
4

Μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Κανονικών Διαφορικών Εξισώσεων

Περιεχόμενα

4	Μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Κανονικών Διαφορικών Εξισώσεων ..	82
4.1	Οι γραμμικές μέθοδοι πολλαπλών βημάτων ("Linear Multi-step").....	84
4.1.1	Κατασκευή μεθόδου τάξης ακρίβειας P	87
4.1.2	Τοπικό και Ολικό Σφάλμα Αποκοπής	91
4.2	Οι μέθοδοι Runge-Kutta.....	93
	Βιβλιογραφία	96

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή ή η μετάφραση όλου ή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου και με οποιοδήποτε τρόπο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

Η αριθμητική επίλυση των χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων καταλήγει σε μια κανονική διαφορική εξίσωση μετά την διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων. Για παράδειγμα, η κυματική εξίσωση μετά την χωρική της διακριτοποίηση με πίσω-διαφορίση καταλήγει στην ακόλουθη κανονική διαφορική εξίσωση :

$$\frac{du}{dt} = -c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται ημι-διακριτή (“semi-discrete”) εξίσωση.

Η γενική μορφή μιας κανονικής διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$u_t = f(u, t)$$

όπου ο χρόνος (t) είναι η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι κύριες κατηγορίες τέτοιων εξισώσεων είναι :

- i. γραμμικές , εάν η συνάρτηση $f(u, t) = f_1(t)u + f_2(t)$
- ii. αυτόνομες , εάν $f = f(u)$
- iii. ολοκληρωτικές , εάν $f = f(t)$

Επίσης, διακρίνονται σε πρωτοβάθμιες όταν περιέχουν μόνο πρώτης τάξης χρονική παράγωγο, δευτεροβάθμιες, κ.ο.κ .

Η επίλυση τους είναι πρόβλημα αρχικών τιμών, εφόσον απαιτείται η λύση στην αρχή του χρόνου ($t = 0$).

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες μεθόδων για την επίλυση μιας κανονικής διαφορικής εξίσωσης. Οι κυριότερες είναι :

- i. οι γραμμικές πολλαπλών βημάτων ("linear multi-step")
- ii. οι μέθοδοι *Runge - Kutta*

4.1 Οι γραμμικές μέθοδοι πολλαπλών βημάτων ("Linear Multi-step")

Θεωρούμε την γενική μορφή της κανονικής διαφορικής εξίσωσης $u_t = f(u, t)$.

Στον διακριτό χρόνο η εξίσωση γράφεται ως :

$$u_t|_n = f(u^n, t^n) \equiv f^n \quad (4.1)$$

όπου ο δείκτης n δηλώνει τιμές της λύσης (u) και της συνάρτησης (f) στον χρόνο $t = n \Delta t$.

Παρατηρούμε ότι η τιμή της συνάρτησης f^n δίνει την κλίση της μεταβολής της λύσης (u) στον χρόνο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1(α).

Μια προσέγγιση της λύσης u^{n+1} είναι :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot u_t|_n = u^n + \Delta t \cdot f^n \quad (4.2)$$

Είναι στην ουσία, η *εμπρός διαφορίση* της χρονικής παραγώγου (u_t) . Η μέθοδος αυτή ονομάζεται μέθοδος *Euler* και απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1(α).

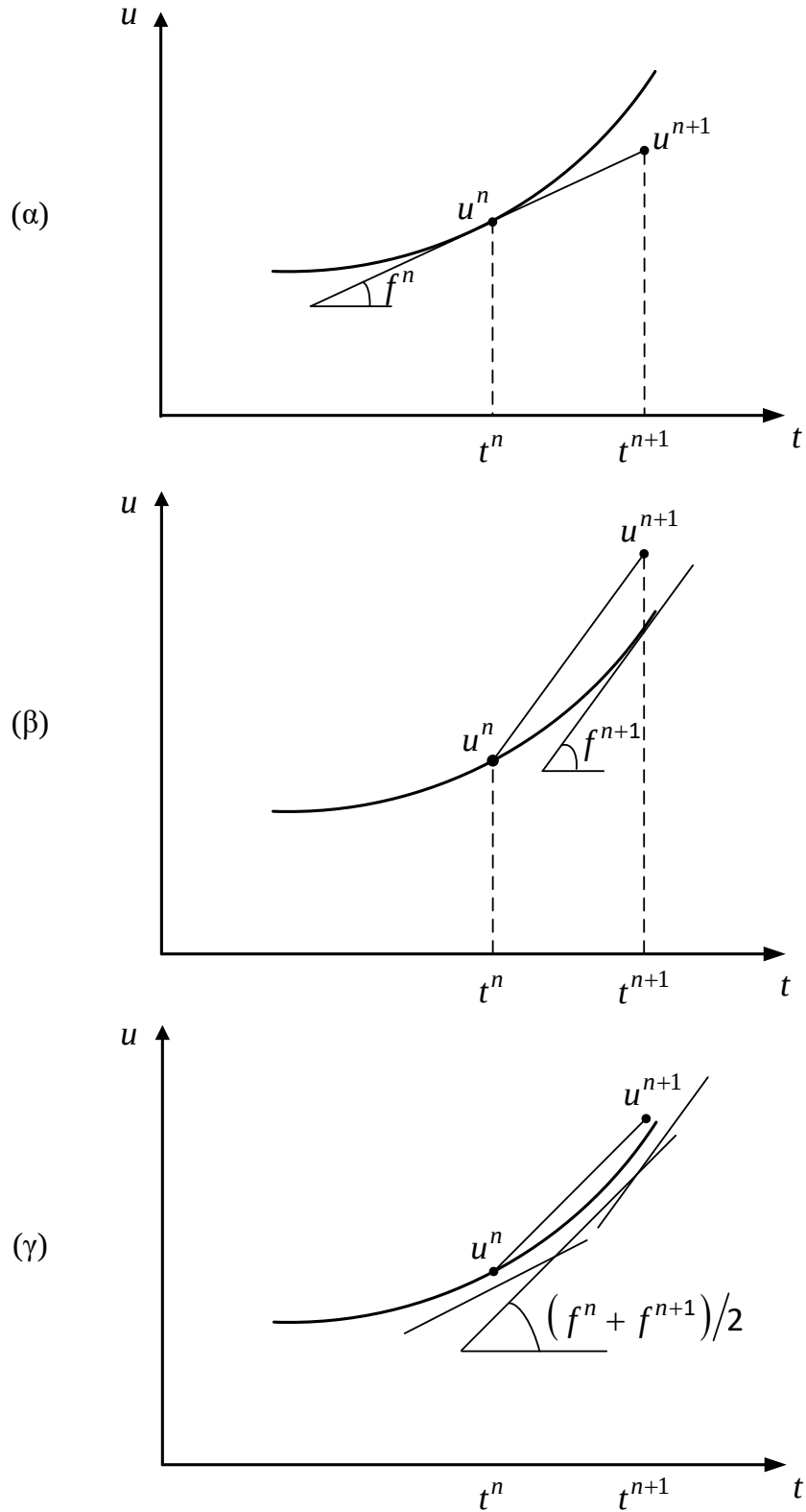
Μια άλλη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιηθεί η κλίση στην χρονική στιγμή $(n+1)$ ως εξής:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f^{n+1} \quad (4.3)$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται «προς τα πίσω μέθοδος *Euler*» ("*backward Euler*") και απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1(β).

Η μέθοδος του *τραπεζίου*, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1(γ), χρησιμοποιεί την μέση κλίση της καμπύλης της λύσης $u(t)$:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot \frac{f^n + f^{n+1}}{2} \quad (4.4)$$



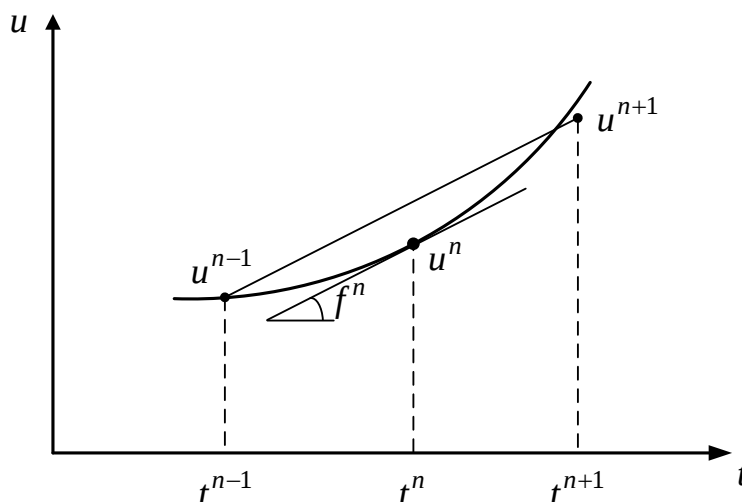
Σχήμα 4.1 Μέθοδοι ενός βήματος: προσέγγιση της λύσης στην χρονική στιγμή $(n+1)$ χρησιμοποιώντας (α) την κλίση της λύσης $u_t = f^n$, (β) την κλίση της λύσης $u_t = f^{n+1}$, (γ) την μέση κλίση.

Οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν παραπάνω προσδιορίζουν την λύση στη χρονική στιγμή $(n+1)$ χρησιμοποιώντας την λύση μόνο σε μία προηγούμενη χρονική στιγμή (n) , γι' αυτό ονομάζονται μέθοδοι ενός βήματος ("one-step").

Εναλλακτικά, μπορούν να κατασκευαστούν και μέθοδοι δύο βημάτων ("two-step"), οι οποίες χρησιμοποιούν την λύση σε δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές (n) και $(n-1)$. Ένα παράδειγμα είναι η μέθοδος ενδιάμεσου σημείου ("midpoint"):

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2\Delta t \cdot f^n \quad (4.5)$$

Η μέθοδος αυτή είναι στην ουσία, η κεντρική διαφύριση της χρονικής παραγώγου ($u_t \equiv f^n$) και απεικονίζεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 Μέθοδος ενδιάμεσου σημείου: προσέγγιση της λύσης στην χρονική στιγμή $(n+1)$ χρησιμοποιώντας την τιμή της λύσης στη χρονική στιγμή $(n-1)$ και την κλίση της στη χρονική στιγμή (n) .

Όσο αυξάνει ο αριθμός των προηγούμενων χρονικών στιγμών της λύσης που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της u^{n+1} , τόσο αυξάνει και η ακρίβεια στον χρόνο. Οι επόμενες δύο μέθοδοι παρατίθενται ως παραδείγματα «πολυβηματικών» μεθόδων.

Η πρώτη ονομάζεται *Adams-Bashforth* και είναι η εξής :

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{24} (55 f^n - 59 f^{n-1} + 37 f^{n-2} - 9 f^{n-3}) \quad (4.6)$$

Η ανωτέρω χρησιμοποιεί τέσσερα βήματα και έχει σφάλμα $O(\Delta t)^5$.

Η δεύτερη ονομάζεται *Adams-Moulton*, η οποία χρησιμοποιεί τρία βήματα, και έχει επίσης σφάλμα τάξης $O(\Delta t)^5$:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{24} (9 f^{n+1} + 19 f^n - 5 f^{n-1} + f^{n-2}) \quad (4.7)$$

Η γενική μορφή μεθόδου με αριθμό βημάτων (S) είναι η εξής:

$$\sum_{j=0}^S a_j u^{n+1-j} = \Delta t \sum_{j=0}^S b_j f^{n+1-j} \quad (4.8)$$

όπου οι a_j , b_j είναι κατάλληλα υπολογισμένοι συντελεστές. Ο συντελεστής της u^{n+1} είναι πάντα μη μηδενικός ($a_0 \neq 0$) και συνήθως χρησιμοποιείται η τιμή $a_0 = 1$. Επίσης, είναι $a_S \neq 0$ ή $b_S \neq 0$. Έχουμε ρητό σχήμα όταν $b_0 = 0$, και άρρητο όταν $b_0 \neq 0$.

4.1.1 Κατασκευή μεθόδου τάξης ακρίβειας P

Η γενική εξίσωση της γραμμικής πολυβηματικής μεθόδου (4.8) αναδιατάσσεται στην παρακάτω μορφή:

$$\sum_{j=0}^S a_j u^{n+1-j} - \Delta t \sum_{j=0}^S b_j f^{n+1-j} = 0$$

Έστω $u(t_n)$ η αναλυτική λύση της κανονικής διαφορικής εξίσωσης και $u_t(t_n)$ η αναλυτική τιμή της παραγώγου της στο χρόνο $t_n = n \Delta t$. Αν στην ανωτέρω εξίσωση αντικατασταθούν οι προσεγγίσεις u^n και f^n από τις αναλυτικές τιμές $u(t_n)$ και

$u_t(t_n)$ αντίστοιχα, τότε προκύπτει μη-μηδενικό άθροισμα των όρων, το οποίο ορίζεται ως το *τοπικό σφάλμα αποκοπής* (“local truncation error”) της μεθόδου στο χρονικό βήμα n :

$$L_n = \sum_{j=0}^S a_j u(t_{n+1-j}) - \Delta t \sum_{j=0}^S b_j u_t(t_{n+1-j}) \quad (4.9)$$

Επισημαίνεται ότι το L_n είναι το σφάλμα αποκοπής ως προς την λύση και όχι ως προς την διαφορική εξίσωση.

Οι όροι της μορφής $u(t_{n+1-j})$ και $u_t(t_{n+1-j})$ αναπτύσσονται κατά Taylor γύρω από τη χρονική στιγμή t_n ως εξής:

$$u(t_{n+1-j}) = u(t_n) + (1-j)\Delta t \cdot u_t(t_n) + \frac{(1-j)^2 \Delta t^2}{2} \cdot u_{tt}(t_n) + \dots \quad (4.10)$$

$$u_t(t_{n+1-j}) = u_t(t_n) + (1-j)\Delta t \cdot u_{tt}(t_n) + \frac{(1-j)^2 \Delta t^2}{2} \cdot u_{ttt}(t_n) + \dots \quad (4.11)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.10) και (4.11) στην (4.9), προκύπτει η παρακάτω μορφή για το τοπικό σφάλμα αποκοπής:

$$L_n = c_0 \cdot u(t_n) + c_1 \Delta t \cdot u_t(t_n) + c_2 \Delta t^2 \cdot u_{tt}(t_n) + \dots \quad (4.12)$$

όπου c_m είναι συντελεστές που συσχετίζονται με τους a_j , b_j σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 + \dots + a_s \\ c_1 &= [a_0 - a_2 - 2a_3 - \dots - (s-1)a_s] - (b_0 + b_1 + \dots + b_s) \\ c_m &= \sum_{j=0}^S \frac{(1-j)^m}{m!} \cdot a_j - \sum_{j=0}^S \frac{(1-j)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot b_j, \quad m \geq 2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Η γραμμική πολυβηματική μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας P αν για τους συντελεστές c_m ισχύει:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_P = 0 \quad \text{και} \quad c_{P+1} \neq 0 \quad (4.14)$$

και το τοπικό σφάλμα αποκοπής (L_n) μεθόδου τάξης ακρίβειας P είναι:

$$L_n = c_{P+1} \Delta t^{P+1} \cdot \frac{d^{P+1}u}{dt^{P+1}}(t_n) + \dots \quad (4.15)$$

δηλαδή το L_n είναι τάξης $O(\Delta t^{P+1})$.

Επίσης, η μέθοδος είναι συνεπής εάν $P \geq 1$.

Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή μεθόδου συγκεκριμένης τάξης ακρίβειας P . Επιλέγεται ο αριθμός βημάτων (S) της μεθόδου και οι συντελεστές a_j και b_j της εξίσωσης (4.8) μπορούν να προσδιοριστούν επιλύοντας το σύστημα $c_0 = c_1 = \dots = c_P = 0$, το οποίο αποτελείται από $P+1$ εξισώσεις.

Μπορεί επίσης να βρεθεί η μέγιστη τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου με συγκεκριμένο πλήθος συντελεστών a_j και b_j . Έστω ότι το πλήθος των a_j και b_j είναι αθροιστικά ίσο με q . Αν το σύστημα $c_0 = c_1 = \dots = c_{q-1} = 0$, που αποτελείται από q εξισώσεις, έχει λύση ως προς τα a_j και b_j , τότε η μέγιστη τάξη ακρίβειας είναι $q-1$. Ειδικά, εξετάζεται το σύστημα $q-1$ εξισώσεων, $c_0 = c_1 = \dots = c_{q-2} = 0$, και αν έχει λύση, τότε η μέγιστη τάξη ακρίβειας είναι $q-2$. Η διαδικασία συνεχίζεται μειώνοντας τις εξισώσεις του συστήματος μέχρι να βρεθεί λύση για τα a_j και b_j και η αντίστοιχη τάξη ακρίβειας.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί πως εκτός από την ακρίβεια, ένας σημαντικός παράγοντας για την κατασκευή μιας γραμμικής πολυβηματικής μεθόδου είναι και η ευστάθεια. Η ευστάθεια και η ακρίβεια δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Σύμφωνα με το θεώρημα του Dahlquist, μια ευσταθής μέθοδος που χρησιμοποιεί S βήματα, μπορεί να έχει τάξη ακρίβειας το πολύ $S+2$.

Παράδειγμα 4.1 : Να δείξετε ότι η μέθοδος

$$u^{n+1} = -4u^n + 5u^{n-1} + \Delta t(4f^n + 2f^{n-1})$$

η οποία είναι ρητή μέθοδος 2 βημάτων, έχει τάξη ακρίβειας $P = 3$.

Λύση

Στην εξίσωση της μεθόδου συλλέγουμε τους όρους του u στο αριστερό μέλος και τους όρους του f στο δεξί και προκύπτει:

$$u^{n+1} + 4u^n - 5u^{n-1} = \Delta t(4f^n + 2f^{n-1}) \quad (\text{Π4.1.1})$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (Π4.1.1) με την γενική εξίσωση της γραμμικής πολυβηματικής μεθόδου (4.8), βλέπουμε ότι η μέθοδος είναι 2 βημάτων ($S = 2$) και ότι οι συντελεστές a_j και b_j έχουν τιμές:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = 4, a_2 = -5 \\ b_0 &= 0, b_1 = 4, b_2 = 2 \end{aligned} \quad (\text{Π4.1.2})$$

Η τιμή $b_0 = 0$ δείχνει ότι έχουμε ρητό σχήμα.

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής εκφράζεται στη μορφή της εξίσωσης (4.12). Για $S = 2$, οι σχέσεις (4.13) για τους συντελεστές c_m λαμβάνουν την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ c_1 &= a_0 - a_2 - b_0 - b_1 - b_2 \\ c_2 &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_2 - b_0 + b_2 \\ c_3 &= \frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{2}b_2 \\ c_4 &= \frac{1}{24}a_0 + \frac{1}{24}a_2 - \frac{1}{6}b_0 + \frac{1}{6}b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{Π4.1.3})$$

Αντικαθιστώντας στην (Π4.1.3) τις τιμές των a_j και b_j από την (Π4.1.2) προκύπτει ότι:

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad \text{και} \quad c_4 = \frac{1}{6} \neq 0$$

Επομένως η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας $P = 3$.

Σημειώνεται ότι οποιοσδήποτε άλλος συνδυασμός τιμών για τους συντελεστές a_j και b_j , με $b_0 = 0$, οδηγεί σε μη μηδενική τιμή για κάποιον από τους συντελεστές c_0, c_1, c_2, c_3 . Επομένως, η συγκεκριμένη μέθοδος είναι η πιο ακριβής ρητή γραμμική μέθοδος 2 βημάτων.

4.1.2 Τοπικό και Ολικό Σφάλμα Αποκοπής

Το σφάλμα αποκοπής για τις μεθόδους επίλυσης κανονικών διαφορικών εξισώσεων διακρίνεται σε *τοπικό* και *ολικό*.

Το *τοπικό σφάλμα αποκοπής* (“local truncation error”) δημιουργείται κατά την εκτέλεση της μεθόδου για ένα χρονικό βήμα. Ορίστηκε μέσω της εξίσωσης (4.9) και εκφράστηκε ως συνάρτηση των χρονικών παραγώγων της συνάρτησης u μέσω της εξίσωσης (4.12).

Το *ολικό σφάλμα αποκοπής* (“global truncation error”) είναι το άθροισμα των *τοπικών* σφαλμάτων (L_n) που «συσσωρεύονται» λόγω των υπολογισμών σε πολλά χρονικά βήματα. Για N χρονικά βήματα, που αντιστοιχούν σε χρόνο $T = N\Delta t$, το *ολικό σφάλμα αποκοπής* είναι:

$$G_N = \sum_{n=0}^{N-1} L_n \quad (4.16)$$

Για μέθοδο τάξης ακρίβειας P , η τάξη του *τοπικού σφάλματος αποκοπής* (L_n) είναι $O(\Delta t^{P+1})$. Η τάξη του *ολικού σφάλματος αποκοπής* προκύπτει από την εξίσωση (4.16), ως εξής:

$$G_N = \underbrace{O(\Delta t^{P+1}) + \dots + O(\Delta t^{P+1})}_{N \text{ φορές}} = N \cdot O(\Delta t^{P+1}) = \frac{T}{\Delta t} \cdot O(\Delta t^{P+1}) \Rightarrow$$

$$G_N = O(\Delta t^P)$$

Επομένως, για μέθοδο τάξης ακρίβειας P , το *ολικό σφάλμα αποκοπής* είναι τάξης $O(\Delta t^P)$.

Η συνθήκη συνέπειας της μεθόδου ορίζει πως η εκτιμώμενη τιμή της συνάρτησης (u^n) θα πρέπει να τείνει στην αναλυτική τιμή $(u(t_n))$ όσο το χρονικό βήμα τείνει στο μηδέν. Ισοδύναμα, για να ικανοποιείται η συνθήκη συνέπειας για την μέθοδο, θα πρέπει το *ολικό σφάλμα αποκοπής* να τείνει στο μηδέν όσο το χρονικό βήμα τείνει στο μηδέν:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} G_n = 0 \quad (4.17)$$

Δεδομένου ότι $G_N = O(\Delta t^P)$, για να ικανοποιείται η συνθήκη συνέπειας (4.17), θα πρέπει η τάξη ακρίβειας της μεθόδου να είναι τουλάχιστον ένα ($P \geq 1$).

4.2 Οι μέθοδοι Runge-Kutta

Οι μέθοδοι της προηγούμενης ενότητας χρησιμοποιούν πολλαπλές χρονικές στιγμές για να υπολογίσουν την u^{n+1} με αυξημένη ακρίβεια. Προκειμένου να «ξεκινήσουν» απαιτείται αρχική λύση σε πολλαπλές χρονικές στιγμές ($n = 1, n = 2, \dots$).

Μια άλλη προσέγγιση είναι να επιτευχθεί ακρίβεια χρησιμοποιώντας χρονικές στιγμές που είναι ενδιάμεσες μεταξύ της (n) και $(n+1)$. Αυτή την τεχνική χρησιμοποιούν οι μέθοδοι *Runge-Kutta (RK)*. Η κλίση (k) της μεταβολής της λύσης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της u^{n+1} από την u^n υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης $f \equiv u_t$, σε πολλαπλά στάδια. Για παράδειγμα, η ακόλουθη μέθοδος χρησιμοποιεί δύο στάδια:

$$k_1 = f(u^n, t^n) \quad (4.18)$$

$$k_2 = f\left(u^n + k_1 \cdot \frac{\Delta t}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.19)$$

Τελικά η λύση στην στιγμή $(n+1)$ υπολογίζεται :

$$u^{n+1} = u^n + k_2 \cdot \Delta t + O(\Delta t)^3 \quad (4.20)$$

Το σφάλμα υπολογίζεται με ανάπτυγμα Taylor .

Άλλη διαδεδομένη μέθοδος (RK) χρησιμοποιεί τέσσερα στάδια :

$$k_1 = f(u^n, t^n)$$

$$k_2 = f\left(u^n + k_1 \cdot \frac{\Delta t}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

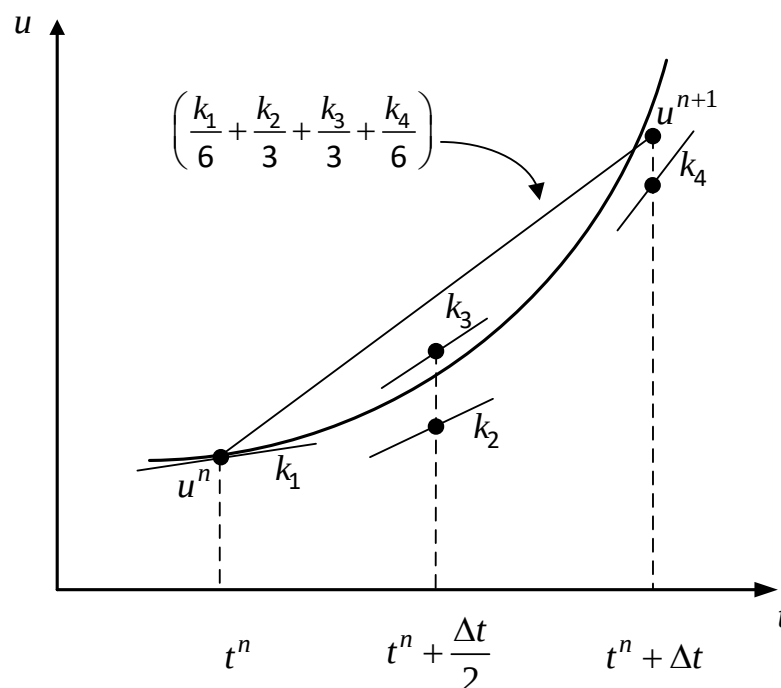
$$k_3 = f\left(u^n + k_2 \cdot \frac{\Delta t}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_4 = f(u^n + k_3 \cdot \Delta t, t^n + \Delta t)$$

Η τελική προσέγγιση της λύσης είναι :

$$u^{n+1} = u^n + \left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \right) \cdot \Delta t + O(\Delta t)^5 \quad (4.21)$$

Παρατηρείται ότι η κλίση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της u^{n+1} είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος των κλίσεων (k_r) στα ενδιάμεσα στάδια 1, 2, 3 και 4. Οι κλίσεις k_2 και k_3 , που αντιστοιχούν στην μέση χρονική στιγμή $t^n + \frac{\Delta t}{2}$, έχουν μεγαλύτερο συντελεστή βάρους ($1/3$), σε σχέση με τις κλίσεις k_1 και k_4 , που έχουν συντελεστή βάρους $1/6$. Οι κλίσεις που υπολογίζονται κατά την εφαρμογή της μεθόδου *RK* τεσσάρων σταδίων απεικονίζονται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3 Υπολογισμός της τιμής u^{n+1} με τη μέθοδο *Runge-Kutta* τεσσάρων σταδίων. Απεικονίζονται όλες οι κλίσεις που υπολογίζονται κατά την εφαρμογή της μεθόδου.

Η γενική μορφή μεθόδου *Runge-Kutta* που χρησιμοποιεί R στάδια είναι η εξής:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot \varphi(u^n, t^n, k_r) \quad (4.22)$$

όπου k_r είναι οι κλίσεις που υπολογίζονται στα ενδιάμεσα στάδια και φ είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των κλίσεων, δηλαδή:

$$\varphi(u^n, t^n, k_r) = \sum_{r=1}^R c_r k_r \quad (4.23)$$

όπου οι c_r είναι συντελεστές.

Οι κλίσεις των ενδιάμεσων σταδίων υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(u^n, t^n) \\ k_r &= f\left(u^n + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{r-1} b_{r,i} k_i, t^n + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{r-1} b_{r,i}\right), \text{ για } r = 2, 3, \dots, R \end{aligned} \quad (4.24)$$

όπου οι $b_{r,i}$ είναι συντελεστές.

Οι τιμές των c_r και $b_{r,i}$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Taylor έτσι ώστε η μέθοδος να έχει τάξη ακρίβειας P .

Γενικά, οι μέθοδοι *Runge-Kutta* είναι αρκετά διαδεδομένες αφού επιτυγχάνεται μεγάλη ακρίβεια χωρίς να αυξηθεί η υπολογιστική κυψέλη στον χρόνο. Επίσης, οι μέθοδοι αυτές δεν έχουν το «πρόβλημα εκκίνησης» των υπολογισμών στα αρχικά χρονικά βήματα που έχουν οι πολυβηματικές μέθοδοι.

Βιβλιογραφία

- [1] C. W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, 1971
- [2] P. Henrici, *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, Wiley, 1962
- [3] J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1973
- [4] L. Lapidus, J.H. Seinfeld, *Numerical solution of ordinary differential equations*, Academic Press, 1971