
4 Το Οριακό Στρώμα

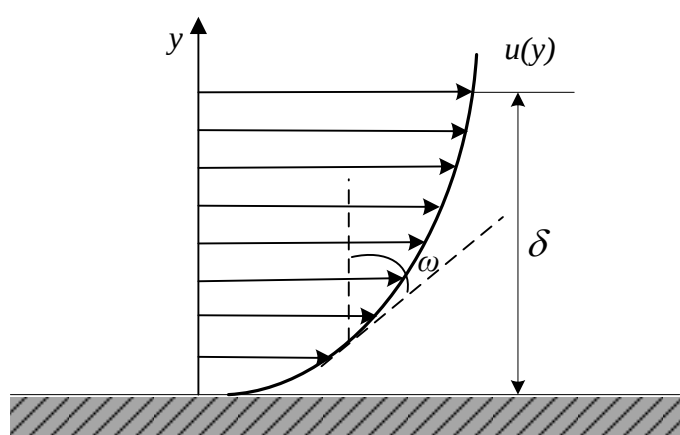
Περιεχόμενα

4.1	Πάχος του Οριακού Στρώματος	3
4.2	Μορφές του Οριακού Στρώματος.....	5
4.3	Οι Εξισώσεις του Οριακού Στρώματος	8
4.4	Η Λύση Blasius για Ροή Χωρίς Βαθμίδα Πίεσης.....	13
4.4.1	Η δύναμη τριβής στο τοίχωμα	19
4.5	Πάχος Μετατόπισης και Πάχος Ορμής	20
4.5.1	Η τριβή στο τοίχωμα – Η δύναμη αντίστασης.....	24
4.6	Οριακό Στρώμα Θερμοκρασίας.....	26
4.7	Εισαγωγή στο Τυρβώδες Οριακό Στρώμα	30
4.7.1	Μέση ροή και τυχαίες διακυμάνσεις – Η αποσύνθεση Reynolds ...	32
4.7.2	Τυρβώδεις Τάσεις	33
4.7.3	Εξισώσεις τυρβώδους οριακού στρώματος	35
4.7.4	Οι τρεις περιοχές του προφίλ τυρβώδους οριακού στρώματος	38
4.7.5	Τυρβώδης ροή σε επίπεδη επιφάνεια.....	40
4.7.6	Τυρβώδης ροή σε αγωγούς	42
4.8	Παραδείγματα – Ασκήσεις	47
4.8.1	Δύναμη για την κίνηση κύβου σε επιφάνεια λαδιού	47
4.8.2	Υπολογισμός πάχους μετατόπισης και ορμής	48
4.8.3	Ανάλυση προφίλ οριακού στρώματος	51
4.8.4	Πάχος οριακού στρώματος σε ροή νερού πάνω από πλάκα	54
4.8.5	Ροή διαφορετικών ρευστών πάνω από πλάκα	55
4.8.6	Αντίσταση σε πλάκα για στρωτή και τυρβώδη ροή	57
4.8.7	Πτήση του αεροσκάφους μυϊκής πρόωσης «Δαίδαλος».....	59

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή ή η μετάφραση όλου ή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου και με οποιοδήποτε τρόπο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

Η ροή κοντά στην επιφάνεια σώματος επηρεάζεται σημαντικά από τη συνεκτικότητα. Η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς ένα σώμα είναι μηδενική στην επιφάνειά του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός στρώματος μεταξύ της επιφάνειας και της ελεύθερης ροής πάχους δ , στο οποίο λαμβάνει χώρα σημαντική μεταβολή της ταχύτητας (Σχήμα 4.1). Το στρώμα αυτό αποκαλείται *οριακό στρώμα της ταχύτητας* και οφείλεται στην τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των στοιχείων του ρευστού. Η ταχύτητα αυξάνει με την απόσταση από το τοπικό στερεό όριο και τείνει στην τιμή της τοπικής ελεύθερης ροής (U_∞). Το πάχος δ θεωρείται η απόσταση όπου η $u(y)$ γίνεται $0.99 U_\infty$. Η γωνία ω εκφράζει την τοπική κλίση ($\partial u / \partial y$) του προφίλ της ταχύτητας. Γενικά, η κλίση ω βαίνει μειούμενη, δηλαδή είναι $\partial \omega / \partial y < 0$ ή $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ προς το άκρο του στρώματος.

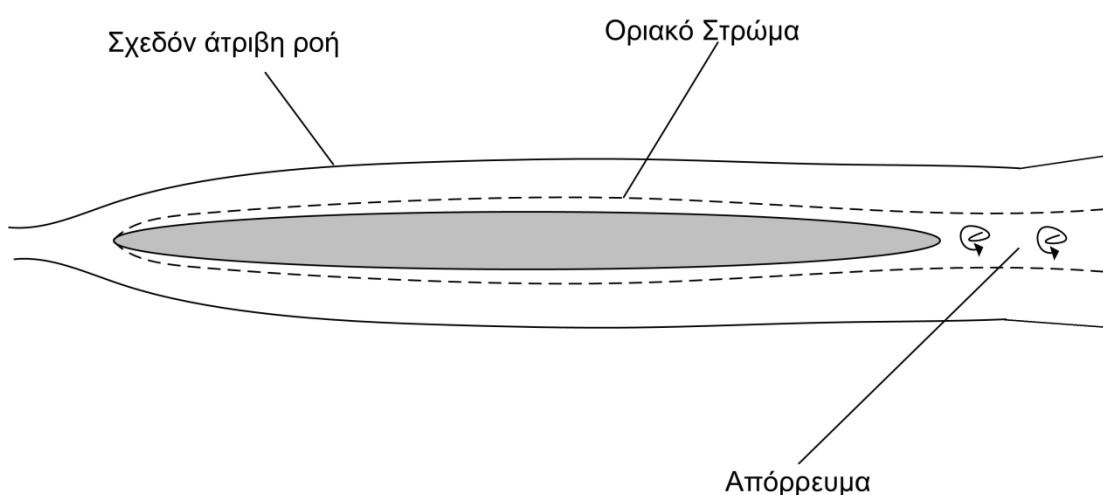
Το οριακό στρώμα αποτελεί ξεχωριστό χαρακτηριστικό του ροϊκού πεδίου, διακριτό από τα άλλα φαινόμενα που αναπτύσσονται λόγω συνεκτικότητας, όπως το *απόρρευμα* πίσω από ένα σώμα (Σχήμα 4.2). Κύριο χαρακτηριστικό του οριακού στρώματος είναι ότι είναι *πολύ λεπτό*, δηλαδή το πάχος του είναι κατά πολύ μικρότερο από τις διαστάσεις του σώματος. Εξωτερικά του στρώματος αυτού, η ροή μπορεί να προσεγγιστεί ως μη συνεκτική (άτριβη).



Σχήμα 4.1: Μεγέθυνση της περιοχής του οριακού στρώματος πάχους δ για την ανάδειξη του προφίλ της ταχύτητας.

Όταν η επιφάνεια του σώματος έχει διαφορετική θερμοκρασία από αυτήν της ελεύθερης ροής, αναπτύσσεται ένα παρόμοιο στρώμα το οποίο αποκαλείται *θερμοκρασιακό οριακό στρώμα*. Ο αριθμός *Prandtl* εκφράζει το λόγο του πάχους των δύο στρωμάτων ταχύτητας και θερμοκρασίας.

Ο *L. Prandtl* το 1904 ήταν ο πρώτος που μελέτησε τη δημιουργία του οριακού στρώματος και διατύπωσε εξισώσεις που το περιγράφουν. Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος είναι μία απλοποίηση των εξισώσεων ροής που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3.



Σχήμα 4.2: Οριακό στρώμα στην επιφάνεια αεροδυναμικού (λεπτού) σώματος και απόρρευμα πίσω από αυτό.

4.1 Πάχος του Οριακού Στρώματος

Θεωρείται το πρόβλημα της διάχυσης λόγω της συνεκτικότητας, το οποίο εκφράζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Η (4.1) μπορεί να εκφραστεί προσεγγιστικά θεωρώντας τη διεργασία της διάχυσης. Σε χρόνο t σχηματίζεται το οριακό στρώμα πάχους δ ξεκινώντας από την επιφάνεια. Η μεταβολή της ταχύτητας στην απόσταση δ είναι

$u(y = \delta) - u(y = 0) = u$. Επομένως, γράφοντας προσεγγιστικά την (4.1), προκύπτει:

$$\frac{u}{t} \sim \nu \cdot \frac{u}{\delta^2} \Rightarrow \boxed{\delta \sim \sqrt{\nu \cdot t}} \quad (4.2)$$

Δηλαδή, η διεργασία της *διάχυσης* προχωρεί σχετικά αργά, με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου.

Η διεργασία της *μεταφοράς* εξελίσσεται ανάλογα με το χρόνο και την ταχύτητα του πεδίου. Συγκεκριμένα, στον ίδιο χρόνο διάχυσης t , το στοιχείο ρευστού διανύει απόσταση στην ελεύθερη ροή ίση με:

$$L = U_{\infty} \cdot t$$

Αντικαθιστώντας τον χρόνο στην (4.2), προκύπτει ότι:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_{\infty}}} \quad \text{ή} \quad \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (4.3)$$

Σε ροές όπου η διεργασία της μεταφοράς των ροϊκών μεγεθών «υπερισχύει» της διάχυσής τους, δηλαδή ο αριθμός Reynolds είναι μεγάλος, προκύπτει ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος του σώματος.

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται στην ελεύθερη ροή με την ταχύτητα του ήχου c_{∞} σε απόσταση $L' = c_{\infty} \cdot t$ στο χρόνο t . Ο λόγος των αποστάσεων στις οποίες διαδίδεται μια «πληροφορία» με τους μηχανισμούς της μεταφοράς και του ήχου, ορίζει τον αδιάστατο αριθμό *Mach*.

$$\frac{L}{L'} = \frac{U_{\infty} \cdot t}{c_{\infty} \cdot t} = \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}} \equiv M_{\infty}$$

Ο αριθμός *Mach* είναι η πιο σημαντική παράμετρος σε συμπιεστές ροές σχετικά υψηλής ταχύτητας.

4.2 Μορφές του Οριακού Στρώματος

Η μορφή του οριακού στρώματος, δηλαδή το προφίλ μεταβολής της ταχύτητας σε μία θέση της επιφάνειας ενός σώματος, καθορίζεται σημαντικά από τη βαθμίδα πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής. Προκειμένου να μελετηθεί η σχέση μεταξύ της μορφής του προφίλ της ταχύτητας και της βαθμίδας της πίεσης (dp/dx), θεωρούμε την εξίσωση της x - ορμής στην επιφάνεια. Θέτοντας τις ταχύτητες (u, v) μηδέν στο τοίχωμα ($y = 0$), προκύπτει:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{dp}{dx} \Big|_{y=0} \quad (4.4)$$

Η βαθμίδα της πίεσης μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της εξίσωσης *Bernoulli* θεωρώντας την «έξω» από το οριακό στρώμα ροή ότι είναι άτριβη και έχει ταχύτητα $U_\infty(x)$:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2 = \text{σταθερά} \Rightarrow \frac{dp_\infty}{dx} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4.5)$$

Όπως θα δειχθεί σε επόμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού, στο οριακό στρώμα η βαθμίδα της πίεσης στην επιφάνεια είναι περίπου ίση με τη βαθμίδα έξω από το οριακό στρώμα (dp_∞/dx). Επομένως, με βάση την (4.5), η (4.4) γίνεται:

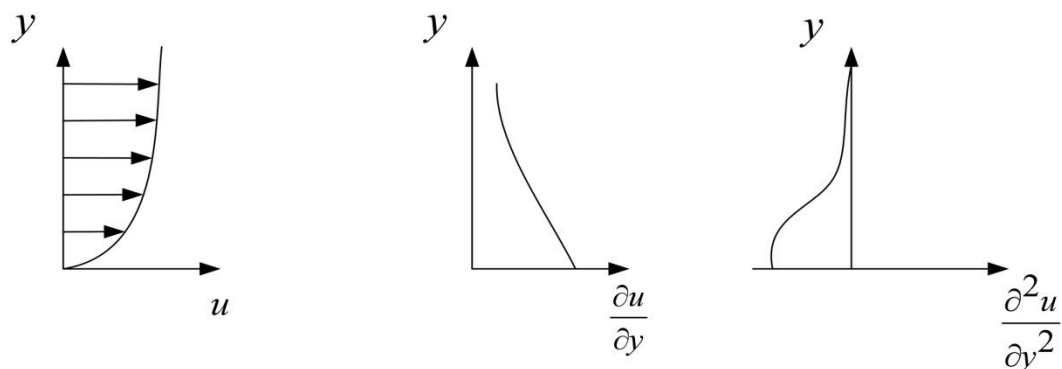
$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4.6)$$

Σε αυτό το σημείο διακρίνονται δύο περιπτώσεις: (α) επιτάχυνση της ροής ($dU_\infty/dx > 0$), και (β) επιβράδυνση της ροής ($dU_\infty/dx < 0$).

Στην επιταχυνόμενη ροή, η (4.6) δίνει αρνητική καμπυλότητα ($\partial^2 u/\partial y^2$) του προφίλ κοντά στο τοίχωμα. Δηλαδή, η γωνία $\omega = \partial u/\partial y$ βαίνει μειούμενη με την απόσταση y συνεχώς έως το άκρο του στρώματος. Η ταχύτητα αυξάνει συνεχώς στο προφίλ όπως απεικονίζει το Σχήμα 4.3, το οποίο επίσης περιλαμβάνει και τις κατανομές των $\partial u/\partial y$ και $\partial^2 u/\partial y^2$.

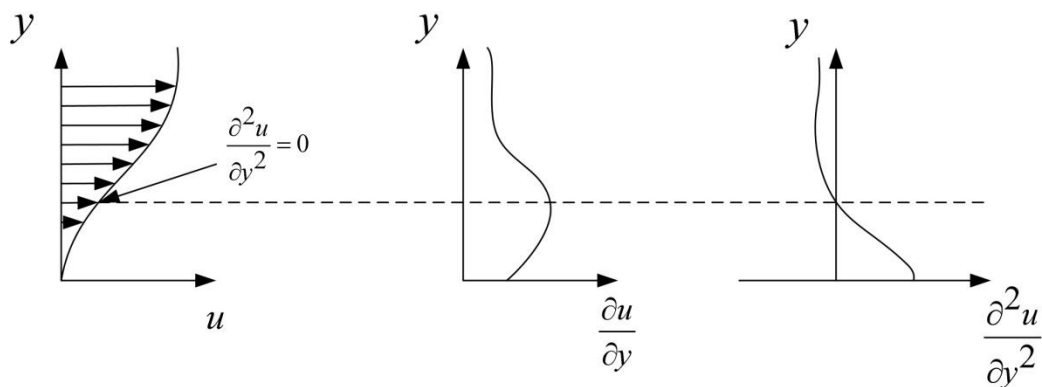
Αντίθετα, στην περίπτωση της επιβραδυνόμενης εξωτερικής ροής, η σχέση (4.6) δίνει θετική καμπυλότητα ($\partial^2 u / \partial y^2$) κοντά στο τοίχωμα, ενώ αυτή είναι αρνητική στο άκρο του στρώματος. Δηλαδή, υπάρχει σημείο καμπής ($\partial^2 u / \partial y^2 = 0$) στο προφίλ όπως απεικονίζεται το Σχήμα 4.4. Η κλίση του προφίλ ($\omega = \partial u / \partial y$) αρχικά αυξάνει και μετά το σημείο καμπής μειώνεται όπως δείχνει το προφίλ της $\partial u / \partial y$ και της ταχύτητας $u(y)$ στο Σχήμα 4.4.

Το Σχήμα 4.3 και το Σχήμα 4.4 απεικονίζουν τα κύρια χαρακτηριστικά του προφίλ ταχύτητας για επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη ροή, αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση η συνεκτική τάση η οποία εκφράζεται από την κλίση $\partial u / \partial y$ μειώνεται μονοτονικά από το τοίχωμα έως την άκρη του στρώματος. Το ίδιο ισχύει και για τον όρο συνεκτικότητας $\mu(\partial^2 u / \partial^2 y)$.



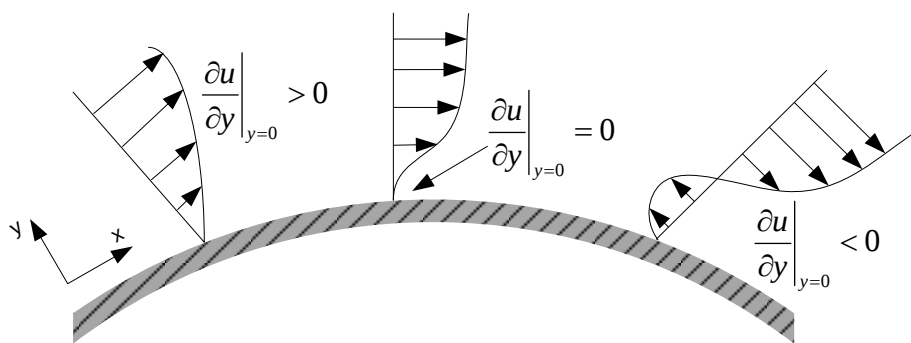
Σχήμα 4.3: Προφίλ της ταχύτητας και των παραγώγων της για επιταχυνόμενη ροή ($dU_\infty / dx > 0$).

Στο προφίλ της επιβραδυνόμενης ροής, η συνεκτική τάση τ_{xy} παίρνει μέγιστη τιμή στην θέση του σημείου καμπής του προφίλ της ταχύτητας.



Σχήμα 4.4: Προφίλ της ταχύτητας και των παραγώγων της για επιβραδυνόμενη ροή ($dU_{\infty} / dx < 0$).

Η αύξηση της πίεσης κατά την κατεύθυνση της ροής οδηγεί στην επιβράδυνσή της και στην αναστροφή της σε πολλές περιπτώσεις. Με απλά λόγια, όταν η ροή «συναντά» αυξανόμενη πίεση ($dp / dx > 0$), τα στοιχεία ρευστού κοντά στο τοίχωμα, τα οποία έχουν μικρή ταχύτητα, «εμποδίζονται» στην κίνησή τους από την δύναμη της πίεσης, και μπορεί να κινηθούν προς την αντίθετη φορά από αυτήν της εξωτερικής ροής (ανακυκλοφορία). Αυτή η διεργασία απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται και *αποκόλληση της ροής*.



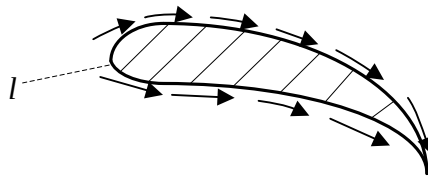
Σχήμα 4.5: Η αύξηση της πίεσης μπορεί να οδηγήσει σε αναστροφή της ροής (ανακυκλοφορία) κοντά στην επιφάνεια.

Το Σχήμα 4.5 απεικονίζει την μεταβολή του προφίλ ταχύτητας. Η αναστροφή θεωρείται ότι αρχίζει εκεί που:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

Παρατηρούμε ότι στο προφίλ με ανακυκλοφορία η κλίση $\partial u / \partial y$ αλλάζει πρόσημο από αρνητική στην επιφάνεια σε θετική στην άκρη του στρώματος. Δηλαδή, το προφίλ της ταχύτητας εμφανίζει ένα σημείο καμπής.

Θεωρώντας τη ροή γύρω από μία αεροτομή περιγράμματος l , ένα μέρος της αντίστασης που παρουσιάζεται κατά την κίνησή της μέσα στο ρευστό, οφείλεται στην τριβή του τοιχώματος της αεροτομής με το ρευστό (Σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6: Οι δυνάμεις τριβής στην ροή γύρω από αεροτομή.

Η συνολική αντίσταση τριβής (D_f) προκύπτει με ολοκλήρωση της δύναμης τριβής σε όλο το περίγραμμα (l) της αεροτομής:

$$D_f = \oint_l \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w d\vec{l} \cdot \frac{\vec{U}_\infty}{|\vec{U}_\infty|} \quad (4.7)$$

Δηλαδή, η κλίση του προφίλ στο τοίχωμα καθορίζει την αντίσταση.

4.3 Οι Εξισώσεις του Οριακού Στρώματος

Οι εξισώσεις της ροής μπορούν να λάβουν απλούστερη μορφή στην περιοχή του οριακού στρώματος. Η απλοποίηση αυτή βασίζεται στις ακόλουθες βασικές παραδοχές:

- (i) σταθερή ροή στο χρόνο,
- (ii) ασυμπίεστη ροή (ρ, μ, κ είναι σταθερά), και
- (iii) πολύ λεπτό οριακό στρώμα ($\delta \ll L$), δηλαδή $Re \gg 1$, βάση της σχέσης (4.3).

Για απλότητα θεωρείται δισδιάστατο πεδίο. Η εξίσωση της συνέχειας (αρχή διατήρησης της μάζας) εκφράζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \quad (4.8)$$

Η (4.8) θα χρησιμοποιηθεί όπως έχει για το οριακό στρώμα.

Η εξίσωση της ορμής στη x -διεύθυνση είναι:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.9)$$

και στη y -διεύθυνση η εξίσωση της ορμής είναι:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.10)$$

Εφόσον η ροή είναι ασυμπίεστη, δε χρειάζεται η εξίσωση της ενέργειας για να προσδιοριστεί το πεδίο ταχυτήτων.

Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος προκύπτουν, θεωρώντας την τάξη μεγέθους των όρων στις (4.8), (4.9) και (4.10). Η τρίτη παραδοχή του λεπτού στρώματος ($\delta \ll L$) θα παίζει καθοριστικό ρόλο στην απαλοιφή όρων.

Η x -συνιστώσα της ταχύτητας (u) μεταβάλλεται από 0, στην επιφάνεια, στην τιμή U_∞ σε απόσταση δ από αυτήν. Η μεταβολή της δηλαδή, κατά την εγκάρσια διεύθυνση είναι της τάξης $O(U_\infty)$. Κατά τη διεύθυνση της ροής, η μεταβολή της U_∞ είναι γενικά πολύ μικρότερη σε σχέση με τη μεταβολή $\partial u / \partial y$. Η x -συντεταγμένη μεταβάλλεται από 0 έως το χαρακτηριστικό μήκος του σώματος L , ενώ η y -συντεταγμένη μεταβάλλεται από 0 έως δ , που είναι το πάχος του οριακού στρώματος. Ισχύει συνεπώς, για τη μεταβολή στην x -διεύθυνση:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = O(U_\infty) \\ \Delta x = O(L) \end{array} \right\} \Rightarrow O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{U_\infty}{L} \quad (4.11)$$

Η τάξη μεγέθους της y -συνιστώσας της ταχύτητας (v), εκτιμάται από την εξίσωση της συνέχειας (4.8) ως εξής:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow O\left(\frac{v}{\delta}\right) = O\left(\frac{U_\infty}{L}\right) \Rightarrow$$

$$v = O\left(U_\infty \frac{\delta}{L}\right) \quad (4.12)$$

Από την (4.12), συνεπάγεται ότι $v \ll u$. Πιο συγκεκριμένα, ο λόγος v/U_∞ είναι της τάξης του $1/\sqrt{\text{Re}_L}$ όπως προκύπτει από τις (4.3) και (4.12). Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί ότι έχει γίνει η επιπλέον παραδοχή της επιφάνειας με *μικρή καμπυλότητα*. Διαφορετικά, οι δύο συνιστώσες u και v είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

Εξετάζοντας την τάξη μεγέθους των όρων στην εξίσωση της ορμής στη x -διεύθυνση (σχέση (4.9)), προκύπτει:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = O\left(\frac{U_\infty^2}{L}\right), \quad v \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(U_\infty \frac{\delta}{L}\right) \cdot O\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right) = O\left(\frac{U_\infty^2}{L}\right) \quad (4.13)$$

δηλαδή, οι όροι μεταφοράς είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

Για τους όρους συνεκτικότητας ισχύει:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{U_\infty}{L^2}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{U_\infty}{\delta^2}\right) \quad (4.14)$$

Το πάχος του οριακού στρώματος έχει θεωρηθεί πολύ μικρότερο του χαρακτηριστικού μήκους του σώματος ($\delta \ll L$), το οποίο συνεπάγεται ότι $\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial y^2$. Αυτό σημαίνει πως ο όρος $\partial^2 u / \partial x^2$ μπορεί να αμεληθεί στην εξίσωση (4.9) σε σχέση με τον ομοειδή του όρο $\partial^2 u / \partial y^2$.

Η βαθμίδα της πίεσης ($\partial p / \partial x$) δεν μπορεί γενικά να αμεληθεί στην εξίσωση της ορμής. Θα πρέπει ωστόσο, να συγκριθεί ο όρος της συνεκτικότητας $(\mu / \rho) \cdot u_{yy}$ που απομένει, με τους όρους μεταφοράς $u \cdot u_x$ και $v \cdot u_y$, οι οποίοι έχουν τάξη μεγέθους U_∞^2 / L . Η σχέση (4.3), δίνει την τάξη μεγέθους του συντελεστή κινηματικού ιξώδους ($\nu \equiv \mu / \rho$), και η προσέγγιση (4.13) δίνει την τάξη μεγέθους του όρου u_{yy} . Επομένως, έχουμε:

$$O\left(\frac{\mu}{\rho} u_{yy}\right) = O\left(\frac{U_{\infty}\delta^2}{L} \frac{U_{\infty}}{\delta^2}\right) = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L}\right) \quad (4.15)$$

δηλαδή, ο όρος παραμένει μαζί με τους όρους μεταφοράς, εφόσον είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτούς. Συνεπώς, η (4.9) απλοποιείται στην ακόλουθη μορφή για την περιοχή του οριακού στρώματος:

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (4.16)$$

Θεωρώντας την εξίσωση της ορμής στη y - διεύθυνση (4.10), εξετάζεται η τάξη μεγέθους των επί μέρους όρων που εμφανίζονται. Με βάση την προσέγγιση (4.12), ισχύει:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} &= O\left(U_{\infty} \cdot \frac{1}{L} \cdot U_{\infty} \frac{\delta}{L}\right) = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L^2} \cdot \delta\right) \\ v \frac{\partial v}{\partial y} &= O\left(U_{\infty} \frac{\delta}{L} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot U_{\infty} \frac{\delta}{L}\right) = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L^2} \cdot \delta\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου παρατηρούμε ότι οι όροι μεταφοράς είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

Όσον αφορά τους όρους συνεκτικότητας, έχουμε:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O\left(U_{\infty} \frac{\delta}{L} \cdot \frac{1}{L^2}\right), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(U_{\infty} \frac{\delta}{L} \cdot \frac{1}{\delta^2}\right) \quad (4.18)$$

Ο λόγος τάξεων μεγέθους των δυο όρων συνεκτικότητας είναι:

$$\frac{O(v_{xx})}{O(v_{yy})} = \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1$$

Επομένως, μπορεί να αμεληθεί ο όρος v_{xx} σε σχέση με τον ομοειδή του v_{yy} .

Το επόμενο βήμα είναι η σύγκριση της τάξης μεγέθους του όρου συνεκτικότητας $(\mu/\rho) \cdot v_{yy}$ με αυτή των όρων μεταφοράς στις σχέσεις (4.17).

Η τάξη μεγέθους του συντελεστή κινηματικής συνεκτικότητας (μ/ρ) συνδέεται με το πάχος (δ) με βάση την (4.3):

$$\frac{\mu}{\rho} = O\left(\frac{U_{\infty} \delta^2}{L}\right).$$

Με βάση την ανωτέρω καθώς και την εκτίμηση του μεγέθους της ταχύτητας u (σχέση (4.12)), έχουμε:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left[\frac{U_{\infty} \delta^2}{L} \cdot U_{\infty} \frac{\delta}{L} \cdot \frac{1}{\delta^2}\right] = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L}\right)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος συνεκτικότητας είναι της ίδιας τάξης με τους όρους μεταφοράς. Οι τρεις όροι είναι της τάξης του δ/L το οποίο είναι πολύ μικρό. Συνεπώς, αμελούνται όλοι οι όροι αυτοί της εξίσωσης της y -ορμής (4.10), το οποίο μας δίνει και την τάξη μεγέθους της βαθμίδας της πίεσης:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L} \frac{\delta}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0} \quad (4.19)$$

Η (4.19) είναι σημαντική, γιατί δηλώνει ότι η πίεση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή κατά το πάχος του οριακού στρώματος. Δηλαδή, η πίεση του ροϊκού πεδίου έξω από το οριακό στρώμα ταχύτητας «αποτυπώνεται» στην επιφάνεια. Επαναλαμβάνεται εδώ ότι έχει θεωρηθεί μικρή καμπυλότητα της επιφάνειας. Στην περίπτωση καμπύλης επιφάνειας, γενικά υπάρχει βαθμίδα πίεσης κάθετα στην επιφάνεια. Η δύναμη πίεσης ισορροπεί τη φυγόκεντρη δύναμη η οποία αναπτύσσεται στα στοιχεία του ρευστού, τα οποία «εκτελούν» καμπύλη τροχιά.

Συνήθεις οριακές συνθήκες που διέπουν τις εξισώσεις του οριακού στρώματος, είναι οι ακόλουθες:

$$y=0: \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T_w$$

Δηλαδή, στην επιφάνεια η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική και η θερμοκρασία του ίση με τη θερμοκρασία της επιφάνειας.

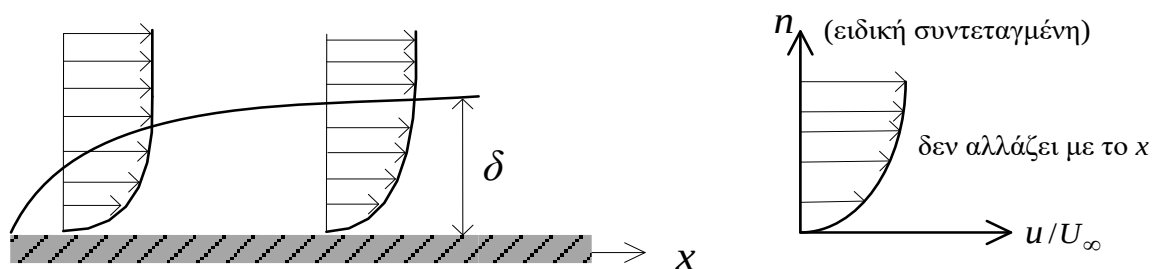
$$y \rightarrow \infty: \quad u = U_\infty, \quad T = T_\infty$$

Μακριά από την επιφάνεια η x - συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού και η θερμοκρασία του είναι ίση με την ταχύτητα και τη θερμοκρασία της ελεύθερης ροής. Δεν υπάρχει οριακή συνθήκη για την συνιστώσα v της ταχύτητας στο όριο $y \rightarrow \infty$.

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, όταν λαμβάνει χώρα εκτεταμένη *αποκόλληση* της ροής, τότε οι εξισώσεις του οριακού στρώματος δεν ισχύουν πλέον, καθότι η παραδοχή ότι $\delta \ll L$ δεν ισχύει.

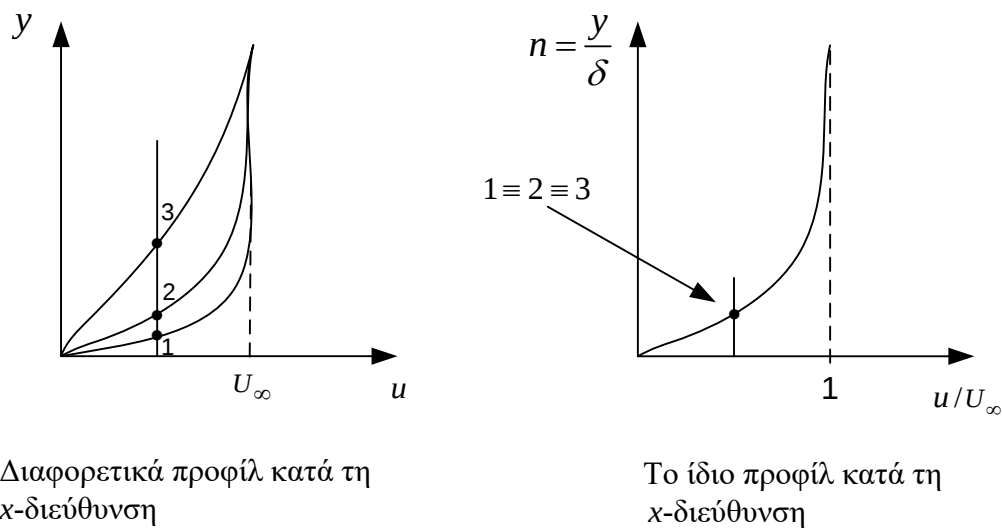
4.4 Η Λύση Blasius για Ροή Χωρίς Βαθμίδα Πίεσης

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει βαθμίδα πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής, όπως είναι η ροή πάνω από μία επίπεδη επιφάνεια, το προφίλ ταχύτητας του οριακού στρώματος παρουσιάζει *ομοιότητα* σε κάθε θέση. Αυτό επιτρέπει την επίλυση των εξισώσεων του οριακού στρώματος με βάση ένα *μετασχηματισμό ομοιότητας*, ο οποίος δίνει το ίδιο προφίλ ταχύτητας σε κάθε θέση της επιφάνειας. Αυτός ο ειδικός μετασχηματισμός απεικονίζεται στο Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Οριακό στρώμα σε επίπεδη επιφάνεια με $dp/dx = 0$. Ειδικός μετασχηματισμός στη y - διεύθυνση οδηγεί σε ένα μόνο προφίλ ταχύτητας κατά μήκος της πλάκας.

Η επιφάνεια θεωρείται απείρου μήκους, έτσι ώστε η ροή να μελετηθεί μακριά από άκρα τα οποία θα επέβαλαν μεγάλη αλλαγή της ροής κατά τη x - διεύθυνση, το οποίο συνεπάγεται ότι δεν ισχύουν οι απλοποιημένες εξισώσεις του οριακού στρώματος. Το Σχήμα 4.8 απεικονίζει προφίλ της ταχύτητας σε τρεις θέσεις στην επιφάνεια. Παρατηρείται ότι διαίρεση των μηκών κατά τη y - διεύθυνση με το τοπικό πάχος του στρώματος (δ), μπορεί να μετασχηματίσει τα τρία προφίλ σε ένα. Για παράδειγμα, τα σημεία 1, 2 και 3 μπορούν να μετασχηματισθούν στο ίδιο σημείο όταν χρησιμοποιείται η συντεταγμένη $n = y / \delta$, αντί για την y .



Σχήμα 4.8: Ειδικός μετασχηματισμός της y - συντεταγμένης.

Στο τμήμα 4.1 εκτιμήθηκε η τάξη μεγέθους του πάχους δ ίση με $\sqrt{\nu \cdot x / U_\infty}$ για χαρακτηριστικό μήκος της x - συντεταγμένης. Θεωρείται λοιπόν, ο εξής μετασχηματισμός:

$$n = \frac{y}{\sqrt{\nu \cdot x / U_\infty}} \quad (4.20)$$

Εφόσον το προφίλ της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται κατά τη x - διεύθυνση στο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων $\left(u / U_\infty, y / \sqrt{\nu \cdot x / U_\infty} \right)$,

μπορούμε να εκφράσουμε την ταχύτητα σαν μια συνάρτηση $f(n)$ η οποία θα πρέπει να υπολογιστεί. «Μιμούμενος» ο Blasius τη συνάρτηση δυναμικού της οποίας η παράγωγος δίνει την ταχύτητα, όρισε συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$$\boxed{\frac{u}{U_{\infty}} = f'(n)} \quad (4.21)$$

όπου $f' \equiv \frac{df}{dn}$.

Το επόμενο βήμα είναι ο μετασχηματισμός των εξισώσεων του οριακού στρώματος, για μηδενική βαθμίδα πίεσης, στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό που θα προκύψει είναι μία απλούστερη εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση f , η οποία επιλύεται αριθμητικά. Συγκεκριμένα, οι παράγωγοι στις εξισώσεις εκφράζονται ως εξής:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu \cdot x}} = -\frac{n}{2x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu \cdot x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (U_{\infty} \cdot f'(n))}{\partial x} = U_{\infty} \frac{\partial f'}{\partial x} = U_{\infty} \frac{\partial f'}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} = -U_{\infty} f'' \frac{n}{2x} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (U_{\infty} \cdot f'(n))}{\partial y} = U_{\infty} \frac{\partial f'}{\partial y} = U_{\infty} \frac{\partial f'}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} = U_{\infty} f'' \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu \cdot x}} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U_{\infty} f'' \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu \cdot x}} \right) = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu \cdot x}} \frac{\partial f''}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_{\infty}^2}{\nu \cdot x} f''' \quad (4.24)$$

Η εξίσωση της συνέχειας χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η ταχύτητα v :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v = -\int \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Εναλλάσσοντας τους τελεστές της παραγωγίσης και της ολοκλήρωσης στην ανωτέρω εξίσωση, και αντικαθιστώντας την u από την σχέση (4.21), προκύπτει:

$$v = -\frac{\partial}{\partial x} \int U_{\infty} f'(n) dy \Rightarrow v = -\frac{\partial}{\partial x} \int U_{\infty} f'(n) \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (4.25)$$

Από την (4.20) προκύπτει ότι $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_\infty}}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.25) και ολοκληρώνοντας, έχουμε:

$$v = - \frac{\partial}{\partial x} \left(U_\infty f(\eta) \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_\infty}} \right)$$

Εκτελώντας και την παραγωγή προκύπτει η τελική έκφραση για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας:

$$v = -U_\infty \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_\infty}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - U_\infty f \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_\infty}} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{v}{U_\infty} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} (nf' - f)} \quad (4.26)$$

Παρατηρείται ότι η y -συνιστώσα της ταχύτητας είναι διάφορη του μηδενός. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις των παραγώγων (4.22) έως (4.24) καθώς και τις εκφράσεις των ταχυτήτων (4.21) και (4.26), στην εξίσωση της x -ορμής του οριακού στρώματος (4.16), προκύπτει μετά από εκτενή άλγεβρα:

$$\boxed{2f''' + ff'' = 0} \quad (4.27)$$

Η εξίσωση (4.27) είναι γνωστή ως *εξίσωση Blasius*. Είναι μία μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση και επιλύεται με υπολογιστή με βάση τις ακόλουθες μετασχηματισμένες συνοριακές συνθήκες:

Στην επιφάνεια ($\eta = 0$) ισχύει με βάση τις σχέσεις (4.21) και (4.26) για τις ταχύτητες u και v :

$$\begin{aligned} u = 0 & \Rightarrow f'(0) = 0 \\ v = 0 & \Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Μακριά από την επιφάνεια ($\eta = \infty$) ισχύει ότι:

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 \Rightarrow f'(\infty) = 1 \quad (4.29)$$

Ωστόσο, η ανωτέρω συνθήκη δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έχει. Για την επίλυση, θεωρείται ότι:

$$f''(0) = a$$

όπου η a έχει μια τυχαία τιμή. Λύνεται η εξίσωση (4.27) επαναληπτικά με διάφορες τιμές a , έως ότου να προσεγγίζεται η (4.29) ικανοποιητικά. Τελικά, προκύπτει: $a \cong 0,332$. Αυτή η τεχνική αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται στην βιβλιογραφία “shooting method”.

Ο Πίνακας 1 δίνει την αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius (4.27) για τιμές της n από 0 έως 8. Στο Σχήμα 4.9, δίνεται γραφικά η μεταβολή των συνιστωσών της ταχύτητας u και v . Επειδή η ταχύτητα v είναι κατά πολύ μικρότερη της u , στο γράφημα αδιαστατοποιείται κατάλληλα έτσι ώστε να αναπαρασταθεί μαζί με την ταχύτητα u . Παρατηρείται ότι η συνιστώσα v στο άκρο του στρώματος είναι διάφορη του μηδενός.

Η άκρη του οριακού στρώματος μπορεί να οριστεί σαν η θέση εκείνη, στην οποία ισχύει: $u/U_\infty \approx 0,99$. Η θέση αυτή αντιστοιχεί στη συντεταγμένη $n \approx 5$, όπως δίνει ο Πίνακας 1. Αντικαθιστώντας στην (4.20) με την $y = \delta$, έχουμε :

$$5 = \frac{\delta}{\sqrt{\nu \cdot x / U_\infty}}.$$

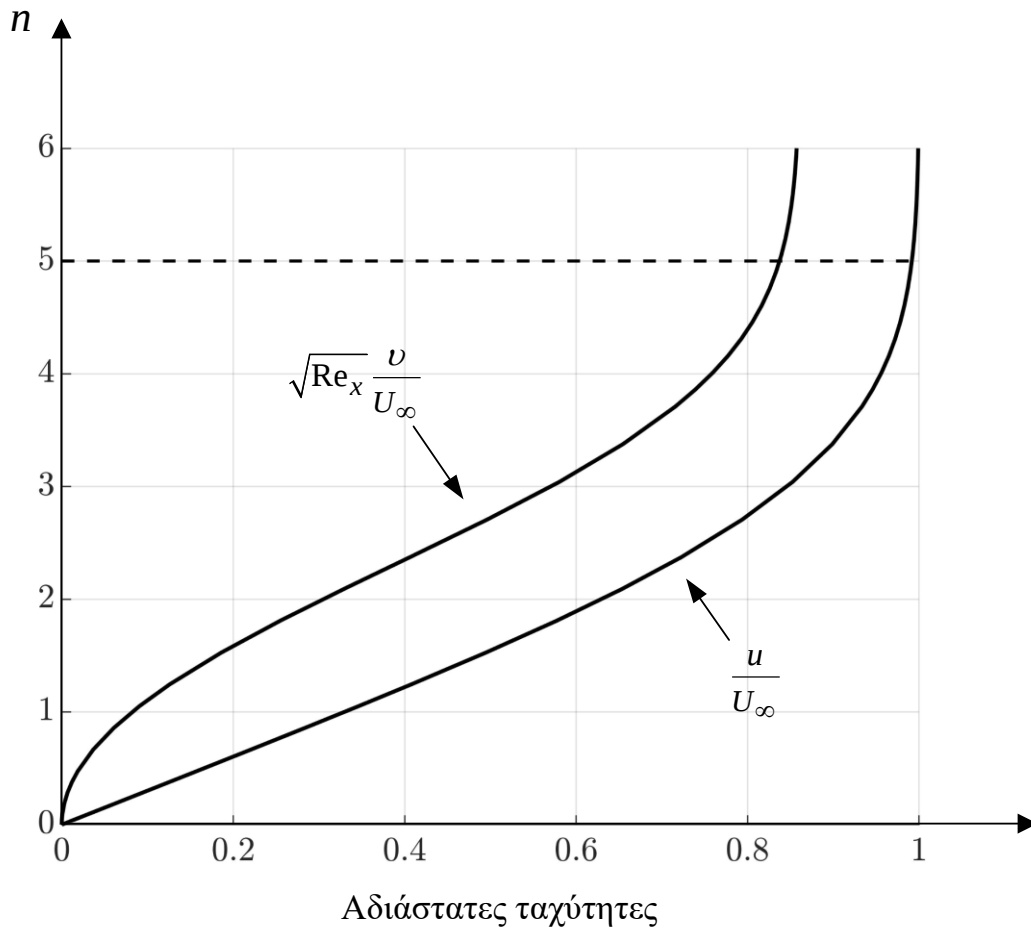
Συνεπώς, το πάχος του οριακού στρώματος, σε απόσταση x από την αρχή της επίπεδης επιφάνειας, είναι ίσο με:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_\infty}} \quad \text{ή} \quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (4.30)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η λύση Blasius ισχύει στην περιοχή της επιφάνειας μακριά από την αρχή της ($x=0$), γιατί στην περιοχή αυτή δεν ισχύουν οι εξισώσεις του οριακού στρώματος, λόγω της σχετικά μεγάλης μεταβολής των ταχυτήτων κατά τη x -διεύθυνση.

n	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0,0	0,0000	0,0000	0,3321
0,5	0,0415	0,1659	0,3309
1,0	0,1656	0,3298	0,3230
1,5	0,3701	0,4868	0,3026
2,0	0,6500	0,6298	0,2668
2,5	0,9963	0,7513	0,2174
3,0	1,3968	0,8461	0,1614
3,5	1,8377	0,9131	0,1078
4,0	2,3058	0,9556	0,0642
4,5	2,7902	0,9795	0,0340
5,0	3,2833	0,9915	0,0159
5,5	3,7806	0,9969	0,0066
6,0	4,2797	0,9990	0,0024
6,5	4,7794	0,9997	0,0008
7,0	5,2793	0,9999	0,0002
7,5	5,7793	1,0000	0,0001
8,0	6,2793	1,0000	0,0000

Πίνακας 1: Αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius.



Σχήμα 4.9: Μεταβολή των συνιστωσών της ταχύτητας με βάση τη λύση Blasius.
Ο λόγος των συνιστωσών (u / v) είναι ανάλογος του $\sqrt{Re_x}$.

4.4.1 Η δύναμη τριβής στο τοίχωμα

Η τριβή της ροής στην επιφάνεια είναι ίση με:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(n=0) \quad (4.31)$$

Ο συντελεστής τριβής ορίζεται ως:

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (4.32)$$

Ο Πίνακας 1 δίνει την τιμή του όρου $f''(n=0)$ η οποία είναι 0,332. Επομένως ο συντελεστής τριβής είναι:

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (4.33)$$

όπου ο αριθμός *Reynolds* (Re_x) ορίζεται ως:

$$\text{Re}_x \equiv \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}$$

Η αντίσταση της επιφάνειας στη ροή, είναι ίση με:

$$D = \int_0^L \tau_w b \, dx$$

όπου b είναι το πλάτος της επιφάνειας, και L είναι το μήκος της.

Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω την (4.31) καθώς και την τιμή 0,332 για τον όρο $f''(n=0)$, προκύπτει ότι:

$$D = 0,332 \cdot \mu U_\infty b \int_0^L \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \, dx \Rightarrow D = 0,664 \cdot \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}} b \quad (4.34)$$

Ο συντελεστής αντίστασης ορίζεται ως:

$$C_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L} \quad (4.35)$$

Αντικαθιστώντας την (4.34) στην (4.35) προκύπτει ότι:

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (4.36)$$

όπου ο αριθμός *Reynolds* (Re_L) ορίζεται ως:

$$\text{Re}_L \equiv \frac{U_\infty \cdot L}{\nu}$$

4.5 Πάχος Μετατόπισης και Πάχος Ορμής

Το οριακό στρώμα προκαλεί μείωση της παροχής μάζας, ορμής και ενέργειας σε σχέση με ομοιόμορφη ροή ταχύτητας U_∞ . Ορίζονται ειδικά μεγέθη τα οποία εκφράζουν αυτό το έλλειμμα.

Ελεύθερη ροή ταχύτητας U_∞ συναντά επίπεδη πλάκα πλάτους b και αναπτύσσει οριακό στρώμα όπως απεικονίζει το Σχήμα 4.10. Η αρχή

διατήρησης της μάζας στην επιφάνεια ελέγχου του σχήματος (διακεκομμένη γραμμή) εκφράζεται ως εξής:

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} + \dot{m}_e \quad (4.37)$$

όπου $\dot{m}_e$ είναι η εκροή μάζας λόγω της y - συνιστώσας της ταχύτητας, ενώ $\dot{m}_{in}$ και $\dot{m}_{out}$ εκφράζουν την εισροή και εκροή μάζας στο τμήμα του πεδίου ροής όπως απεικονίζεται στο σχήμα.

Θεωρώντας τα αντίστοιχα ολοκληρώματα τα οποία εκφράζουν παροχή μάζας, η (4.37) δίνει:

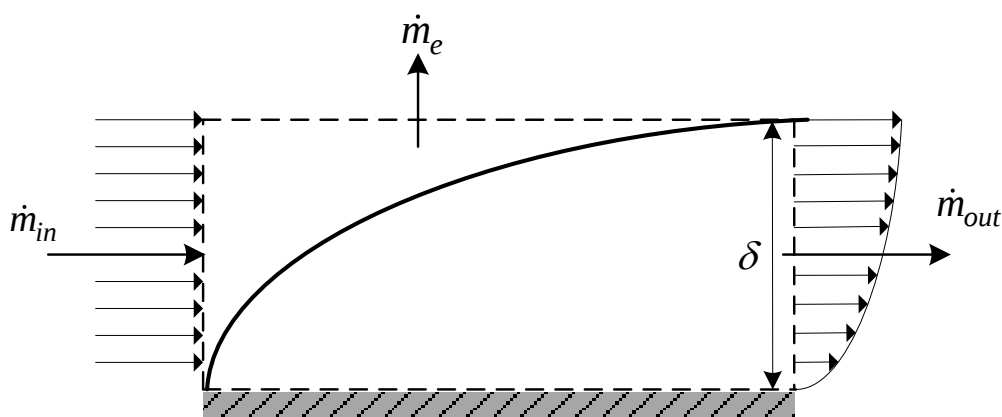
$$\dot{m}_e = \int_0^\delta \rho U_\infty b dy - \int_0^\delta \rho u b dy \quad (4.38)$$

Το έλλειμμα παροχής μάζας κατά την x - διεύθυνση συνδέεται με την εκροή μάζας κατά την y - διεύθυνση. Η ανωτέρω σχέση μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\dot{m}_e = \rho U_\infty b \delta_1 \quad (4.39)$$

όπου δ_1 ορίζεται το πάχος μετατόπισης ως:

$$\delta_1 \equiv \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \quad (4.40)$$



Σχήμα 4.10: Ισοζύγιο μάζας σε επιφάνεια ελέγχου για τον προσδιορισμό του πάχους μετατόπισης οριακού στρώματος σε επίπεδη επιφάνεια.

Παρατηρείται δηλαδή, ότι το πάχος μετατόπισης αποτελεί μέτρο του ελλείμματος στη ροή μάζας λόγω του οριακού στρώματος, όπως απεικονίζει το Σχήμα 4.11. Η παροχή μάζας του πραγματικού προφίλ ταχύτητας $u(y)$ του οριακού στρώματος είναι ίση με την παροχή ενός προφίλ ελεύθερης ροής U_∞ μετατοπισμένου κατά απόσταση δ_1 . Το έλλειμμα παροχής μάζας του πραγματικού προφίλ σε σχέση με την ελεύθερη ροή είναι:

$$\rho \int_0^\delta (U_\infty - u) dy$$

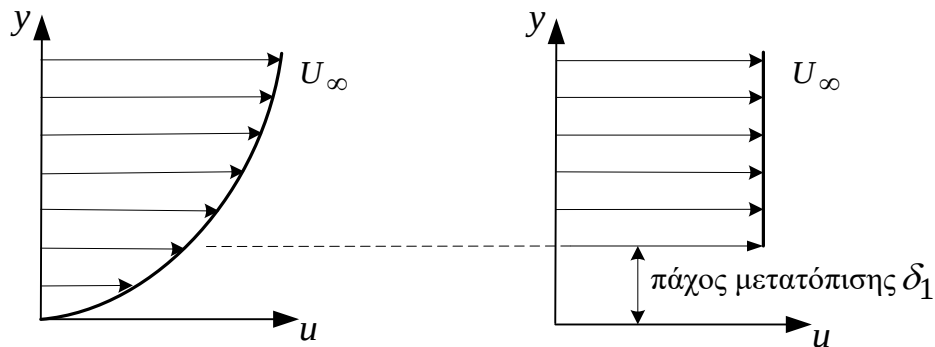
Το έλλειμμα αυτό εκφράζεται με το πάχος μετατόπισης δ_1 ως εξής:

$$\rho U_\infty \delta_1$$

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις έχουμε:

$$\rho \int_0^\delta (U_\infty - u) dy = \rho U_\infty \delta_1$$

Το οποίο δίνει την σχέση (4.40) για το μέγεθος δ_1 .



Σχήμα 4.11: Το οριακό στρώμα προκαλεί μείωση της παροχής μάζας της ελεύθερης ροής. Τα δυο προφίλ "δίνουν" την ίδια παροχή μάζας κατά τη x -διεύθυνση.

Στη γενική περίπτωση που η ροή είναι συμπιεστή, δηλαδή μεταβάλλεται η πυκνότητα, το πάχος μετατόπισης ορίζεται ως:

$$\delta_1 \equiv \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy \quad (4.41)$$

Το πάχος μετατόπισης εκφράζει ακόμη τη μετατόπιση των γραμμών ροής λόγω της παρουσίας του οριακού στρώματος. Δηλαδή, η εξωτερική ροή «βλέπει» το σώμα πιο «παχύ» από όσο πραγματικά είναι.

Με βάση τη λύση Blasius, από τη σχέση (4.21) για την ταχύτητα, προκύπτει

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy = \int_0^{\delta} [1 - f'(n)] dy$$

Αντικαθιστούμε την μεταβλητή y με την n :

$$n = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}} \Rightarrow dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} dn$$

Με την χρήση της λύσης Blasius (Πίνακας 1) προκύπτει:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^5 [1 - f'(n)] dn = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} [5 - f(5)] = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} [5 - 3,28] \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta_1 = 1,72 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_{\infty}}}} \quad (4.42)$$

Το πάχος δ_1 μπορεί να συνδεθεί απευθείας με το πάχος δ του οριακού στρώματος. Ισχύει ότι $\delta = 5\sqrt{\nu x/U_{\infty}}$ το οποίο αντικαθίσταται στην ανωτέρω σχέση (4.42) και δίνει $\delta_1 = 0,344 \delta$.

Ένα άλλο χρήσιμο χαρακτηριστικό μέγεθος του οριακού στρώματος είναι το πάχος ορμής (δ_2), το οποίο ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και το μέγεθος δ_1 ως εξής:

$$\delta_2 \equiv \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (4.43)$$

Το πάχος ορμής εκφράζει την απώλεια x - ορμής λόγω της επιβράδυνσης της ροής στο οριακό στρώμα. Αντικαθιστώντας τη λύση Blasius για την ταχύτητα u/U_{∞} (εξίσωση (4.21)), προκύπτει:

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \left[\int_0^5 f'(n) dn - \int_0^5 f'(n) \cdot f'(n) dn \right] \quad (4.44)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (4.44) υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_0^5 f'(n) \cdot f'(n) \, dn = \int_0^5 (f'(n) \cdot f(n))' \, dn - \int_0^5 f''(n) \cdot f(n) \, dn$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $f''(n) \cdot f(n) = -2f'''(n)$ (εξίσωση (4.27)), προκύπτει ότι:

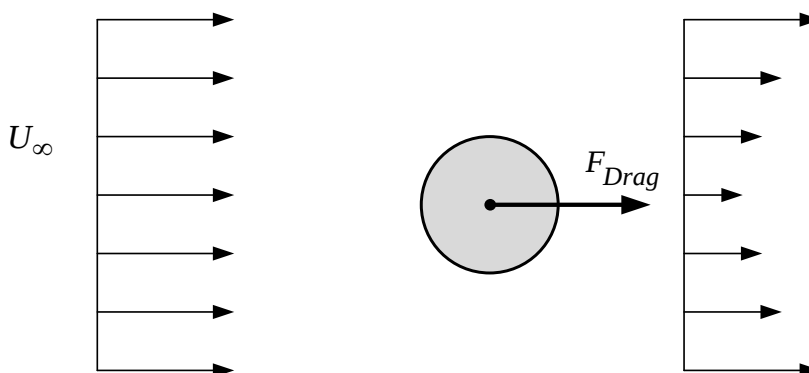
$$\int_0^5 f'(n) \cdot f'(n) \, dn = \int_0^5 (f'(n) \cdot f(n))' \, dn + 2 \int_0^5 f'''(n) \, dn$$

Η ανωτέρω έκφραση αντικαθίσταται στην εξίσωση (4.44). Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την λύση Blasius (Πίνακας 1), και προκύπτει η παρακάτω σχέση για το πάχος ορμής:

$$\delta_2 = 0,664 \sqrt{\frac{v \cdot x}{U_\infty}} \quad (4.45)$$

4.5.1 Η τριβή στο τοίχωμα – Η δύναμη αντίστασης

Η απώλεια της ορμής συνεπάγεται δύναμη η οποία εξασκείται στο σώμα με βάση τον νόμο του Νεύτωνα. Υπολογίζοντας, ή μετρώντας το έλλειμμα της ταχύτητας στο *απόρρευμα* της ροής γύρω από ένα σώμα (Σχήμα 4.12) εξάγεται η τιμή της δύναμης τριβής που ασκείται από την ροή. Η δύναμη αντίστασης (“Drag”) είναι ίση και αντίθετης φοράς με την δύναμη τριβής. Αφορά την περίπτωση που το σώμα κινείται μέσα σε ακίνητο ρευστό.



Σχήμα 4.12: Ροή γύρω από σώμα: η απώλεια ορμής της ροής συνδέεται με τη δύναμη τριβής (F_τ) ή αντίστασης (F_{Drag}) που ασκείται στο σώμα.

Στην περίπτωση ακίνητης επίπεδης πλάκας μήκους L και πλάτους b (Σχήμα 4.13), η δύναμη τριβής είναι ίση με:

$$F_\tau = \text{ορμή}|_{x=0} - \text{ορμή}|_{x=L} = \rho U_\infty^2 b h - \rho b \int_0^\delta u^2 dy \quad (4.46)$$

Η ροή μάζας είναι ίση με:

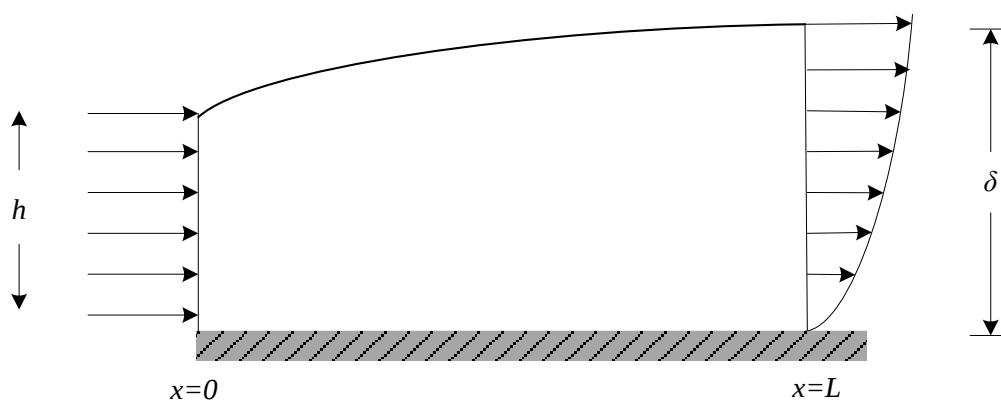
$$\dot{m} = \rho U_\infty h = \rho \int_{y=0}^\delta u dy \Rightarrow h = \frac{1}{U_\infty} \int_0^\delta u dy$$

Ορίζουμε δηλαδή, το ύψος h έτσι ώστε οι δύο παροχές να είναι ίσες, οπότε αντικαθιστώντας στην (4.46) προκύπτει:

$$F_\tau = \rho b \int_0^\delta u(U_\infty - u) dy$$

η οποία συνεπάγεται ότι:

$$\boxed{F_\tau = \rho U_\infty^2 b \delta_2} \quad (4.47)$$



Σχήμα 4.13: Η δύναμη λόγω τριβής σε πλάκα με υπολογισμό της απώλειας ορμής σε κατάλληλη επιφάνεια ελέγχου.

Παρατηρούμε ότι το πάχος ορμής δ_2 συνδέεται άμεσα με την δύναμη τριβής η οποία εξασκείται στην πλάκα λόγω της ροής.

Η διατμητική τάση σε μία θέση της πλάκας $\tau_w(x)$, συνδέεται με το *πάχος ορμής* (δ_2) όπως δείχνεται κατωτέρω. Η δύναμη τριβής η οποία ασκείται στο μήκος x της επίπεδης επιφάνειας είναι:

$$F_\tau(x) = b \int_0^x \tau_w(x) dx \Rightarrow \frac{dF_\tau}{dx} = b \tau_w \quad (4.48)$$

Επίσης, με βάση την (4.47), προκύπτει:

$$\frac{dF_\tau}{dx} = \rho U_\infty^2 b \frac{d\delta_2}{dx} \quad (4.49)$$

Από τις (4.48) και (4.49) συνεπάγεται:

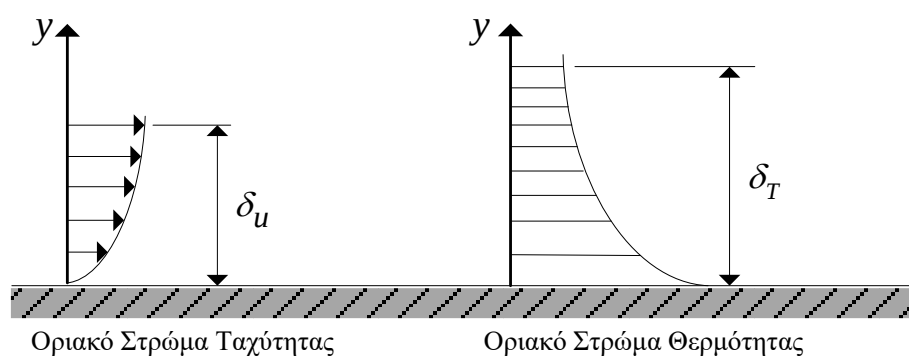
$$\boxed{\tau_w(x) = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx}} \quad (4.50)$$

Η ανωτέρω εξίσωση εκφράζει ότι η τριβή στην επιφάνεια προκαλεί μείωση της ορμής του οριακού στρώματος. Η σχέση (4.50) εξήχθη από τον von Karman και ισχύει και για *τυρβώδη* ροή την οποία θα εξετάσουμε σε επόμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού.

4.6 Οριακό Στρώμα Θερμοκρασίας

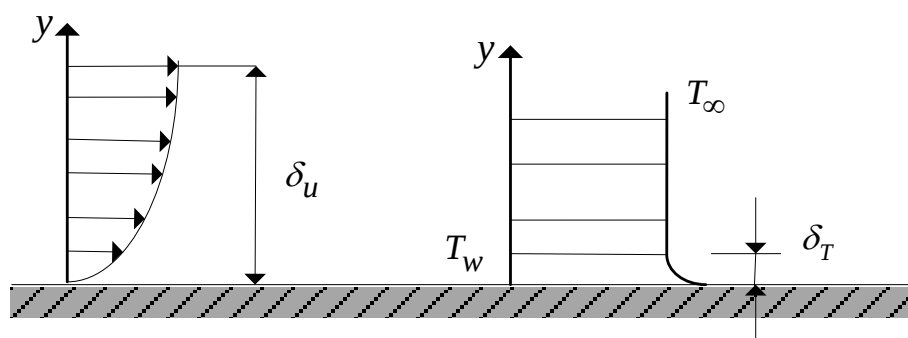
Σε μία συνεκτική ροή εκτός από την τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των στοιχείων του ρευστού και των στερεών επιφανειών, λαμβάνει χώρα και μεταφορά θερμότητας, λόγω αγωγιμότητας, μεταξύ των επιφανειών αυτών και του ρευστού. Αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη ενός στρώματος μέσα στο οποίο η θερμοκρασία μεταβάλλεται από την τιμή που έχει στην επιφάνεια του σώματος, στην τιμή που επικρατεί στην περιοχή της ελεύθερης ροής. Το στρώμα αυτό αποκαλείται *οριακό στρώμα θερμοκρασίας*, όταν το πάχος του (δ_T) είναι πολύ μικρότερο της χαρακτηριστικής διάστασης του σώματος (L).

Κατά την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων ροής, στην περίπτωση της εξίσωσης της ενέργειας, προέκυψε ο αδιάστατος αριθμός *Prandtl* (Pr), ο οποίος εκφράζει το λόγο του πάχους του οριακού στρώματος της ταχύτητας (δ_u) προς το πάχος του θερμοκρασιακού οριακού στρώματος (δ_T). Τα πάχη αυτά απεικονίζονται στο (Σχήμα 4.14).



Σχήμα 4.14: Στην περίπτωση της ροής αέρα, ο αριθμός *Prandtl* είναι μικρότερος της μονάδας, και το οριακό στρώμα ταχύτητας έχει μικρότερο πάχος από αυτό του οριακού στρώματος θερμοκρασίας.

Για στρωτή ροή αέρα η τιμή του αριθμού *Prandtl* είναι ίση με 0,7 περίπου, ενώ στην περίπτωση της *τυρβώδους* ροής η τιμή του είναι κοντά στο 1. Στην περίπτωση ροής λαδιού η τιμή του Pr είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της μονάδας της τάξεως του 10^3 (Σχήμα 4.15).



Σχήμα 4.15: Στην περίπτωση της ροής λαδιού, ο αριθμός *Prandtl* είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας, και το πάχος του οριακού στρώματος ταχύτητας είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος θερμοκρασίας.

Η εξίσωση της ενέργειας του οριακού στρώματος θα προκύψει με την απαλοιφή των όρων της οι οποίοι έχουν μέγεθος μικρότερης τάξης, όπως έγινε και με την εξίσωση της ορμής. Αρχικά, ορίζεται η αδιάστατη θερμοκρασία με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\theta \equiv \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \equiv \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T} \quad (4.51)$$

Για χρονικά αμετάβλητη, ασυμπίεστη, και δισδιάστατη ροή, η εξίσωση της ενέργειας (σχέση 3.67), αδιαστατοποιώντας τους όρους της με βάση τον Πίνακα 3.1, έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{C_p \rho U_{\infty} \Delta T}{L} \left(u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right) &= \frac{\rho U_{\infty}^3}{L} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \\ &+ \frac{k \Delta T}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{\mu U_{\infty}^2}{L^2} \Phi^* \end{aligned} \quad (4.52)$$

όπου η συνάρτηση απωλειών (Φ^*) δίνεται από τη σχέση (3.63):

$$\Phi^* = 2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2$$

Από την (4.52) προκύπτει:

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} &= \frac{U_{\infty}^2}{C_p \Delta T} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \\ &+ \frac{k}{\rho C_p U_{\infty} L} \nabla^2 \theta + \frac{\mu U_{\infty}}{\rho C_p L \Delta T} \Phi^* \end{aligned} \quad (4.53)$$

Στους παραπάνω όρους εμφανίζεται ένα ακόμα αδιάστατο μέγεθος, ο αριθμός *Eckerd*, ο οποίος ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ως εξής:

$$E \equiv \frac{U_{\infty}^2}{C_p \Delta T}$$

Η (4.53) με βάση τους ορισμούς των αριθμών *Reynolds*, *Prandtl* και *Eckerd*, γράφεται ως εξής:

$$u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = E \cdot \vec{V}^* \cdot \nabla p^* + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 \theta + \frac{E}{\text{Re}} \Phi^* \quad (4.54)$$

Στην συνέχεια θα θεωρηθούν αδιαστατοποιημένα μεγέθη και θα παραληφθεί το σύμβολό τους (*).

Θεωρώντας την τάξη μεγέθους των επί μέρους όρων που εμφανίζονται στην (4.54), με βάση τα πάχη των οριακών στρωμάτων (δ_u, δ_T) , παρατηρείται ότι οι όροι $\partial^2\theta/\partial y^2$, $\partial u/\partial y$ είναι της τάξης μεγέθους $O(1/\delta_T^2)$ και $O(1/\delta_u)$, αντίστοιχα. Οι όροι αυτοί είναι κατά πολύ μεγαλύτεροι σε σύγκριση με τους υπόλοιπους. Ο όρος $Eu(\partial p/\partial x)$, ο οποίος εκφράζει το έργο λόγω της δύναμης της πίεσης, «έρχεται» από την ροή έξω από το οριακό στρώμα και δεν μπορεί γενικά να αμεληθεί. Στην περίπτωση μηδενικής βαθμίδας πίεσης, η εξίσωση της ενέργειας μπορεί να απλοποιηθεί στην παρακάτω μορφή για το οριακό στρώμα:

$$\boxed{u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{E}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \quad (4.55)$$

όπου $u \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $v \frac{\partial \theta}{\partial y}$ είναι οι όροι μεταφοράς θερμότητας, ο όρος $\frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$ εκφράζει τη διάχυση θερμότητας μέσα στο ρευστό λόγω αγωγιμότητας, και ο όρος $\frac{E}{\text{Re}} (\partial u/\partial y)^2$ αφορά την παραγωγή θερμότητας με την τριβή μεταξύ των στοιχείων του ρευστού.

4.7 Εισαγωγή στο Τυρβώδες Οριακό Στρώμα

Κάθε πραγματική ροή, ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητά της, γίνεται τυρβώδης όταν ο αριθμός *Reynolds* υπερβεί μία συγκεκριμένη τιμή. Στην περίπτωση της *τύρβης*, παρατηρούνται τυχαίες διακυμάνσεις των ροϊκών μεγεθών, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.16 για την ταχύτητα u σε μία θέση στο πεδίο.

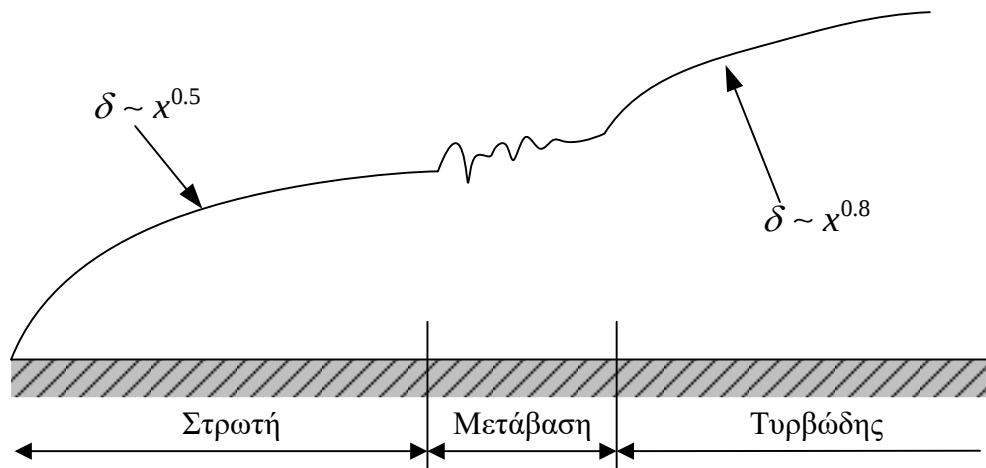


Σχήμα 4.16: Η *τύρβη* χαρακτηρίζεται από τυχαίες διακυμάνσεις των ροϊκών μεγεθών.

Η *τύρβη* προκαλεί ανάμιξη των στοιχείων της ροής και αυξάνει σημαντικά τη συνεκτικότητά της. Μέσα στη ροή αναπτύσσονται τρισδιάστατες δομές με αρκετά ευρύ φάσμα κλιμάκων. Εξαιτίας της *τύρβης* προκαλείται μεταφορά ενέργειας από την «μέση» ροή στις δομές μεγάλου μεγέθους και κατόπιν στις δομές ολοένα και μικρότερου μεγέθους. Οι μικρές δομές προκαλούν μετατροπή της κινητικής ενέργειας της *τύρβης* σε θερμότητα. Η ανάμιξη αυτή της ροής, αυξάνει σημαντικά την αντίσταση που αναπτύσσεται σε σώματα κατά την κίνησή τους μέσα στο ρευστό. Επίσης, οι τυρβώδεις ροές χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερη κινητική ενέργεια στο οριακό στρώμα σε σύγκριση με τις στρωτές ροές, γεγονός που προκαλεί μείωση ή αποφυγή της αποκόλλησης του οριακού στρώματος.

Στην περίπτωση της ροής πάνω από μία επίπεδη επιφάνεια, παρατηρούνται οι εξής περιοχές, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.17:

- (i) Περιοχή *στρωτής* ροής η οποία ξεκινά από την αρχή της πλάκας. Το πάχος του οριακού στρώματος είναι ανάλογο του όρου $\sqrt{x}$, όπως έχει δειχθεί.
- (ii) Περιοχή μετάβασης της ροής από *στρωτή* σε *τυρβώδη*.
- (iii) Περιοχή πλήρως ανεπτυγμένης *τυρβώδους* ροής. Εδώ το πάχος αυξάνει ανάλογα με τον όρο $x^{4/5}$, όπως θα αναφερθεί παρακάτω.



Σχήμα 4.17: Μετάβαση της ροής σε τυρβώδη στο οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη επιφάνεια.

Για την περίπτωση της πλάκας, έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι η ροή μεταβαίνει σε τυρβώδη όταν ο *τοπικός* αριθμός *Reynolds* (Re_x) ξεπεράσει την τιμή:

$$Re_x \cong 5 \times 10^5 \quad (4.56)$$

Εκφράζοντας τον αριθμό *Reynolds* ως προς το πάχος του οριακού στρώματος, παρατηρείται το εξής:

$$Re_\delta \equiv \frac{\rho U_\infty \delta}{\mu} = \frac{\rho U_\infty^2}{\mu \frac{U_\infty}{\delta}} \approx \frac{\rho U_\infty^2}{\mu \frac{du}{dy}} \approx \frac{\rho U_\infty^2}{\tau}$$

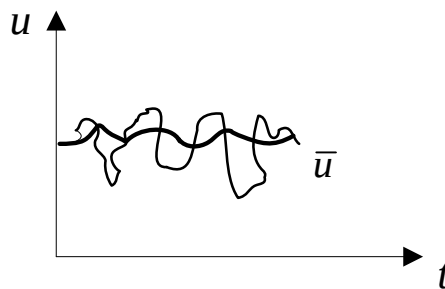
Δηλαδή, ο αριθμός *Reynolds* εκφράζει το λόγο των δυνάμεων της αδράνειας («αποσταθεροποίηση» της στρωτής ροής), προς τις δυνάμεις ιξώδους (απόσβεσης διαταραχών). Αύξησή του στη στρωτή ροή οδηγεί σε μετάβαση στην τύρβη.

4.7.1 Μέση ροή και τυχαίες διακυμάνσεις – Η αποσύνθεση Reynolds

Όπως αναφέρθηκε, βασικό χαρακτηριστικό της τυρβώδους ροής είναι οι τυχαίες διακυμάνσεις των ροϊκών μεγεθών. Για το λόγο αυτό, μαθηματικά διαχωρίζονται τα ροϊκά μεγέθη σε μέσες τιμές στο χρόνο, και σε διακυμάνσεις. Έτσι, οι στιγμιαίες ταχύτητες και η πίεση εκφράζονται ως:

$$\begin{aligned}u &= \bar{u} + u' \\v &= \bar{v} + v' \\p &= \bar{p} + p'\end{aligned}\quad (4.57)$$

όπου $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$ είναι οι μέσες τιμές στο χρόνο των ταχυτήτων και της πίεσης, και u', v', p' είναι οι στιγμιαίες διακυμάνσεις. Στο Σχήμα 4.18 παριστάνεται γραφικά η μέση τιμή και η διακύμανση της ταχύτητας u με το χρόνο σε μια θέση του πεδίου ροής.



Σχήμα 4.18: Μέση τιμή και διακύμανση της ταχύτητας σε τυρβώδες πεδίο ροής.

Η (4.57) ορίζει τη λεγόμενη αποσύνθεση Reynolds (“Reynolds Decomposition”) των ροϊκών μεγεθών. Οι μέσες τιμές στο χρόνο ορίζονται με βάση την ακόλουθη σχέση για το μέγεθος ϕ :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi dt \quad (4.58)$$

Εξ ορισμού, η μέση τιμή των τυχαίων διακυμάνσεων είναι μηδέν, εφόσον τότε ισχύει:

$$\bar{\phi}' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\phi - \bar{\phi}) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi dt - \frac{1}{\Delta t} \bar{\phi} \Delta t = \bar{\phi} - \bar{\phi} = 0 \quad (4.59)$$

Μέσες τιμές γινομένων υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \overline{u \cdot v} &= \overline{(\bar{u} + u') \cdot (\bar{v} + v')} = \overline{\bar{u} \cdot \bar{v} + u' \cdot \bar{v} + v' \cdot \bar{u} + u' \cdot v'} = \\ &= \overline{\bar{u} \cdot \bar{v}} + \overline{u' \cdot \bar{v}} + \overline{v' \cdot \bar{u}} + \overline{u' \cdot v'} \Rightarrow \overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \overline{u' \cdot v'} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Οι όροι που αποτελούνται από το γινόμενο της μέσης τιμής με την τυχαία διακύμανση μηδενίζονται αν θεωρηθεί η μέση τιμή τους. Με βάση την (4.60), ισχύει ότι:

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2} \quad (4.61)$$

Με την αποσύνθεση αυτή προκύπτουν εξισώσεις για την τυρβώδη ροή οι οποίες είναι παρόμοιες με αυτές της στρωτής. Εμφανίζονται όμως, όροι των διακυμάνσεων, όπως $\overline{u' \cdot v'}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ οι οποίοι πρέπει να υπολογιστούν. Οι επιπλέον εξισώσεις που χρησιμοποιούνται μπορεί να είναι αλγεβρικές, ή κανονικές διαφορικές, ή μερικές διαφορικές εξισώσεις.

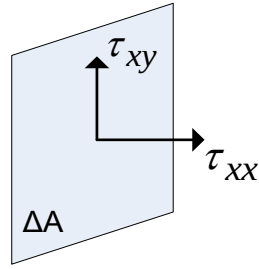
4.7.2 Τυρβώδεις Τάσεις

Θεωρείται η επιφάνεια στο Σχήμα 4.19 μέσα σε ένα πεδίο ασυμπίεστης τυρβώδους ροής. Ο ρυθμός μεταφοράς της x - ορμής στη x - διεύθυνση δια μέσου της επιφάνειας (ΔA) είναι:

$$\dot{J}_{xx} = (\rho u) \cdot \Delta A \cdot u = \rho (\bar{u} + u')^2 \cdot \Delta A$$

και ο ρυθμός μεταφοράς της x - ορμής στη y - διεύθυνση είναι ίσος με:

$$\dot{J}_{xy} = (\rho u) \cdot \Delta A \cdot v = \rho (\bar{u} + u')(\bar{v} + v') \cdot \Delta A$$



Σχήμα 4.19: Επιφάνεια εμβαδού ΔA μέσα στο πεδίο ροής, με την ορθή (τ_{xx}) και διατμητική (τ_{xy}) τάση που ενεργούν σε αυτήν.

Θεωρώντας τις μέσες τιμές του ρυθμού μεταφοράς ορμής, προκύπτει:

$$\bar{J}_{xx} = \rho \left(\bar{u}^2 + \overline{u'^2} \right) \cdot \Delta A$$

$$\bar{J}_{xy} = \rho \left(\bar{u} \cdot \bar{v} + \overline{u' \cdot v'} \right) \cdot \Delta A$$

Ο λόγος $\bar{J} / \Delta A$ εκφράζει τη δύναμη ανά επιφάνεια (τάση) που ενεργεί στην επιφάνεια. Ο λόγος $\bar{J}_{xx} / \Delta A$ εκφράζει την τάση $\bar{\tau}_{xx}$, ενώ ο λόγος $\bar{J}_{xy} / \Delta A$ την $\bar{\tau}_{xy}$. Δηλαδή, η μέση ορθή τάση είναι:

$$\bar{\tau}_{xx} = \rho \left(\bar{u}^2 + \overline{u'^2} \right) \quad (4.62)$$

και η μέση διατμητική τάση είναι ίση με:

$$\bar{\tau}_{xy} = \rho \left(\bar{u} \cdot \bar{v} + \overline{u' \cdot v'} \right) \quad (4.63)$$

Παρατηρείται ότι η τύρβη συμβάλει στις τάσεις που αναπτύσσονται στην επιφάνεια, μέσω των όρων διακύμανσης. Οι τάσεις που οφείλονται στις τυρβώδεις διακυμάνσεις της ταχύτητας είναι ίσες με:

$$\begin{aligned} \tau'_{xx} &= \rho \overline{u' \cdot u'} \\ \tau'_{xy} &= \rho \overline{u' \cdot v'} \end{aligned} \quad (4.64)$$

και ονομάζονται *τάσεις Reynolds*. Το στερεό όριο «αποσβένει» τις τυρβώδεις διακυμάνσεις, δηλαδή εκεί οι τάσεις (4.64) μηδενίζονται.

4.7.3 Εξισώσεις τυρβώδους οριακού στρώματος

Θεωρείται δισδιάστατη και ασυμπίεστη ροή, με τη μέση τιμή των μεγεθών της χρονικά αμετάβλητη. Η εξίσωση διατήρησης της μάζας για το τυρβώδες οριακό στρώμα προκύπτει αν στην (4.8) εφαρμοστεί η *αποσύνθεση Reynolds* των ροϊκών μεγεθών (4.57). Προκύπτει τότε για την εξίσωση της μάζας (συνέχειας):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} + v') = 0 \quad (4.65)$$

Αν θεωρηθούν οι μέσες τιμές στο χρόνο των όρων που εμφανίζονται στην ανωτέρω, συνεπάγεται ότι:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0} \quad (4.66)$$

Σημειώνεται ότι, $\bar{u}' = 0$, $\bar{v}' = 0$ και $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$, $\bar{\bar{v}} = \bar{v}$. Ακόμη, με αφαίρεση της (4.66) από την (4.65), προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0} \quad (4.67)$$

Δηλαδή, και το πεδίο των τυρβωδών διακυμάνσεων είναι επίσης ασυμπίεστο.

Η εξίσωση της ορμής στη x - διεύθυνση προκύπτει με παρόμοιο τρόπο. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις της αποσύνθεσης Reynolds (4.57) στην εξίσωση της ορμής οριακού στρώματος (4.16) και θεωρώντας μέσες τιμές στο χρόνο, προκύπτει:

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \overline{\rho u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\rho v' \frac{\partial u'}{\partial y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (4.68)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.67) με $\rho u'$ και θεωρώντας μέσες τιμές στο χρόνο για τους όρους της προκύπτει:

$$\overline{\rho u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\rho u' \frac{\partial v'}{\partial y}} = 0 \quad (4.69)$$

Προσθέτοντας τις (4.68) και (4.69), προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \rho \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \right) + \rho \left(\overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} \right) \\ & = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Οι εκφράσεις στο πρώτο μέλος της (4.70) μπορούν να απλοποιηθούν, χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \rho \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \right) &= \rho \frac{\partial (\overline{u' \cdot u'})}{\partial x} = \frac{\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot u'})}{\partial x} \\ \rho \left(\overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} \right) &= \rho \frac{\partial (\overline{u' \cdot v'})}{\partial y} = \frac{\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot v'})}{\partial y} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω στην εξίσωση (4.70) προκύπτει:

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot v'})}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (4.71)$$

Ο όρος $\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot u'}) / \partial x$ είναι κατώτερης τάξης μεγέθους στο οριακό στρώμα σε σχέση με τον όρο $\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}) / \partial y$, και επομένως μπορεί να αμεληθεί. Αυτό προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη την παραδοχή του λεπτού οριακού στρώματος ($\delta \ll L$), αλλά και το ότι οι τυρβώδεις διακυμάνσεις u' και v' έχουν ίδια τάξη μεγέθους. Μεταφέροντας τον όρο $\partial (\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}) / \partial y$ στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.71), προκύπτει η παρακάτω μορφή:

$$\boxed{\rho \cdot \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \right)} \quad (4.72)$$

Η (4.72) είναι η εξίσωση της ορμής στη x - διεύθυνση για το τυρβώδες οριακό στρώμα. Παρατηρείται ότι ο όρος που εκφράζει τις συνεκτικές τάσεις αποτελείται από δύο διακριτά μέρη:

$$\tau_l = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad \tau_t = - \rho \overline{u' \cdot v'}$$

Το πρώτο (τ_l) είναι τάση στρωτής μέσης ροής, ενώ το δεύτερο (τ_t) αντιπροσωπεύει τάση της τυρβώδους ροής. Ο *Boussinesque* θεώρησε έναν συντελεστή *τυρβώδους συνεκτικότητας* (μ_t), ο οποίος, παρόμοια με τον μ , μπορεί να εκφράσει τις τυρβώδεις τάσεις ως:

$$\tau_t = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.73)$$

Συνεπώς, η (4.72) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (4.74)$$

Απομένει, βέβαια, να υπολογιστεί ο όρος μ_t . Αυτός υπολογίζεται με διάφορα μοντέλα *τύρβης* τα οποία έχουν αναπτυχθεί, και εκφράζουν τον συντελεστή αυτόν σαν συνάρτηση του μέσου πεδίου ροής.

Για την εξίσωση της ορμής οριακού στρώματος στη y -διεύθυνση ακολουθείται και πάλι η ίδια διαδικασία και προκύπτει, ότι για το τυρβώδες οριακό στρώμα σε σώματα με μικρή καμπυλότητα, ισχύει:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \approx 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial y} \approx 0 \quad (4.75)$$

Για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της ενέργειας για το τυρβώδες οριακό στρώμα, θεωρείται η αποσύνθεση του θερμοκρασιακού πεδίου:

$$\theta = \bar{\theta} + \theta' \quad (4.76)$$

Γίνεται χρήση της εξίσωσης της ενέργειας (4.55). Με βάση τις αποσυνθέσεις Reynolds των ροϊκών μεγεθών (4.57) και (4.76), και θεωρώντας επιπλέον τις μέσες τιμές στο χρόνο, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = & - \left(\frac{\partial \overline{u' \cdot \theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' \cdot \theta'}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \\ & + \frac{E}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.77)$$

Οι μέσες τιμές του θερμοκρασιακού πεδίου αναφέρονται στο στρωτό μέρος της ροής, ενώ οι διακυμάνσεις αναφέρονται στο τυρβώδες μέρος αυτής.

4.7.4 Οι τρεις περιοχές του προφίλ τυρβώδους οριακού στρώματος

Πειραματική μελέτη του προφίλ ταχύτητας του τυρβώδους οριακού στρώματος κατέδειξε ότι μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις περιοχές: στο *στρωτό υπόστρωμα*, στην *ενδιάμεση περιοχή*, και στην *πλήρως τυρβώδη περιοχή*. Η διαίρεση του προφίλ στις τρεις αυτές περιοχές βασίζεται σε μια αδιάστατη μορφή της ταχύτητας και του μήκους. Για την αδιαστατοποίηση χρησιμοποιείται η τριβή στην επιφάνεια (τ_w).

Η τριβή στην επιφάνεια μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\tau_w}{\rho} \approx \nu \frac{\Delta u}{\Delta y} = \nu \frac{u}{y} \Rightarrow \\ \Rightarrow u &\cong \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\nu}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος τ_w/ρ έχει μονάδες του τετραγώνου της ταχύτητας.

Συχνά λοιπόν, χρησιμοποιείται η διατμητική τάση πάνω στο τοίχωμα για την αδιαστατοποίηση της ταχύτητας και του μήκους. Συγκεκριμένα, ορίζεται η *ταχύτητα τριβής* :

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.78)$$

με βάση την οποία ορίζεται η αδιάστατη ταχύτητα:

$$u^+ \equiv \frac{u}{u^*} \quad (4.79)$$

και η αδιάστατη y - συντεταγμένη:

$$y^+ \equiv \frac{y}{\nu/u^*} = \frac{u^* \cdot y}{\nu} \quad (4.80)$$

όπου ν είναι ο συντελεστής του κινηματικού ιξώδους.

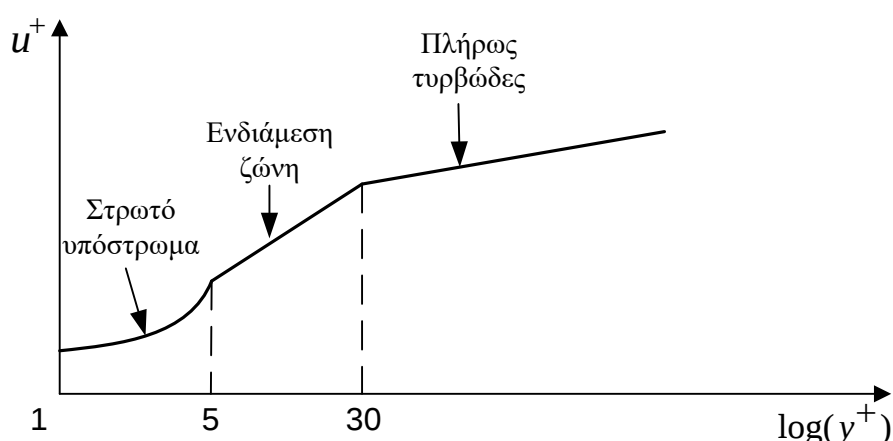
Αν θεωρηθεί γραμμικό προφίλ ταχύτητας, προκύπτει μία απλή σχέση μεταξύ u^+ και y^+ . Συγκεκριμένα,

$$\frac{u^+}{y^+} = \frac{\nu \cdot u}{y \cdot u^{*2}} = \frac{\nu \cdot \rho \cdot u}{y \cdot \tau_w} = \frac{\mu \cdot u}{y \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{u/y}{\partial u / \partial y}$$

και θεωρώντας γραμμικό προφίλ ταχύτητας προκύπτει η απλή σχέση:

$$u^+ = y^+$$

Χρησιμοποιώντας τις ειδικές αυτές συντεταγμένες u^+ και y^+ του τυρβώδους οριακού στρώματος, οι τρεις περιοχές του απεικονίζονται στο Σχήμα 4.20.



Σχήμα 4.20: Σχέση μεταξύ των ειδικά αδιαστατοποιημένων μεγεθών u^+ και y^+ για τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω από πλάκα. Διακρίνονται τρεις περιοχές. Ο οριζόντιος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

Με βάση το Σχήμα 4.20, διακρίνονται οι εξής περιοχές:

- Στρωτό υπόστρωμα (“Laminar sublayer”):

$$0 < y^+ < 5, \quad u^+ = y^+, \quad \mu \gg \mu_t \quad (4.81)$$

- Ενδιάμεση ζώνη (“Buffer zone”):

$$5 < y^+ < 30, \quad u^+ = 5 \log y^+ - 3,05, \quad \mu \approx \mu_t \quad (4.82)$$

- Πλήρως τυρβώδης περιοχή (“Fully turbulent”):

$$y^+ > 30, \quad u^+ = 2,5 \log y^+ + 5,5, \quad \mu \ll \mu_t \quad (4.83)$$

Οι τιμές στις ανωτέρω σχέσεις είναι προσεγγιστικές και προέρχονται από πειραματικά αποτελέσματα.

4.7.5 Τυρβώδης ροή σε επίπεδη επιφάνεια

Μία πειραματική προσέγγιση της κατανομής της ταχύτητας στο τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω από οριζόντια πλάκα, αποτελεί η ακόλουθη εκθετική μεταβολή:

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (4.84)$$

Το μοντέλο αυτό της μέσης ταχύτητας αποτυγχάνει στην επιφάνεια, όπου προβλέπει άπειρη τιμή για την παράγωγο $\partial \bar{u} / \partial y$. Η τυρβώδης, όμως, τάση $\mu_t (\partial \bar{u} / \partial y)$ μπορεί να είναι πεπερασμένη θεωρώντας ότι η τύρβη, και άρα ο συντελεστής μ_t εξασθενεί όσο πλησιάζουμε το στερεό όριο.

Η σχέση (4.50) συνδέει την μεταβολή του πάχους ορμής (δ_2) με την διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας (τ_w). Το πάχος ορμής για το τυρβώδες προφίλ υπολογίζεται αντικαθιστώντας την έκφραση για την ταχύτητα (4.84) στη σχέση (4.43):

$$\delta_2 = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy = \frac{7}{72} \delta \quad (4.85)$$

Η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας (τ_w) υπολογίζεται από την παρακάτω ημιεμπειρική σχέση:

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = 0,0233 \left(\frac{U_\infty \delta}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (4.86)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.85) και (4.86) στην (4.50) προκύπτει η παρακάτω κανονική διαφορική εξίσωση για το πάχος του τυρβώδους οριακού στρώματος:

$$\delta^{1/4} \frac{d\delta}{dx} = 0,240 \left(\frac{U_\infty}{\nu} \right)^{-1/4}$$

Ολοκληρώνοντας με δεδομένο ότι για $x = 0$ είναι $\delta = 0$, προκύπτει η λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\delta = 0,382 \cdot \left(\frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/5} \cdot x^{4/5}, \quad \text{ή} \quad \frac{\delta}{x} = \frac{0,382}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (4.87)$$

Το πάχος του τυρβώδους οριακού στρώματος αυξάνει κατά $x^{0,8}$. Συγκριτικά, αναφέρεται ότι το πάχος του *στρωτού* οριακού στρώματος μεταβάλλεται ως προς $x^{0,5}$. Δηλαδή, παρατηρείται ότι το τυρβώδες οριακό στρώμα μεγαλώνει σε πάχος περισσότερο σε σύγκριση με το στρωτό οριακό στρώμα ταχύτητας.

Η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας (τ_w) υπολογίζεται ως συνάρτηση της συντεταγμένης x αντικαθιστώντας τη σχέση (4.87) στην (4.86) και προκύπτει:

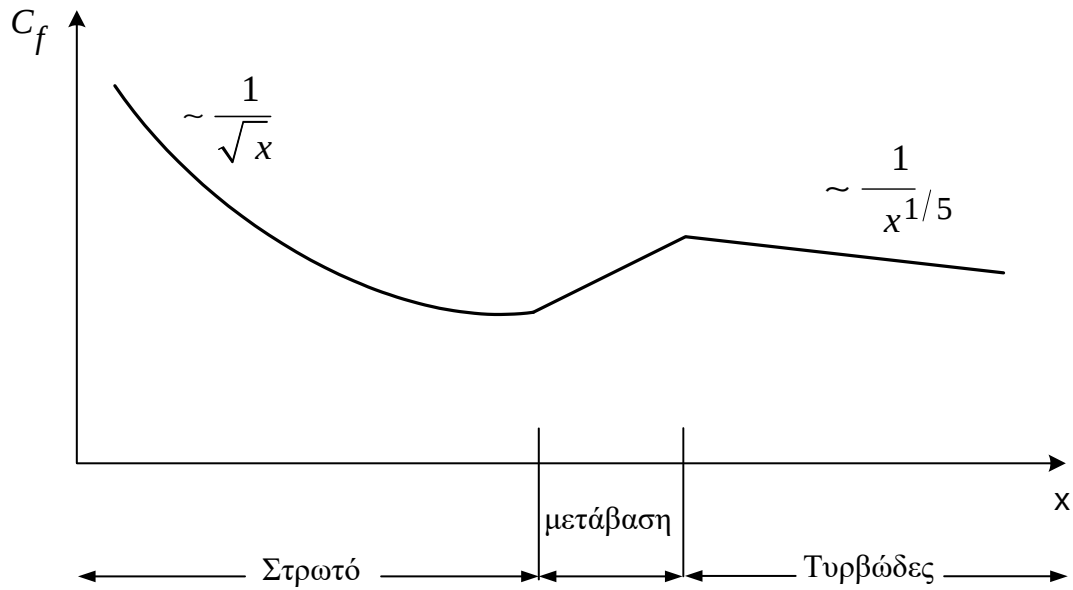
$$\tau_w = 0,0297 \rho U_\infty^2 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5} \quad (4.88)$$

Ο τοπικός συντελεστής τριβής είναι:

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{0,0594}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (4.89)$$

, σχέση η οποία προσεγγίζει ικανοποιητικά και πειραματικά δεδομένα για τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη επιφάνεια.

Στο Σχήμα 4.21 παρουσιάζεται ποιοτικά η μεταβολή του συντελεστή τριβής (C_f) συναρτήσει της εξέλιξης του αρχικά στρωτού οριακού στρώματος πάνω σε επίπεδη επιφάνεια.



Σχήμα 4.21: Μεταβολή του τοπικού συντελεστή τριβής συναρτήσει της εξέλιξης του οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα.

Η ολική δύναμη τριβής στην επιφάνεια προκύπτει με βάση την (4.88):

$$F_{\tau} = \int_0^L \tau_w \cdot b dx = 0,037 \rho U_{\infty}^2 \frac{Lb}{\text{Re}_L^{1/5}},$$

όπου L είναι το μήκος της πλάκας και b το εκπέτασμά της.

Ο συντελεστής τριβής ή ισοδύναμα της αντίστασης (D) στην κίνηση της πλάκας με ταχύτητα U_{∞} είναι:

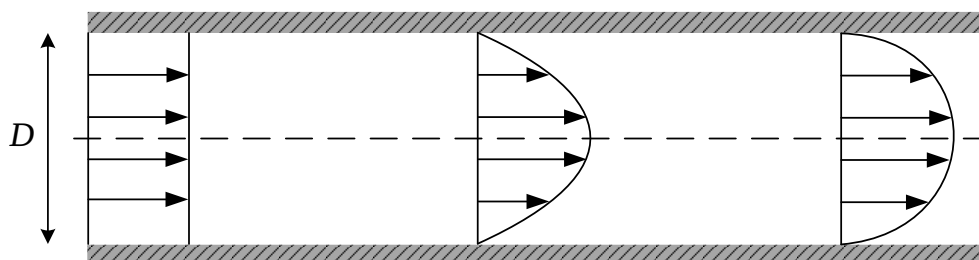
$$C_D = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} \quad (4.90)$$

4.7.6 Τυρβώδης ροή σε αγωγούς

Η ροή μέσα σε έναν ευθύγραμμο αγωγό κυκλικής διατομής διαμέτρου D και ακτίνας R , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.22, εξελίσσεται σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε κάποια απόσταση από την είσοδο του αγωγού. Ανάλογα με τον αριθμό *Reynolds* με βάση τη διάμετρο του αγωγού (Re_D), η ροή

εξελίσσεται σε πλήρως τυρβώδη ή παραμένει στρωτή. Πειραματικά έχει παρατηρηθεί ότι η ροή είναι τυρβώδης στον αγωγό όταν ο αριθμός Reynolds με βάση την διάμετρο D είναι:

$$\text{Re}_D \cong 2300 \quad (4.91)$$



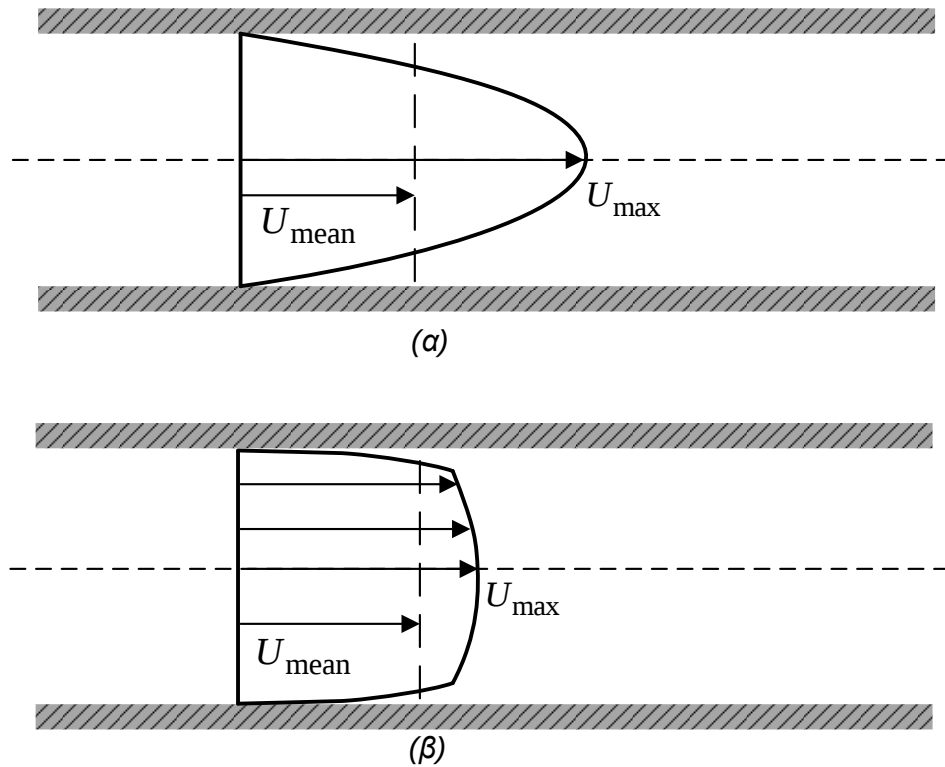
Σχήμα 4.22: Εξέλιξη της ροής μέσα σε ευθύγραμμο αγωγό με κυκλική διατομή.

Ο κρίσιμος αυτός αριθμός Reynolds εξαρτάται από την ομοιομορφία της εισερχόμενης ροής καθώς και από την τραχύτητα της επιφάνειας.

Στην περίπτωση που η ροή είναι τυρβώδης μέσα στον αγωγό, μπορεί η μεταβολή της ταχύτητας να προσεγγιστεί ως εκθετική όπως και στην επίπεδη επιφάνεια. Συγκεκριμένα:

$$\frac{u}{U_{\max}} = \left(\frac{R-r}{R} \right)^{1/7} \quad (4.92)$$

Για τη μέση ταχύτητα της ροής στην περίπτωση αυτή ισχύει: $U_{\text{mean}} \approx 0.8 U_{\max}$, ενώ για τη στρωτή ροή η μέση τιμή είναι το μισό της μέγιστης. Δηλαδή, το προφίλ της ταχύτητας στην τυρβώδη ροή είναι πιο «γεμάτο» σε σύγκριση με το προφίλ για τη στρωτή ροή, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.23.



Σχήμα 4.23: Σύγκριση των προφίλ ταχύτητας (α) στρωτής, και (β) τυρβώδους ροής σε κυκλικό αγωγό για την ίδια παροχή μάζας.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο ορίστηκε ο συντελεστής επιδερμικής τριβής ή συντελεστής *Fanning* ως:

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_{mean}^2}$$

όπου τ_w είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα του αγωγού.

Επίσης ορίστηκε ο συντελεστής τριβής *Darcy* ως:

$$\Lambda = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho U_{mean}^2}$$

όπου Δp είναι η πτώση πίεσης λόγω τριβής για ροή σε αγωγό μήκους L και διαμέτρου D .

Στην στρωτή ροή στον κυκλικό αγωγό έχουμε: $C_f = 16/\text{Re}_D$ και $\Lambda = 64/\text{Re}_D$. Οι δυο συντελεστές συνδέονται με τη σχέση $\Lambda = 4C_f$, η οποία ισχύει και για τυρβώδη ροή.

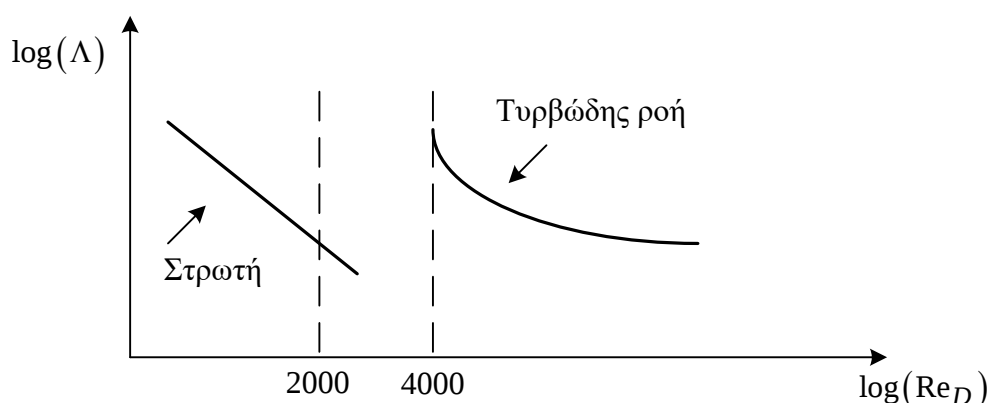
Με βάση πειράματα, προκύπτουν προσεγγίσεις του *συντελεστή τριβής Darcy* (Λ) σε σχέση με τον αριθμό Reynolds (Re_D) για τυρβώδη ροή. Η παρακάτω έκφραση είναι μια απλοποίηση τέτοιων σχέσεων για λεία τοιχώματα αγωγού:

$$\Lambda = 0,316 \cdot Re_D^{-1/4}, \quad 4000 < Re_D < 10^5 \quad (4.93)$$

Ο *συντελεστής επιδερμικής τριβής* υπολογίζεται στο ίδιο εύρος Re_D ως $C_f = \Lambda/4$, αντικαθιστώντας τον Λ από την ανωτέρω εξίσωση.

Πρέπει να τονιστεί ότι οι συντελεστές τριβής Λ και C_f του αγωγού στην περίπτωση της τυρβώδους ροής εξαρτώνται σημαντικά από την *τραχύτητα* της επιφάνειας του τοιχώματος.

Στο Σχήμα 4.24 παριστάνεται ποιοτικά η μεταβολή του *συντελεστή τριβής Darcy* (Λ) συναρτήσει του αριθμού Reynolds με βάση τη διάμετρο του αγωγού. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται *διάγραμμα Moody*. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση της στρωτής ροής η κλίση της μεταβολής είναι πιο μεγάλη σε σύγκριση με αυτή της τυρβώδους.



Σχήμα 4.24: Διάγραμμα Moody για τη ροή μέσα σε ευθύγραμμο αγωγό κυκλικής διατομής. Η καμπύλη στην τυρβώδη περιοχή εξαρτάται από την *τραχύτητα* της επιφάνειας.

Βιβλιογραφία

1. F. M. White, “Fluid Mechanics”, Mc Graw-Hill, fourth edition, 1999.
2. J. D. Anderson, Jr., “Fundamentals of Aerodynamics”, Mc Graw-Hill, third edition, 2001.
3. A. Alexandrou, “Principles of Fluid Mechanics”, Prentice Hall, 2001.
4. P. M. Gerhart, R. J. Gross, J. I. Hichstein, “Fundamentals of Fluid Mechanics”, Addison-Welley, second edition, 1992.
5. R.W. Fox, A.T McDonald, P. J. Prichard, “Fox and McDonald’s introduction to fluid mechanics”, John Wiley & Sons, eighth edition, 2011.
6. H. Schlichting, K. Gersten, “Boundary-layer theory”, Springer, eighth edition, 2000

4.8 Παραδείγματα – Ασκήσεις

4.8.1 Δύναμη για την κίνηση κύβου σε επιφάνεια λαδιού

Ένας κύβος με εμβαδόν επιφάνειας ίσο με $2 \times 2 \text{ m}^2$, επιπλέει πάνω από μία επιφάνεια λαδιού. Να βρεθεί η δύναμη που απαιτείται, ώστε ο κύβος να κινηθεί με ταχύτητα $U = 0,05 \text{ cm/sec}$, αν το ιξώδες και η πυκνότητα του λαδιού είναι $\mu = 8,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{sec}$ και $\rho = 860 \text{ kg/m}^3$, αντίστοιχα.

Λύση

Αρχικά εξετάζεται αν η ροή στην επιφάνεια του κύβου είναι στρωτή ή τυρβώδης.

$$\text{Re}_L = \frac{U \cdot L}{\mu/\rho} = \frac{10 \cdot 10^{-4}}{9,42 \cdot 10^{-6}} = 106,2$$

Άρα, η ροή είναι στρωτή, συνεπώς με βάση τη λύση του Blasius ο συντελεστής αντίστασης είναι ίσος με:

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} = 0,129$$

Η δύναμη που απαιτείται για να κινηθεί ο κύβος με τη συγκεκριμένη ταχύτητα, είναι ίση με την αντίσταση που αναπτύσσεται στον κύβο λόγω τριβής :

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A = 55,47 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

4.8.2 Υπολογισμός πάχους μετατόπισης και ορμής

Θεωρείται το ακόλουθο προφίλ ταχύτητας μέσα σε στρωτό οριακό στρώμα: $\frac{u}{U_\infty} = a \frac{y}{\delta}$.

- 1) Να υπολογιστούν τα πάχη δ_1 και δ_2 , για ασυμπίεστη ροή.
- 2) Να βρεθούν τιμές του a για τις οποίες το προφίλ ταχύτητας προσεγγίζει αυτό της λύσης Blasius. Για αυτές τις τιμές του a , ποιο είναι το σφάλμα για τα πάχη δ_1 και δ_2 , σε σχέση με τη λύση Blasius;

Λύση

- 1) Το πάχος δ_1 , για ασυμπίεστη ροή, ορίζεται με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\delta_1 \equiv \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

και με αντικατάσταση του προφίλ ταχύτητας και ολοκληρώνοντας, προκύπτει ότι:

$$\delta_1 = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \delta \quad (1)$$

Το πάχος δ_2 , για ασυμπίεστη ροή, ορίζεται με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\delta_2 \equiv \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\delta_2 = a \frac{\delta}{2} - a^2 \frac{\delta}{3} \quad (2)$$

2) Αρχικά, για τη λύση Blasius η ταχύτητα έχει την τιμή $u = U_\infty$ όταν $y = \delta$. Με βάση αυτό το κριτήριο, το προφίλ της ταχύτητας που δίνεται προσεγγίζει αυτό της λύσης Blasius για $a = 1$ και οι τιμές για τα πάχη από τις Εξισώσεις (1) και (2) είναι: $\delta_1 = 0,5\delta$ και $\delta_2 = 0,167\delta$.

Η λύση Blasius για τα πάχη δ_1 και δ_2 , δίνει αντίστοιχα:

$$\delta_{1, Bl.} = 1,72 \sqrt{\frac{v \cdot x}{U_\infty}} = \frac{1,72}{5} \delta = 0,344\delta \quad (3)$$

$$\delta_{2, Bl.} = 0,664 \sqrt{\frac{v \cdot x}{U_\infty}} = \frac{0,664}{5} \delta = 0,133\delta \quad (4)$$

Τα ποσοστιαία σφάλματα για τα πάχη δ_1 και δ_2 μπορούν να οριστούν ως:

$$E_{\delta_1} = \frac{|\delta_1 - \delta_{1, Bl.}|}{\delta_{1, Bl.}} \cdot 100\% \quad (5)$$

$$E_{\delta_2} = \frac{|\delta_2 - \delta_{2, Bl.}|}{\delta_{2, Bl.}} \cdot 100\% \quad (6)$$

και προκύπτει ότι $E_{\delta_1} = 45,3\%$ και $E_{\delta_2} = 25,3\%$.

Τιμές της σταθεράς a μπορούν φυσικά να βρεθούν και με κριτήριο τη σύμπτωση είτε του πάχους δ_1 είτε του δ_2 με αυτά της λύσης Blasius, δηλαδή την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων E_{δ_1} και E_{δ_2} .

Με βάση τα πάχος δ_1 , από τις Εξισώσεις (1) και (3) προκύπτει ότι η σταθερά a πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$1 - \frac{a}{2} = \frac{1,72}{5}$$

της οποίας η λύση είναι η τιμή $a = 1,312$.

Με βάση το πάχος δ_2 , από τις Εξισώσεις (2) και (4) προκύπτει ότι η σταθερά a πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{0,664}{5}$$

Οι λύσεις της ανωτέρω εξίσωσης είναι οι τιμές $a_1 = 0,346$ και $a_2 = 1,155$.

Οι τιμές των σφαλμάτων E_{δ_1} και E_{δ_2} υπολογίζονται για όλες τις ανωτέρω τιμές του a μέσω των Εξισώσεων (1) έως (6) και παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα:

Τιμή της σταθεράς a	Ποσοστιαίο σφάλμα E_{δ_1}	Ποσοστιαίο σφάλμα E_{δ_2}
0,346	140,4 %	0 %
1	45,3 %	25,3 %
1,155	22,8 %	0 %
1,312	0 %	38,2 %

Πίνακας. Τιμές των ποσοστιαίων σφαλμάτων ως προς τη λύση Blasius για το πάχος δ_1 (E_{δ_1}) και το πάχος δ_2 (E_{δ_2}) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς a .

4.8.3 Ανάλυση προφίλ οριακού στρώματος

Από πειραματικά αποτελέσματα για ασυμπίεστη στρωτή ροή πάνω από οριζόντια πλάκα, προέκυψε ότι το προφίλ της ταχύτητας μπορεί να προσεγγισθεί με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{u}{U_{\infty}} = a \left(\frac{y}{\delta} \right) + b \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

Με βάση την παραπάνω σχέση να υπολογιστούν οι σταθερές a, b από τις οριακές συνθήκες στα άκρα του οριακού στρώματος. Εν συνεχεία να προσδιοριστεί το πάχος του οριακού στρώματος, το πάχος μετατόπισης, το πάχος ορμής, η διατμητική τάση πάνω στην πλάκα και ο ολικός συντελεστής αντίστασης και να συγκριθούν με τη λύση Blasius.

Λύση

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (1)$$

$$y = \delta: \quad u = U_{\infty}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Προφανώς, η συνθήκη (1), ικανοποιείται άμεσα από την σχέση της ταχύτητας. Με βάση την (2) ωστόσο μπορούν να προσδιοριστούν οι σταθερές a, b . Ισχύει λοιπόν, με εφαρμογή της (2):

$$a + b = 1$$

$$a + 3b = 0$$

και η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει: $a = 3/2$, $b = -1/2$. Οπότε η εξίσωση της ταχύτητας είναι τελικά ίση με:

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

Για να υπολογίσουμε το πάχος του οριακού στρώματος παίρνουμε την σχέση που συνδέει το πάχος ορμής με τη διατμητική τάση πάνω στο τοίχωμα της πλάκας:

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} \quad (3)$$

όπου,

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{\delta}$$

και

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy$$

Με αντικατάσταση των τελευταίων σχέσεων στην (3) και λαμβάνοντας υπ' όψη το προφίλ της ταχύτητας, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{3\mu U_\infty}{2\delta} &= \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \cdot \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy \Rightarrow \\ \frac{3\mu U_\infty}{2\delta} &= \frac{39\rho U_\infty^2}{280} \frac{\partial \delta}{\partial x} \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{280\nu}{13U_\infty} dx &= 2\delta d\delta \Rightarrow \frac{280\nu}{13U_\infty} x + C = \delta^2 \Rightarrow \\ \delta(x) &= \sqrt{\frac{280 \cdot \nu \cdot x}{13 \cdot U_\infty}} + C \end{aligned}$$

όπου C η σταθερά ολοκλήρωσης και προφανώς ίση με μηδέν εφόσον το πάχος του οριακού στρώματος στην ακμή προσβολής της πλάκας είναι μηδέν. Συνεπώς,

$$\delta(x) = \frac{4,64 \cdot x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Παρατηρείται ότι το πάχος είναι περίπου 7% μικρότερο από το πάχος που δίνει η λύση Blasius.

Το πάχος μετατόπισης υπολογίζεται με εφαρμογή του ορισμού του:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy = \frac{3}{8} \delta = 1,74 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι 1% μεγαλύτερο από αυτό που δίνει η λύση Blasius.

Ομοίως, από τον ορισμό του πάχους ορμής προκύπτει ότι:

$$\delta_2 = 0,646 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

το οποίο είναι 2,7% μικρότερο από αυτό που προκύπτει από την λύση Blasius.

Η διατμητική τάση πάνω στην πλάκα προκύπτει είτε από τον ορισμό της ως:

$$\tau_w = \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{\delta} = 0,323 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

για $x > 0$, αποτέλεσμα το οποίο είναι 2,7% χαμηλότερο από τη λύση Blasius.

Τέλος, ο ολικός συντελεστής αντίστασης είναι ίσος με:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} = \frac{\int_0^L \tau_w b dx}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L} \Rightarrow$$
$$C_D = \frac{1,292}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

αποτέλεσμα το οποίο διαφέρει επίσης κατά 2,7% από τη λύση Blasius.

4.8.4 Πάχος οριακού στρώματος σε ροή νερού πάνω από πλάκα

Θεωρείται ροή νερού πάνω από επίπεδη πλάκα. Να βρεθεί σε ποια απόσταση το πάχος του οριακού στρώματος είναι ίσο με $\delta = 2 \text{ cm}$. Το νερό βρίσκεται στους 20°C και η ταχύτητα της ελεύθερης ροής είναι $U_\infty = 50 \text{ m/s}$.

Λύση

Με βάση τη λύση Blasius το πάχος του οριακού στρώματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \Rightarrow x = 796 \text{ m}$$

Η λύση Blasius ισχύει μόνο για στρωτή ροή, συνεπώς πρέπει να εξεταστεί αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης.

$$\text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{50 \times 796}{1,005 \times 10^{-6}} = 3,96 \times 10^{10}$$

ο οποίος είναι πολύ μεγάλος για στρωτή ροή.

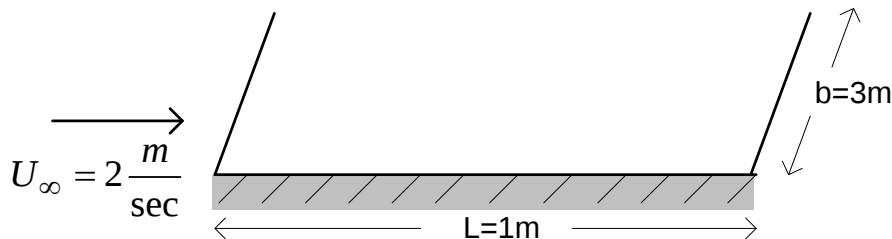
Άρα η ροή είναι τυρβώδης σε μεγάλο μέρος της επιφάνειας, οπότε χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη ημιεμπειρική σχέση για το πάχος του τυρβώδους οριακού στρώματος:

$$\delta = 0,382 \left(\frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5} \Rightarrow x = 2,10 \text{ m}$$

Για αυτήν την απόσταση προκύπτει $\text{Re}_x = 1,04 \cdot 10^8$ που επαληθεύει την υπόθεση της τυρβώδους ροής. Παρατηρούμε ότι το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνει πολύ πιο γρήγορα στην τυρβώδη απ' ό τι στην στρωτή ροή. Στην παρούσα προσέγγιση αγνοήθηκε η μικρή περιοχή στην αρχή της πλάκας στην οποία η ροή είναι ακόμα στρωτή.

4.8.5 Ροή διαφορετικών ρευστών πάνω από πλάκα

Θεωρείται η ροή ρευστού πάνω από την πλάκα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Να θεωρηθεί το ρευστό ότι είναι:

- i. Αέρας ($\nu = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$)
- ii. Νερό ($\nu = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$)

και για κάθε περίπτωση να υπολογιστούν το πάχος του οριακού στρώματος και ο τοπικός συντελεστής τριβής στο τέλος της πλάκας.

Λύση

- i) Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds της ροής

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = 137000$$

Συνεπώς, η ροή είναι στρωτή και με βάση τη λύση Blasius, ισχύει:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = 13,5 \text{ mm}$$
$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_L}} = 1,8 \times 10^{-3}$$

- ii) Στην περίπτωση του νερού έχουμε:

$$Re_L = 1,96 \times 10^6$$

δηλαδή τυρβώδη ροή.

Επομένως, το πάχος του οριακού στρώματος δίνεται από την σχέση

$$\delta = 0,382 \left(\frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5} = 21,1 \text{ mm}$$

και ο συντελεστής τριβής τυρβώδους ροής είναι:

$$c_f = \frac{0,0594}{\text{Re}_L^{1/5}} = 3,28 \times 10^{-3}$$

Παρατηρούμε στην τυρβώδη ροή έχουμε μεγαλύτερο πάχος οριακού στρώματος και μεγαλύτερο συντελεστή τριβής. Στην περίπτωση αυτή αγνοήθηκε η αρχική περιοχή στρωτής ροής.

4.8.6 Αντίσταση σε πλάκα για στρωτή και τυρβώδη ροή

Θεωρείται οριζόντια πλάκα σε ροή αέρα ταχύτητας 100 m/sec . Το μήκος της πλάκας (L) είναι 2m και το πλάτος της (b) 20m . Δίνονται $\rho = 1,22 \text{ kg / m}^3$ και $\mu = 1,79 \times 10^{-5} \text{ kg sec / m}$.

Να υπολογιστεί η αντίσταση στην πλάκα θεωρώντας στρωτή ροή, και εν συνεχεία τυρβώδη ροή. Τέλος, να υπολογιστεί η αντίσταση θεωρώντας αρχικά στρωτή και μετά τυρβώδη ροή πάνω στην πλάκα.

Λύση

Ο αριθμός Reynolds της ροής είναι $Re = 1,36 \times 10^7$. Ο συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή δίνεται από τη λύση *Blasius*:

$$C_{Dl} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} = 3,60 \times 10^{-4}$$

οπότε η αντίσταση είναι ίση με:

$$D_l = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L b C_{Dl} = 87,8 \text{ N}$$

Στην περίπτωση της τυρβώδους ροής ο συντελεστής αντίστασης είναι:

$$C_{Dt} = \frac{0,074}{Re_L^{0,2}} = 2,77 \times 10^{-3}$$

και άρα η αντίσταση στην πλάκα είναι:

$$D_t = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L b C_{Dt} = 675,9 \text{ N}$$

Παρατηρείται ότι $\frac{D_t}{D_l} \cong 7,7$.

Η πραγματική ροή είναι στρωτή αρχικά και έπειτα γίνεται τυρβώδης. Υποθέτουμε απότομη μετάβαση στην τυρβώδη ροή, το οποίο σημαίνει μηδενικό μήκος στην πλάκα της περιοχής μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη. Υπολογίζουμε το σημείο μετάβασης της ροής, δηλαδή τη θέση όπου $Re = 5 \times 10^5$ ως

$$5 \times 10^5 = \frac{UL_{tr}}{\mu / \rho} \Rightarrow L_{tr} = 0,073m$$

Επομένως, η αντίσταση του τμήματος όπου η ροή είναι στρωτή είναι

$$D_1 = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L_{tr} b \frac{1,328}{\sqrt{Re_{tr}}} = 16,72N$$

Για να βρεθεί η αντίσταση του τμήματος στο οποίο η ροή είναι τυρβώδης κάνουμε την θεώρηση ότι αυτή είναι ίση με την αντίσταση αν ήταν όλη η ροή τυρβώδης (675,9 N) και αφαιρούμε την «τυρβώδη» αντίσταση του αρχικού τμήματος μήκους L_{tr} .

Η αντίσταση αυτή είναι:

$$D_2 = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L b \frac{0,074}{Re_L^{0,2}} - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L_{tr} b \frac{0,074}{Re_{tr}^{0,2}} = 675,9 - 47,8 = 628,1 N$$

Οπότε και ακριβής λύση της συνολικής αντίστασης είναι:

$$D = D_1 + D_2 = 644,8 N$$

Μια απλούστερη θεώρηση από την παραπάνω είναι να θεωρήσουμε μόνο την αντίσταση του τυρβώδους τμήματος χρησιμοποιώντας απ' ευθείας την αντίσταση της τυρβώδους ροής και την επιφάνεια της τυρβώδους περιοχής ως:

$$D = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (L - L_{tr}) b \frac{0,074}{Re_{(L-L_{tr})}^{0,2}} = 655,8 N$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα της θεώρησης τυρβώδους ροής πάνω σε ολόκληρη την πλάκα και της προσέγγισης συγκριτικά με την ακριβή λύση είναι 4,8% και 1,7% αντίστοιχα, που επιβεβαιώνει την συνήθη προσέγγιση να θεωρούμε όλη τη ροή τυρβώδη στην πλάκα για περιπτώσεις όπου η στρωτή περιοχή είναι σχετικά μικρή.

4.8.7 Πτήση του αεροσκάφους μυϊκής πρόωσης «Δαίδαλος»

Το 1988 το αεροσκάφος μυϊκής πρόωσης Δαίδαλος (“human powered aircraft”) πέταξε με μέση ταχύτητα $18,5 \text{ miles/h}$, καλύπτοντας τη διαδρομή Ηράκλειο – Σαντορίνη συνολικής απόστασης 74 miles , σημειώνοντας νέο παγκόσμιο ρεκόρ απόστασης πτήσης με μυϊκή πρόωση. Το ύψος πτήσης ήταν 6 m , όπου η μέση θερμοκρασία την ημέρα της πτήσης ήταν 26°C . Η πτέρυγα του αεροσκάφους είχε μέση χορδή (c_w) $2,9\text{ft}$ και εκπέτασμα (b_w) 114ft , ενώ το κουβούκλιο του πιλότου (άτρακτος) είχε μήκος (c_f) 9ft και ύψος (b_f) 4ft . Να βρεθεί πόσες θερμίδες καταναλώθηκαν από τον ποδηλάτη λόγω της αντίστασης τριβής του αεροσκάφους.

Λύση

Για τις συνθήκες πτήσης, το ιξώδες και η πυκνότητα του αέρα είναι ίσες αντίστοιχα με $\nu = 1,56 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ και $\rho = 1,184 \text{ kg/m}^3$.

Η ταχύτητα του αεροσκάφους είναι:

$$U = 18,5 \frac{1609}{3600} \text{ m/sec} = 8,27 \text{ m/sec}$$

A) Υπολογισμός αντίστασης πτέρυγας:

Ο αριθμός Reynolds για τη ροή πάνω στην πτέρυγα είναι:

$$\text{Re}_w = \frac{U \cdot c_w}{\nu} = \frac{8,27 \times 2,9 \times 0,305}{1,56 \times 10^{-5}} = 4,69 \times 10^5$$

Επομένως η ροή πάνω στην πτέρυγα είναι στρωτή. Θεωρώντας την πτέρυγα ως επίπεδη πλάκα και προσεγγίζοντας τη αντίστασή της με αυτή της στρωτής ροής κατά μήκος των δυο πλευρών της πτέρυγας, είναι για την αντίσταση:

$$D_w = 2 \cdot C_D \frac{1}{2} \rho U^2 b_w c_w = \frac{1,328}{\sqrt{4,69 \cdot 10^5}} 1,184 \times 8,27^2 \times 2,9 \times 114 \times 0,305^2 \Rightarrow$$

$$D_w = 4,83 N$$

B) Υπολογισμός αντίστασης ατράκτου:

$$Re_f = \frac{U \cdot c_f}{\nu} = \frac{8,27 \cdot 9 \cdot 0,305}{1,56 \cdot 10^{-5}} = 1,45 \times 10^6$$

Επομένως η ροή πάνω στην άτρακτο είναι τυρβώδης.

Υπολογίζουμε το σημείο μετάβασης της ροής, δηλαδή τη θέση όπου $Re = 5 \times 10^5$ ως:

$$5 \times 10^5 = \frac{U c_{tr}}{\nu} \Rightarrow c_{tr} = 0,94 m$$

Επειδή το μεγαλύτερο μέρος της ροής στην άτρακτο ($\sim 70\%$) είναι τυρβώδης, θα προσεγγίσουμε τη αντίστασή της με αυτή της τυρβώδους ροής σε όλο το μήκος των δυο πλευρών της ατράκτου:

$$D_f = 2 \cdot C_D \frac{1}{2} \rho U^2 b_f c_f = 2 \frac{0,074}{(1,45 \times 10^6)^{0,2}} \frac{1}{2} 1,184 \times 8,27^2 \times 9 \times 4 \times 0,305^2 \Rightarrow$$

$$D_f = 1,17 N$$

Επομένως η συνολική αντίσταση του αεροσκάφους είναι:

$$D_{tot} = D_w + D_f = 4,83 + 1,17 = 6 N$$

Το έργο που δαπανήθηκε από τον ποδηλάτη κατά τη διαδρομή (S) λόγω της αντίστασης τριβής του αεροσκάφους είναι:

$$W = D_{tot} \cdot S = 6 N \times 74 \times 1609 m = 714,4 \text{ Kjoule} \quad \text{ή} \quad 170 \text{ Kcal}$$