαγόμενη ταχύτητα  $V$  στο σημείο 0 (αρχή των αξόνων) που προκαλείται από το παρακάτω σύστημα στροβίλων και το οποίο αποτελείται από έναν ημικυκλικό δινωσολήνα και δύο ημιάπειρους ευθύγραμμους δινωσολήνες (βλ. Σχήμα) κυκλοφορίας  $\Gamma$ .



#### Λύση

Οι δύο ημιάπειροι ευθύγραμμοι δινωσολήνες επάγουν ταχύτητες στο σημείο 0 που δίνονται από τη σχέση. (3.78):

$$V_1 = V_2 = \frac{\Gamma}{4\pi R},$$

όπου  $V_1$  η ταχύτητα από τον άνω δινωσολήνα και  $V_2$  η ταχύτητα από τον κάτω δινωσολήνα.

Με βάση τη φορά της κυκλοφορίας τους που φαίνεται στο σχήμα οι δύο ταχύτητες  $V_1$  και  $V_2$  έχουν κοινή κατεύθυνση. Συνεπώς, η συνισταμένη τους είναι,

$$V_{hl} = V_1 + V_2 = \frac{\Gamma}{2\pi R}.$$

Το 0 είναι το κέντρο του ημικυκλικού δινωσολήνα, άρα ομοίως με το παράδειγμα 3.5 έχουμε,

$$V_{hc} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^\pi d\phi = \frac{\Gamma}{4R}.$$

Η ταχύτητα  $V_{hc}$  έχει την ίδια διεύθυνση με την  $V_{hl}$  και άρα η συνολική ταχύτητα

στο σημείο 0 είναι ίση με 
$$V = V_{hc} + V_{hl} = \frac{\Gamma}{2\pi R} + \frac{\Gamma}{4R} = \frac{\Gamma}{2R} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

## Βιβλιογραφία

1. J. D. Anderson, *"Fundamentals of Aerodynamics"*, Mc Graw Hill, New York, 2001.
2. A. M. Kuethe, and C. Y. Chow, *"Foundations of Aerodynamics"*, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, 1987.
3. K. Karamcheti, *"Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics"*, John Wiley & Sons, 1966.
4. J. Katz, A. Plotkin, *"Low-Speed Aerodynamics"*, 2<sup>nd</sup> edition, Cambridge University Press, 2001.
5. J.-Z. Wu, H.-Y. Ma, M.-D. Zhou, *"Vorticity and Vortex Dynamics"*, Springer , Berlin, 2006