

---

# 2 Ιδιότητες των Αριθμητικών Σχημάτων

---

## Περιεχόμενα

2	Ιδιότητες των Αριθμητικών Σχημάτων .....	24
2.1	Συνθήκη Συνέπειας ("Consistency Condition").....	25
2.2	Η Μείωση της Ακρίβειας στο Ανομοιόμορφο Αριθμητικό Πλέγμα .....	27
2.3	Το είδος του Σφάλματος Αποκοπής.....	30
2.4	Η Τροποποιημένη Εξίσωση του Σφάλματος Αποκοπής.....	31
2.5	Συνθήκη Ευστάθειας ("Stability Condition") .....	33
2.6	Η Ευστάθεια Επίλυσης της Εξίσωσης Διάχυσης.....	36
2.7	Η Ευστάθεια Επίλυσης της Εξίσωσης Μεταφοράς .....	38
2.8	Σύγκριση Κριτηρίων Ευστάθειας "CFL" και Διάχυσης .....	44
2.9	Η Σύγκλιση Αριθμητικού Σχήματος.....	45
2.10	Παραδείγματα Αριθμητικών Σχημάτων για την Κυματική Εξίσωση.....	46

Η ακρίβεια ("accuracy") ενός αριθμητικού σχήματος καθορίζεται κατά την δημιουργία του σύμφωνα με τις προσεγγίσεις των παραγώγων της διαφορικής εξίσωσης. Ο μεγαλύτερος όρος ("κυρίαρχος") του σφάλματος αποκοπής καθορίζει την τάξη ακρίβειας.

Οι επόμενες ιδιότητες που πρέπει να εξεταστούν αφορούν: (i) την προσέγγιση της Διαφορικής Εξίσωσης από την Εξίσωση Διαφορών, (ii) την ευστάθεια επίλυσης του αριθμητικού σχήματος, καθώς και (iii) το κόστος των υπολογισμών που απαιτεί το σχήμα να εκτελεστούν.

## 2.1 Συνθήκη Συνέπειας ("Consistency Condition")

Η Συνθήκη Συνέπειας ("Consistency Condition") εκφράζει ότι ένα Αριθμητικό Σχήμα (η Εξίσωση Διαφορών " FDE ") θα πρέπει να τείνει στην Διαφορική Εξίσωση (PDE) όσο το χρονικό και χωρικό πλέγμα πυκνώνει ( $\Delta t$ ,  $\Delta x$  τείνουν στο μηδέν).

Επομένως, ένα σχήμα είναι Συνεπές εάν το Σφάλμα Αποκοπής (TE) τείνει στο μηδέν όταν το χρονικό και το χωρικό βήμα τείνουν στο μηδέν. Συμβολικά γράφουμε ως εξής:

$$PDE = FDE + TE$$

Επομένως, για να έχουμε

$$FDE \rightarrow PDE$$

θα πρέπει το σφάλμα αποκοπής να τείνει στο μηδέν:

$$TE \rightarrow 0$$

Το σφάλμα είναι τάξης μεγέθους  $O[(\Delta t)^l, (\Delta x)^m]$ , το οποίο σημαίνει ότι για να μπορεί να μηδενιστεί, θα πρέπει οι ακέραιοι  $l$  και  $m$  να μην είναι μηδέν.

**Παράδειγμα 2.1:** Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση της Διάχυσης με χρήση FTCS σχήματος, και να βρεθεί το σφάλμα αποκοπής.

Η εξίσωση της Διάχυσης είναι: :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Π2.1.1})$$

- Προς τα εμπρός διαφύριση για την προσέγγιση της  $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i \frac{\Delta t}{2} - \dots \quad (\text{Π2.1.2})$$

- Κεντρική διαφύριση για την προσέγγιση της  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_i \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \quad (\text{Π2.1.3})$$

Αντικαθιστώντας στην (Π2.1.1) την (Π2.1.2) και την (Π2.1.3) προκύπτει :

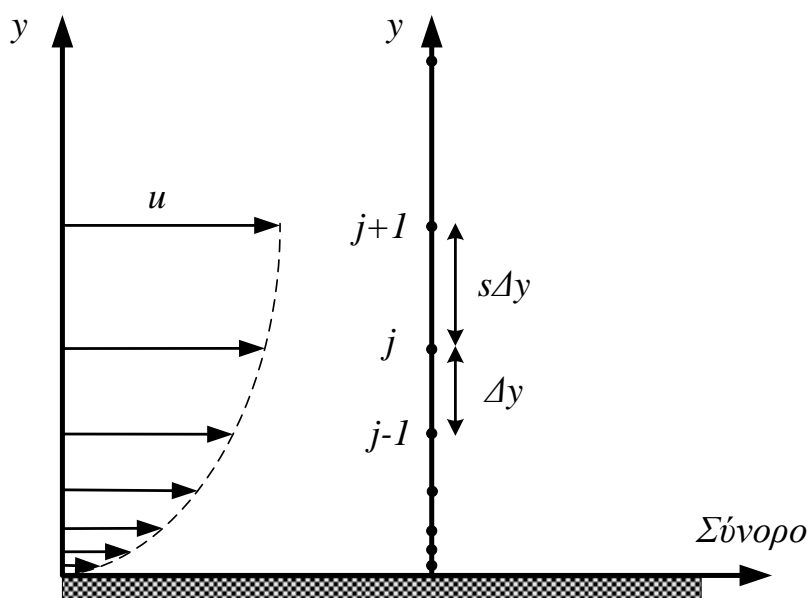
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{Μερική Διαφορική Εξίσωση}} = \underbrace{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{v}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}_{\text{Εξίσωση Πεπερασμένων Διαφορών}} + \underbrace{\left( - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i \frac{\Delta t}{2} + v \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_i \frac{(\Delta x)^2}{12} \right)}_{\text{Σφάλμα Αποκοπής (TE)}} + \dots$$

Είναι δηλαδή,  $TE = O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ .

Το σχήμα ικανοποιεί την Συνθήκη της Συνέπειας διότι  $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} TE = 0$ .

## 2.2 Η Μείωση της Ακρίβειας στο Ανομοιόμορφο Αριθμητικό Πλέγμα

Το Σφάλμα Αποκοπής ("Truncation Error") συζητήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, στο οποίο όλες οι εφαρμογές αφορούσαν την εύρεση του σφάλματος σε ομοιόμορφο πλέγμα. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι στην πράξη, οι εφαρμογές αφορούν κυρίως ανομοιόμορφο πλέγμα. Το Σχήμα 2.1 αναφέρεται σε ροή πάνω από μια επίπεδη πλάκα. Απεικονίζεται τυπικό προφίλ στρωτού οριακού στρώματος, καθώς και η κατανομή των σημείων του αριθμητικού πλέματος, η οποία είναι ανομοιόμορφη. Το μέγεθος των διαστημάτων  $\Delta y$  αυξάνει γεωμετρικά με συντελεστή  $s$ . Η ανομοιομορφία αυτή μειώνει συχνά την τάξη ακρίβειας του αριθμητικού σχήματος.



**Σχήμα 2.1** Ανομοιόμορφο πλέγμα για την διακριτοποίηση ροής πάνω από επίπεδη πλάκα.

Ένα ενδεικτικό παράδειγμα της μείωσης της ακρίβειας στο ανομοιόμορφο πλέγμα παρουσιάζεται μέσω του υπολογισμού της πρώτης παραγώγου  $\frac{\partial u}{\partial y}$  με κεντρική διαφόριση, χρησιμοποιώντας ως υπολογιστική κυψέλη τα σημεία  $j-1$ ,  $j$ ,  $j+1$  του Σχήματος 2.1.

Το ανάπτυγμα Taylor για το σημείο  $j+1$  ως προς το σημείο  $j$  είναι:

$$u_{j+1} = u_j + (s \Delta y) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_j + \frac{(s \Delta y)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_j + \frac{(s \Delta y)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_j + \dots \quad (2.1)$$

Το ανάπτυγμα Taylor για το σημείο  $j-1$  ως προς το σημείο  $j$  είναι:

$$u_{j-1} = u_j - \Delta y \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_j + \frac{(\Delta y)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_j - \frac{(\Delta y)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_j + \dots \quad (2.2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (2.1) και (2.2), έχουμε:

$$u_{j+1} - u_{j-1} = (s+1) \Delta y \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_j + \frac{(s^2-1)(\Delta y)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_j + \frac{(s^3+1)(\Delta y)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_j + \dots$$

και λύνοντας ως προς  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_j$  προκύπτει τελικά:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_j = \underbrace{\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{(s+1)\Delta y}}_{\text{Πεπερασμένη Διαφορά}} + \underbrace{(-\Delta y) \frac{(s^2-1)}{2(s+1)} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_j - (\Delta y)^2 \frac{(s^3+1)}{6(s+1)} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_j}_{\text{Σφάλμα Αποκοπής}} + \dots \quad (2.3)$$

Στην περίπτωση που το πλέγμα είναι ομοιόμορφο, ισχύει δηλαδή ότι  $s=1$ , η σχέση (2.3) γίνεται:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right)_j = \underbrace{\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta y}}_{\text{Πεπερασμένη Διαφορά}} + \underbrace{\frac{-(\Delta y)^2}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_j}_{\text{Σφάλμα Αποκοπής}} + \dots \quad (2.4)$$

Από την σχέση (2.4) παρατηρείται ότι στην περίπτωση που το πλέγμα είναι ομοιόμορφο ( $s=1$ ), το σφάλμα υπολογισμού της παραγώγου  $\frac{\partial u}{\partial y}$  με κεντρική διαφόριση είναι δεύτερης τάξης  $O(\Delta y)^2$ . Η χρήση ανομοιόμορφου πλέγματος ( $s \neq 1$ ), εισάγει έναν επιπλέον όρο σφάλματος, ο οποίος είναι πρώτης τάξης  $O(\Delta y)$ , όπως φαίνεται στην σχέση (2.3). Έτσι η δεύτερη τάξη ακρίβειας υπολογισμού της  $\frac{\partial u}{\partial y}$  με ομοιόμορφο πλέγμα υποβιβάζεται σε πρώτη τάξη ακρίβειας όταν χρησιμοποιείται ανομοιόμορφο πλέγμα.

### 2.3 Το είδος του Σφάλματος Αποκοπής

Η έκφραση του Σφάλματος Αποκοπής (TE) μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για την ποιότητα της λύσης. Ακολουθούν δύο βασικές ιδιότητες της λύσης που μπορούν να εξαχθούν από την μορφή του TE:

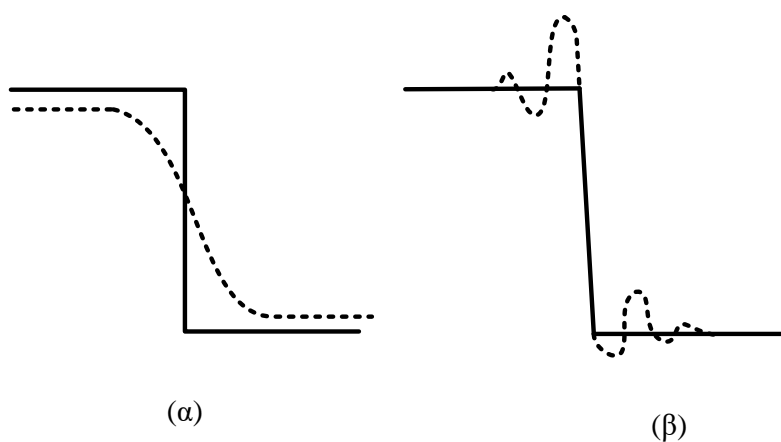
(i) Σφάλμα τύπου "*dissipation*"

Η ύπαρξη χωρικής παραγώγου δεύτερης τάξης στην έκφραση του TE, σημαίνει ότι το σχήμα διακριτοποίησης «εισήγαγε» τεχνητή συνεκτικότητα ("*artificial viscosity*").

(ii) Σφάλμα τύπου "*dispersion*"

Η ύπαρξη περιττών χωρικών παραγώγων στην έκφραση του TE έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ταλαντώσεων στην αριθμητική λύση .

Το Σχήμα 2.2 (α) απεικονίζει την επίδραση του σφάλματος τύπου "*dissipation*" στην αριθμητική λύση κύματος κρούσης (συνεχής γραμμή). Στο Σχήμα 2.2 (β) δείχνεται η αντίστοιχη επίδραση του σφάλματος τύπου "*dispersion*".



**Σχήμα 2.2** (α) Πραγματική λύση και η αντίστοιχη αριθμητική λύση με σφάλμα τύπου "*dissipation*", (β) η αντίστοιχη αριθμητική λύση με σφάλμα τύπου "*dispersion*".

Σε πολλές περιπτώσεις γίνεται σκόπιμα η εισαγωγή όρων τεχνητής συνεκτικότητας "*artificial viscosity*" για την σταθεροποίηση της λύσης.

## 2.4 Η Τροποποιημένη Εξίσωση του Σφάλματος Αποκοπής

Η αναγνώριση του τύπου σφάλματος και η πρόβλεψη της συγκεκριμένης επίπτωσής του στην αριθμητική λύση απαιτεί την έκφραση των κυρίαρχων όρων του TE σε μορφή χωρικών παραγώγων της λύσης.

Οι χρονικές παράγωγοι των πρώτων όρων στην έκφραση του TE αντικαθίστανται με χωρικές χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$\text{PDE} = \text{TE}$$

Η προκύπτουσα έκφραση του σφάλματος ονομάζεται «τροποποιημένη» εξίσωση του σφάλματος. Τα ανωτέρω δείχνονται με το παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα 2.2:** *Να βρεθεί να και να σχολιαστεί το Σφάλμα Αποκοπής για την κυματική εξίσωση με σχήμα διακριτοποίησης FTBS .*

### Λύση

Η κυματική εξίσωση  $u_t + c u_x = 0$  με διακριτοποίηση FTBS παίρνει την μορφή:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (\text{Π2.2.1})$$

*Βήμα 1<sup>ο</sup>* Η κανονική έκφραση του Σφάλματος Αποκοπής είναι:

$$\text{PDE} = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{c\Delta x}{2} u_{xx} + O\left[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2\right] + \dots \quad (\text{Π2.2.2})$$

*Βήμα 2<sup>ο</sup>* Εκφράζω την χρονική παράγωγο  $u_{tt}$  ως συνάρτηση χωρικών παραγώγων.

Παραγωγίζω την (Π2.2.2) ως προς  $t$ :

$$u_{tt} + c u_{xt} = -\frac{\Delta t}{2} u_{ttt} + \frac{\Delta x}{2} u_{xxt} \quad (\text{Π2.2.3})$$



Παραγωγίζω την (Π2.2.2) ως προς  $x$ :

$$u_{tx} + c u_{xx} = -\frac{\Delta t}{2} u_{ttx} + \frac{\Delta x}{2} u_{xxx} \quad (\text{Π2.2.4})$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (Π2.2.4) με  $(-c)$  και προσθέτοντάς την κατά μέλη με την (Π2.2.3) προκύπτει τελικά :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + O(\Delta t, \Delta x) \quad (\text{Π2.2.5})$$

*Βήμα 3<sup>ο</sup> Κατασκευή της Τροποποιημένης εξίσωσης*

Αντικαθιστώντας την (Π2.2.5) στην κανονική έκφραση του TE (Π2.2.2) προκύπτει:

$$u_t + c u_x = \frac{c \Delta x}{2} (1-C) u_{xx} - \frac{c (\Delta x)^2}{6} (2C^2 - 3C + 1) u_{xxx} \quad (\text{Π2.2.6})$$

όπου  $C \equiv \frac{c \Delta t}{\Delta x}$  είναι ο αριθμός CFL.

Παρατηρούμε ότι ο κυρίαρχος όρος  $\frac{c \Delta x}{2} (1-C) u_{xx}$  είναι τύπου "dissipation". Ο επόμενος όρος  $-\frac{c (\Delta x)^2}{6} (2C^2 - 3C + 1) u_{xxx}$  είναι τύπου "dispersion".

Προκειμένου να «δίνει» ο κυρίαρχος όρος απόσβεση (ευστάθεια), θα πρέπει ο συντελεστής του  $\frac{c (\Delta x)}{2} (1-C)$  να είναι θετικός, δηλαδή θα πρέπει  $C < 1$ . Αυτή η συνθήκη είναι η συνθήκη CFL και θα βρεθεί στη συνέχεια κάνοντας ανάλυση ευστάθειας.

## 2.5 Συνθήκη Ευστάθειας ("Stability Condition")

Ένα σύστημα είναι *ευσταθές* όταν ένα αριθμητικό σφάλμα ( $\varepsilon$ ) μικραίνει σε κάθε διαδοχικό χρονικό βήμα της επίλυσης.

Συνθήκη Ευστάθειας: 
$$\frac{|\varepsilon_i^{n+1}|}{|\varepsilon_i^n|} < 1 \quad (2.5)$$

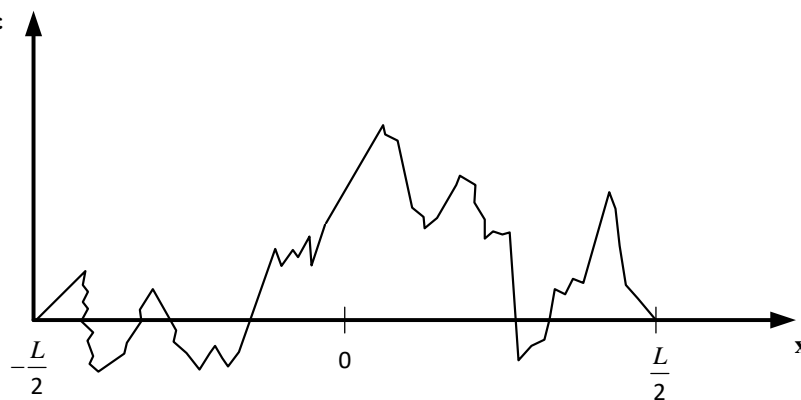
Στην ανάλυση που ακολουθεί θα "εργαστούμε" με τη αριθμητική λύση ( $u_i^n$ ) αντί για το σφάλμα ( $\varepsilon_i^n$ ) διότι και τα δύο ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών.

Έχουμε συμβολικά ότι:

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \varepsilon_i^n$$

όπου  $\bar{u}$  είναι η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Αντικαθιστώντας την ανωτέρω σχέση σε οποιαδήποτε γραμμική εξίσωση διαφορών, μπορεί ναδειχτεί ότι οι  $u_i^n$  και  $\varepsilon_i^n$  ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών.

Το Σχήμα 2.3 απεικονίζει μια τυχαία κατανομή σφάλματος.

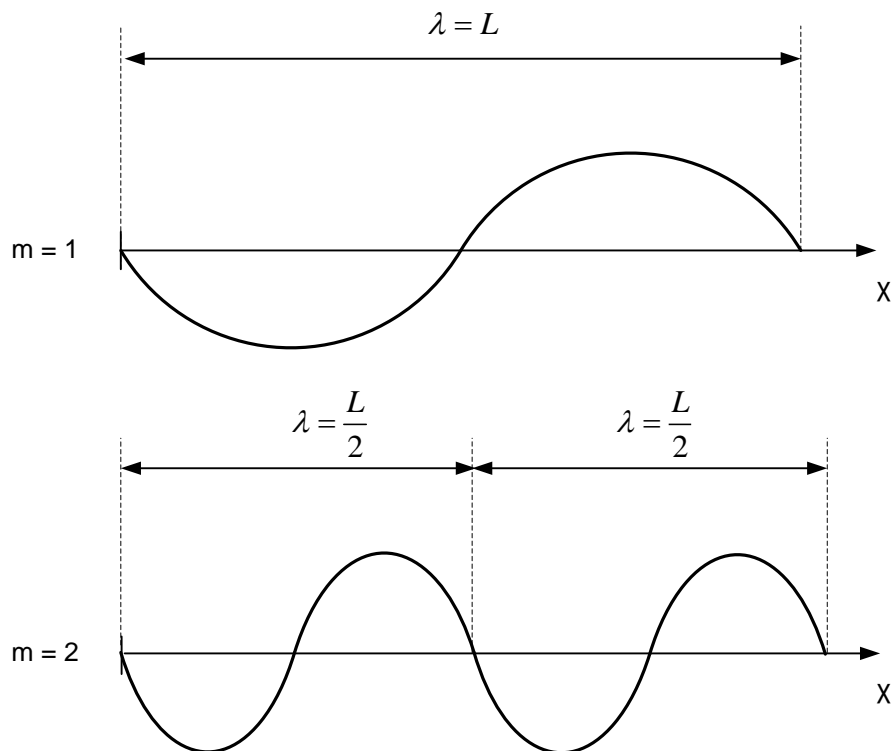


**Σχήμα 2.3** Κατανομή του σφάλματος σαν συνάρτηση του  $x$  σε διάστημα  $L$ .

Η τυχαία αυτή κατανομή μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά με την βοήθεια της σειράς Fourier :

$$\varepsilon(x,t) = \sum_m e^{at} e^{iK_m x} \quad (2.6)$$

όπου  $a$  είναι μια σταθερά, και  $K_m = \frac{2\pi}{L} m$  ο αριθμός κύματος. Η ερμηνεία του  $m$  γίνεται φανερή από το σχήμα που ακολουθεί:



**Σχήμα 2.4** Συνάρτηση ημιτόνου μήκους κύματος ( $\lambda$ ) αντικαθιστώντας στην σχέση του κυματαριθμού  $m=1$  και  $m=2$ .

Παρατηρούμε ότι ο ακέραιος  $m$  δηλώνει τον αριθμό των κυμάτων που υπάρχουν στο διάστημα  $L$ .

Για την ανάλυση ευστάθειας που ακολουθεί έχουν γίνει οι εξής παραδοχές: (i) η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, και (ii) η λύση είναι περιοδική.

Το σφάλμα γράφεται στο διακριτό χρόνο  $n \Delta t$  και στον διακριτό χώρο  $j \Delta x$ :

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon(j \Delta x, n \Delta t) \equiv \varepsilon_j^n$$

οπότε η σχέση (2.6) γράφεται:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m e^{a n \Delta t} e^{i j \beta} \quad (2.7)$$

θεωρώντας  $\beta \equiv K_m \Delta x$ , τον αδιάστατο αριθμό κύματος. Οι τιμές του  $\beta$  είναι από 0 έως  $\pi$ .

Στην ανάλυση και στα παραδείγματα που ακολουθούν, θα πάρουμε τον γενικό όρο της σειράς Fourier:  $e^{an\Delta t} e^{ij\beta}$  και θα υπολογίσουμε τον λόγο  $\frac{|\varepsilon_j^{n+1}|}{|\varepsilon_j^n|}$ , ο οποίος θα

πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τη μονάδα για να υπάρχει ευστάθεια. Η περίπτωση της ισότητας αφορά την περίπτωση σταθερού στον χώρο σφάλματος για  $\beta = 0$ . Σε ένα συνεπές σχήμα, το σφάλμα που είναι σταθερό στο χώρο δεν πρέπει ούτε να αυξάνει ούτε να μειώνεται στο χρόνο.

Μπορούμε να προχωρήσουμε στις παρακάτω αντικαταστάσεις :

$$u_j^n \rightarrow e^{an\Delta t} e^{ij\beta}$$

$$u_j^{n+1} \rightarrow e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta}$$

$$u_{j+1}^n \rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j+1)\beta}$$

$$u_{j-1}^n \rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j-1)\beta}$$

Χρήσιμες επίσης, είναι οι σχέσεις de Moivre:

$$e^{\pm i\beta} = \cos \beta \pm i \sin \beta \quad (2.8)$$

$$\cos \beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \quad (2.9)$$

καθώς και οι τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{2} \quad (2.10)$$

$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \quad (2.11)$$

Η ανάλυση ευστάθειας μπορεί να επεκταθεί και στις δύο αλλά και στις τρεις διαστάσεις, με τον γενικό όρο Fourier για το σφάλμα να παίρνει την παρακάτω μορφή :

$$\varepsilon_{jk}^n = e^{at} \cdot e^{ij\beta x} \cdot e^{ik\beta y}$$

$$\varepsilon_{jkl}^n = e^{at} \cdot e^{ij\beta x} \cdot e^{ik\beta y} \cdot e^{il\beta z}$$

όπου  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  και  $\beta_z$  είναι οι αντίστοιχοι αδιάστατοι αριθμοί κύματος στην  $x$ ,  $y$  και  $z$ - διεύθυνση.

## 2.6 Η Ευστάθεια Επίλυσης της Εξίσωσης Διάχυσης

Θεωρούμε την εξίσωση της διάχυσης  $u_t = \nu u_{xx}$ . Την διακριτοποιούμε με το ρητό σχήμα FTCS ως εξής:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.12)$$

Αντικαθιστούμε στην (2.12) τους όρους της σειράς Fourier:

$$u_j^n \rightarrow e^{an\Delta t} e^{ij\beta}$$

$$u_j^{n+1} \rightarrow e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta}$$

$$u_{j+1}^n \rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j+1)\beta}$$

$$u_{j-1}^n \rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j-1)\beta}$$

και προκύπτει :

$$\begin{aligned} & \frac{e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta} - e^{an\Delta t} e^{ij\beta}}{\Delta t} \\ & = \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \left( e^{an\Delta t} e^{i(j+1)\beta} - 2e^{an\Delta t} e^{ij\beta} + e^{an\Delta t} e^{i(j-1)\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Διαιρούμε την σχέση (2.13) με  $e^{an\Delta t} e^{ij\beta}$  και αντικαθιστώντας  $r \equiv \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$  προκύπτει:

$$e^{a\Delta t} - 1 = r(e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}) \quad (2.14)$$

όπου η παράμετρος  $r$  ονομάζεται αριθμός διάχυσης.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.9) η σχέση (2.14) γίνεται:

$$e^{a\Delta t} = 1 + 2r(\cos\beta - 1) \quad (2.15)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση (2.10) η σχέση (2.15) γίνεται:

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (2.16)$$

Τέλος, ακολουθεί ο έλεγχος ευστάθειας:

$$\left| \frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n} \right| = \left| \frac{e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta}}{e^{an\Delta t} e^{ij\beta}} \right| = |e^{a\Delta t}| < 1 \quad (2.17)$$

Ευσταθή λύση θα έχουμε όταν ικανοποιείται η εξίσωση (2.17).

Ο όρος  $|e^{a\Delta t}|$  ονομάζεται "Amplification Factor" και συμβολίζεται με  $G$ :

$$G \equiv |e^{a\Delta t}| = \left| 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| < 1 \quad (2.18)$$

Από την σχέση (2.18) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$$(i) \quad 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} < 1 \Rightarrow -4r \sin^2 \frac{\beta}{2} < 0$$

η οποία ισχύει για όλα τα  $\beta$ .

$$(ii) \quad - \left( 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) < 1 \Rightarrow 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} < 2 \Rightarrow r \sin^2 \frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}$$

Ως "χειρότερη περίπτωση" ορίζεται η τιμή του  $\beta$  για την οποία ο  $r$  έχει την μικρότερη τιμή. Εδώ είναι όταν  $\sin^2 \frac{\beta}{2} = 1$ . Τότε ισχύει:

$$r < \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

## 2.7 Η Ευστάθεια Επίλυσης της Εξίσωσης Μεταφοράς

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση  $u_t + cu_x = 0$ .

Την διακριτοποιούμε με το ρητό σχήμα FTBS ως εξής:

(i) η χρονική παράγωγος διακριτοποιείται με "προς τα εμπρός" διαφύριση:

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

(ii) η χωρική παράγωγος διακριτοποιείται με "προς τα πίσω" διαφύριση:

$$u_x = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

Με τα παραπάνω η κυματική εξίσωση προσεγγίζεται ως εξής:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.20)$$

Αντικαθιστούμε στην (2.20) τους όρους της σειράς Fourier:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &\rightarrow e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta} \\ u_{j-1}^n &\rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j-1)\beta} \end{aligned}$$

και διαιρώντας με τον όρο  $e^{an\Delta t} e^{ij\beta}$  η σχέση (2.20) δίνει:

$$\frac{e^{a\Delta t} - 1}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} (1 - e^{-i\beta}) = 0$$

Λύνοντας την ανωτέρω ως προς  $e^{a\Delta t}$  :

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\beta})$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.8), η τελευταία σχέση γράφεται:

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (1 - \cos\beta + i \sin\beta)$$

Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω  $C \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ , προκύπτει:

$$e^{a\Delta t} = 1 - C + C \cos\beta - i C \sin\beta$$

ή

$$\left| e^{a\Delta t} \right| = \left| 1 - C (1 - \cos\beta) + i C \sin\beta \right|$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε :

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = \left| 1 - C (1 - \cos\beta) + i C \sin\beta \right|^2$$

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού υπολογίζεται ως:  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , επομένως

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = \left[ 1 - C (1 - \cos\beta) \right]^2 + C^2 \sin^2\beta$$

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = \left[ 1 - C 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right]^2 + C^2 \sin^2\beta$$

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = 1 - 4C \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4C^2 \sin^4 \frac{\beta}{2} + C^2 \sin^2\beta$$



Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση (2.11) προκύπτει :

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = 1 - 4C \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4C^2 \sin^4 \frac{\beta}{2} + 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $\sin^2 \frac{\beta}{2}$ , προκύπτει :

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = 1 - 4C \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \left( \sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

Από την τριγωνομετρική ισότητα  $\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1$ , η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή :

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = 1 - 4C \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$\left| e^{a\Delta t} \right|^2 = 1 + 4C(C-1) \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Σύμφωνα με την συνθήκη ευστάθειας θα πρέπει  $\left| e^{a\Delta t} \right| < 1$ , επομένως:

$$1 + 4C(C-1) \sin^2 \frac{\beta}{2} < 1, \text{ δηλαδή}$$

$$4C(C-1) \sin^2 \frac{\beta}{2} < 0$$

που σημαίνει ότι για να ισχύει η ανισότητα θα πρέπει  $C-1 < 0$ , δηλαδή:

$$C < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} < 1} \quad (2.21)$$

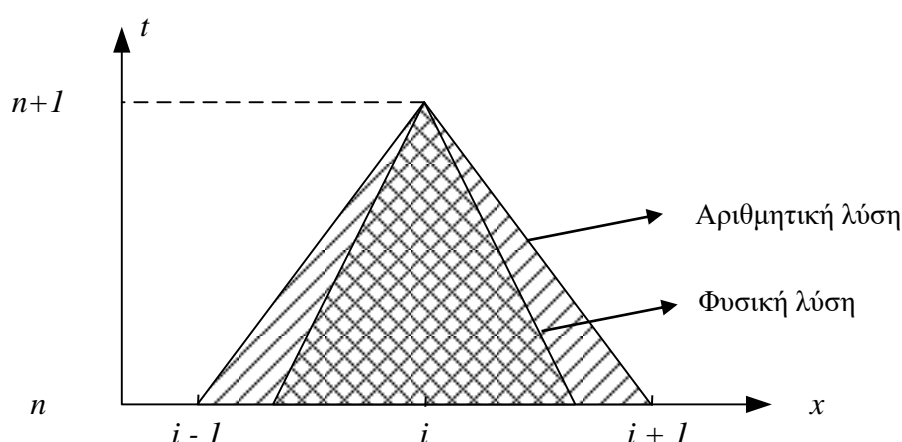
Η ανωτέρω σχέση για την ευστάθεια είναι γνωστή ως συνθήκη *Courant - Friedrichs - Lewy (CFL)*. Η παράμετρος  $C$  ονομάζεται *αριθμός CFL*.

Πηγαίνοντας πίσω στην κυματική εξίσωση παρατηρούμε το εξής :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |c| \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c}$$

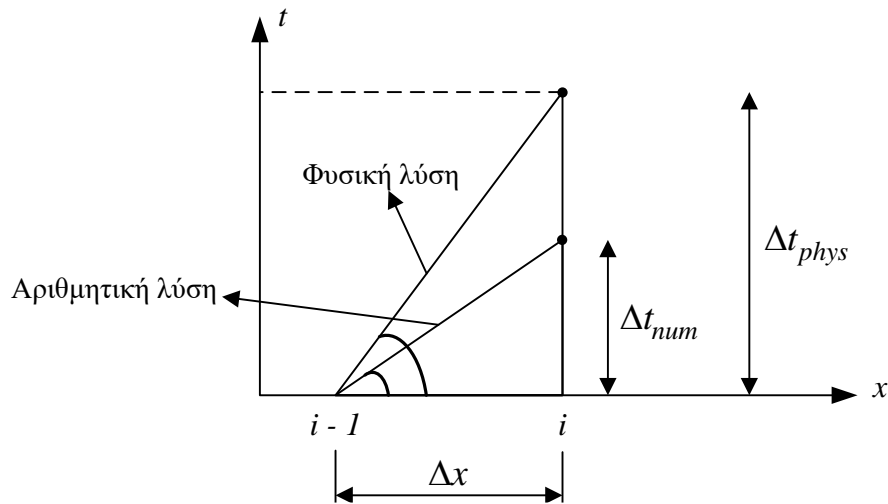
Το Σχήμα 2.5 απεικονίζει την περιοχή η οποία επηρεάζει τη λύση στο σημείο  $i$  στη χρονική στιγμή  $n+1$ . Η "περιοχή" της αριθμητικής λύσης έχει κλίση  $\pm \Delta t / \Delta x$  ενώ η αντίστοιχη "περιοχή" της φυσικής λύσης έχει κλίση  $dt/dx = \pm 1/c$ .

Η φυσική σημασία του αριθμού  $CFL$  είναι ότι για να υπάρχει ευστάθεια θα πρέπει η "περιοχή" της αριθμητικής λύσης να περικλείει την "περιοχή" της φυσικής λύσης.



**Σχήμα 2.5** Απεικόνιση της περιοχής η οποία επηρεάζει την λύση στο σημείο  $i$  την χρονική στιγμή  $n+1$ .

Ένας εναλλακτικός τρόπος να εκφραστεί η φυσική σημασία του αριθμού CFL παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.6, το οποίο απεικονίζει την περίπτωση στην οποία και η φυσική λύση και η αριθμητική λύση ξεκινούν να διαδίδονται από το σημείο  $i-1$ . Έστω  $\Delta t_{num}$  ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η αριθμητική λύση στο σημείο  $i$  και  $\Delta t_{phys}$  ο αντίστοιχος χρόνος που απαιτείται για τη φυσική λύση. Για να υπάρχει ευστάθεια θα πρέπει  $\Delta t_{num} < \Delta t_{phys}$ , δηλαδή η αριθμητική λύση να διαδίδεται πιο γρήγορα από τη φυσική λύση. Παρατηρείται ότι η κλίση της ευθείας της φυσικής λύσης ( $dt/dx = 1/c$ ) είναι μεγαλύτερη από αυτή της αριθμητικής λύσης ( $\Delta t_{num} / \Delta x$ ).



**Σχήμα 2.6** Απεικονίζει την ευσταθή κατάσταση στην οποία η αριθμητική λύση διαδίδεται από το σημείο  $i-1$  στο σημείο  $i$  πιο γρήγορα από τη φυσική λύση ( $\Delta t_{num} < \Delta t_{phys}$ ). Η κλίση της ευθείας της φυσικής λύσης ( $dt/dx = 1/c$ ) είναι μεγαλύτερη από αυτή της αριθμητικής λύσης ( $\Delta t_{num} / \Delta x$ ).

**Παράδειγμα 2.3:** Να γίνει η ανάλυση Ευστάθειας της εξίσωσης της Διάχυσης διακριτοποιημένη με το άρρητο σχήμα FTCS.

### Λύση

Διακριτοποιώντας με το άρρητο σχήμα FTCS παίρνουμε:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \quad (\text{Π2.3.1})$$

Αντικαθιστούμε στην ανωτέρω διακριτή εξίσωση τον γενικό όρο της σειράς Fourier, και διαιρώντας με τον όρο  $e^{an\Delta t} e^{ij\beta}$  προκύπτει:

$$\frac{e^{a\Delta t} - 1}{\Delta t} = \frac{\nu}{(\Delta x)^2} (e^{a\Delta t} e^{i\beta} - 2e^{a\Delta t} + e^{a\Delta t} e^{-i\beta})$$

Λύνοντας ως προς τον χρονικό όρο, έχουμε:

$$e^{a\Delta t} = 1 + r e^{a\Delta t} (e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta})$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες τριγωνομετρικές ταυτότητες που χρησιμοποιήσαμε για το ρητό σχήμα, προκύπτει :

$$e^{a\Delta t} = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

επομένως :

$$\left| \frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n} \right| = |e^{a\Delta t}| = \left| \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right| < 1$$

Παρατηρούμε ότι  $|e^{a\Delta t}| < 1$  για κάθε τιμή των  $r, \beta$ . Αποδείξαμε λοιπόν ότι το άρρητο σχήμα FTCS της εξίσωσης της Διάχυσης είναι ευσταθές για οποιαδήποτε τιμή  $\Delta x, \Delta t$ .

## 2.8 Σύγκριση Κριτηρίων Ευστάθειας "CFL" και Διάχυσης

Συνοψίζοντας, υπάρχουν δύο σημαντικές περιπτώσεις συνθηκών ευστάθειας :

- (i) Σε ρητά αριθμητικά σχήματα, τα οποία επιλύουν εξισώσεις μεταφοράς ("convection"), έχουμε την συνθήκη *Courant - Friedrichs - Lewy* σύμφωνα με την οποία :

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{ή} \quad CFL < 1$$

- (ii) Σε ρητά αριθμητικά σχήματα για την διακριτοποίηση εξισώσεων διάχυσης ("diffusion"), έχουμε την συνθήκη:

$$\frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$$

Συγκρίνουμε τον περιορισμό στο χρονικό βήμα για τις δύο συνθήκες ευστάθειας.

$$\Delta t|_{CFL} \sim \frac{\Delta x}{|c|}$$

όπου στην συμπιεστή ροή  $c \sim \frac{1}{M}$  και επομένως :

$$\Delta t|_{CFL} \sim M \Delta x \quad (2.22)$$

Όσον αφορά την διάχυση, είναι:

$$\Delta t|_{\text{διάχυσης}} \sim \frac{(\Delta x)^2}{\nu}$$

όπου  $\nu \sim \frac{1}{Re}$ , και επομένως:

$$\Delta t|_{\text{διάχυσης}} \sim Re (\Delta x)^2 \quad (2.23)$$

Συνήθως η συνθήκη CFL επιβάλλει μικρότερο χρονικό βήμα από ότι αυτή της διάχυσης. Αυτό μπορεί να δειχθεί θεωρώντας τον λόγο:

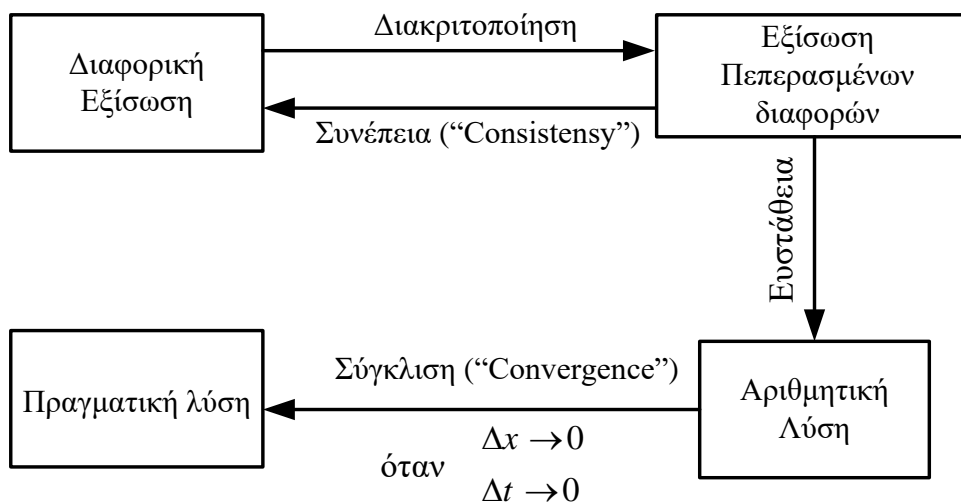
$$\frac{\Delta t|_{CFL}}{\Delta t|_{\text{διάχυσης}}} \sim \frac{M \Delta x}{Re (\Delta x)^2} = \frac{M}{Re} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

Παρότι ο όρος  $\frac{1}{\Delta x}$  είναι μεγάλος, σε ευρύ φάσμα περιπτώσεων ο λόγος  $\frac{M}{Re}$  είναι αρκετά μικρότερος.

## 2.9 Η Σύγκλιση Αριθμητικού Σχήματος

Η τελική ιδιότητα ενός αριθμητικού σχήματος είναι να δίνει λύση η οποία πλησιάζει την αναλυτική όσο πυκνώνεται το αριθμητικό πλέγμα και μειώνεται το χρονικό βήμα.

Το θεώρημα του Lax δηλώνει ότι : *"Για ένα καλά ορισμένο πρόβλημα Αρχικών Τιμών και μια Συνεπή ("Consistent") διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών (FDE) να προσεγγίζει την διαφορική εξίσωση (PDE) του προβλήματος, η Ευστάθεια ("Stability") του αριθμητικού σχήματος είναι Αναγκαία και Ικανή για την Σύγκλιση της αριθμητικής λύσης στην πραγματική".* Τα ανωτέρω "οπτικοποιούνται" στο Σχήμα 2.7.



**Σχήμα 2.7** Το θεώρημα του Lax περιγραφικά: "Consistency + Stability = Convergence".

## 2.10 Παραδείγματα Αριθμητικών Σχημάτων για την Κυματική Εξίσωση

Παρατίθενται κύρια αριθμητικά σχήματα για την κυματική εξίσωση  $u_t + c u_x = 0$ .

### 2.9.1 Το σχήμα Lax

Το αριθμητικό σχήμα FTCS για την κυματική εξίσωση δεν είναι ευσταθές. Μπορεί να γίνει ευσταθές με την αντικατάσταση του όρου  $u_i^n$  με την μέση τιμή

$$\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}.$$

Έτσι δημιουργείται το σχήμα του Lax :

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.24)$$

Το σφάλμα αποκοπής έχει την τάξη:

$$TE = O \left[ \Delta t, \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \right]$$

Η τροποποιημένη εξίσωση του σφάλματος είναι :

$$u_t + c u_x = \frac{c \Delta x}{2} \left( \frac{1}{C} - C \right) u_{xx} + \frac{c (\Delta x)^2}{3} (1 - C^2) u_{xxx} + \dots \quad (2.25)$$

Συγκρίνοντας το σφάλμα τύπου "dissipation" με αυτό του σχήματος FTBS, έχουμε τον λόγο :

$$\frac{\text{Σφάλμα τύπου "dissipation" του σχήματος Lax}}{\text{Σφάλμα τύπου "dissipation" σχήματος FTBS}} = \frac{\frac{1}{C} - C}{1 - C} = 1 + \frac{1}{C}$$

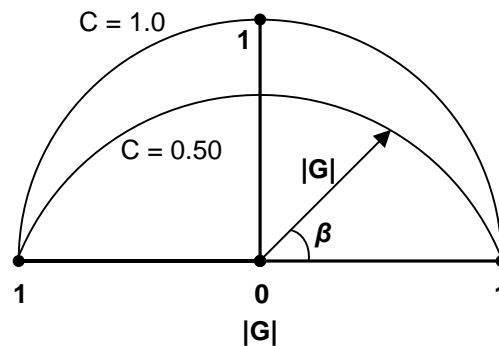
Δηλαδή, το σχήμα του Lax έχει αρκετά μεγαλύτερη "αριθμητική συνεκτικότητα" από ότι το σχήμα FTBS.

Το σχήμα είναι ευσταθές όταν ο αριθμός CFL είναι μικρότερος της μονάδας ( $|C| < 1$ ).

Ο συντελεστής της ευστάθειας  $G \equiv e^{a \Delta t}$  δίνεται ως συνάρτηση του αδιάστατου αριθμού κύματος ( $\beta$ ), καθώς και του αριθμού CFL ( $C$ ):

$$G = \cos\beta - i C \sin\beta$$

Το μέτρο του συντελεστή ευστάθειας ( $|G|$ ) αναπαρίσταται γραφικά ως συνάρτηση των  $\beta$  και  $C$  στο Σχήμα 2.8.



**Σχήμα 2.8** Σχήμα Lax: το μέτρο του συντελεστή ευστάθειας ( $|G|$ ) ως συνάρτηση του αδιάστατου αριθμού κύματος ( $\beta$ ) καθώς και του αριθμού CFL ( $C$ ).

### 2.9.2 Το άρρητο σχήμα FTCS

Το σχήμα FTCS αποκτά ευστάθεια όταν μετατραπεί σε άρρητο :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (2.26)$$

Η χρήση του άρρητου σχήματος FTCS απαιτεί την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος:

$$\frac{C}{2}u_{i+1}^{n+1} + 1 \cdot u_i^{n+1} - \frac{C}{2}u_{i-1}^{n+1} = u_i^n, \text{ όπου } i = 2, \dots, NI - 1 \quad (2.27)$$

Το σχήμα είναι ευσταθές για όλες τις τιμές του αριθμού CFL. Ο συντελεστής ευστάθειας ( $G$ ) δίνεται από την σχέση :



$$G = \frac{1 - iC \sin \beta}{1 + C^2 \sin^2 \beta} \quad (2.28)$$

Η τροποποιημένη εξίσωση του σφάλματος αποκοπής είναι :

$$u_t + c u_x = \frac{c^2 \Delta t}{2} u_{xx} - \dots \quad (2.29)$$

Η σταθερότητα του σχήματος επιτρέπει χρήση μεγάλου χρονικού βήματος, ούτως ώστε να αντισταθμιστεί το υψηλό κόστος υπολογισμών σε κάθε χρονικό βήμα. Όμως, η χρήση μεγάλου χρονικού βήματος ( $\Delta t$ ) δημιουργεί υψηλή "αριθμητική συνεκτικότητα", όπως φαίνεται στην σχέση (2.29).

### 2.9.3 Το σχήμα Lax-Wendroff

Πέραν της διακριτοποίησης της χρονικής παραγώγου ( $u_t$ ), η λύση μπορεί να "προχωρήσει" στον χρόνο εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor, όπως ακολουθεί :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot u_t|_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}|_i^n + O(\Delta t)^3 \quad (2.30)$$

Στην ανωτέρω σχέση οι χρονικές παράγωγοι  $u_t$  και  $u_{tt}$  αντικαθίστανται με χωρικές χρησιμοποιώντας την διαφορική εξίσωση :

$$u_t = -c u_x$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Οι χωρικές παράγωγοι  $u_x$  και  $u_{xx}$  διακριτοποιούνται με κεντρική διαφύριση, οπότε προκύπτει :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2.31)$$

Το σφάλμα αποκοπής είναι :

$$TE = O [(\Delta x)^2, (\Delta t)^2]$$

Η τροποποιημένη εξίσωση είναι :

$$u_t + cu_x = -c \frac{(\Delta x)^2}{6} (1-C^2) u_{xxx} - c \frac{(\Delta x)^3}{8} C (1-C^2) u_{xxxx} + \dots \quad (2.32)$$

Το σχήμα είναι ευσταθές όταν ο αριθμός CFL είναι μικρότερος της μονάδας ( $|C| < 1$ ).

Η ανάλυση ευστάθειας για το σχήμα Lax-Wendroff παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω.

Στην Εξίσωση (2.31) αλλάζουμε τον δείκτη  $i$  σε  $j$  και αντικαθιστούμε τους όρους της σειράς Fourier:

$$\begin{aligned} u_j^n &\rightarrow e^{an\Delta t} e^{ij\beta} \\ u_j^{n+1} &\rightarrow e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta} \\ u_{j+1}^n &\rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j+1)\beta} \\ u_{j-1}^n &\rightarrow e^{an\Delta t} e^{i(j-1)\beta} \end{aligned}$$

Μετά από κάποιες πράξεις προκύπτει:

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{C}{2} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + \frac{C^2}{2} (e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}) \quad (2.33)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\cos\beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}$  και  $\sin\beta = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}$  η σχέση (2.33) γίνεται:

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{C}{2} 2i \cdot \sin\beta + \frac{C^2}{2} 2 (\cos\beta - 1) \quad (2.34)$$

Ο συντελεστής ευστάθειας ( $G$ ) προκύπτει λοιπόν ως:

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n} = \frac{e^{a(n+1)\Delta t} e^{ij\beta}}{e^{an\Delta t} e^{ij\beta}} = e^{a\Delta t} \Rightarrow \\ G &= 1 + C^2 (\cos\beta - 1) - i \cdot C \sin\beta \end{aligned} \quad (2.35)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ισότητες (2.10) και (2.11) έχουμε:

$$G = 1 - 2C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - i \cdot 2C \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \quad (2.36)$$

Με βάση την (2.36), για το μέτρο του συντελεστή ευστάθειας ισχύει:

$$\begin{aligned} |G|^2 &= \left(1 - 2C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(-2C \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ |G|^2 &= 1 + 4C^4 \sin^4 \frac{\beta}{2} - 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} \Rightarrow \\ |G|^2 &= 1 + 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \left(C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 1 + \cos^2 \frac{\beta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ισότητα  $\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1$ , η σχέση (2.37) γίνεται:

$$\begin{aligned} |G|^2 &= 1 + 4C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \left(C^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \\ |G|^2 &= 1 + 4C^2(C^2 - 1) \cdot \sin^4 \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη ευστάθειας θα πρέπει  $|G| < 1$ , επομένως:

$$\begin{aligned} 1 + 4C^2(C^2 - 1) \cdot \sin^4 \frac{\beta}{2} &< 1 \Rightarrow \\ 4C^2(C^2 - 1) \cdot \sin^4 \frac{\beta}{2} &< 0 \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία ανισότητα θα πρέπει:  $C^2 - 1 < 0 \Rightarrow |C| < 1$ , η οποία είναι η συνθήκη ευστάθειας για το σχήμα Lax-Wendroff.

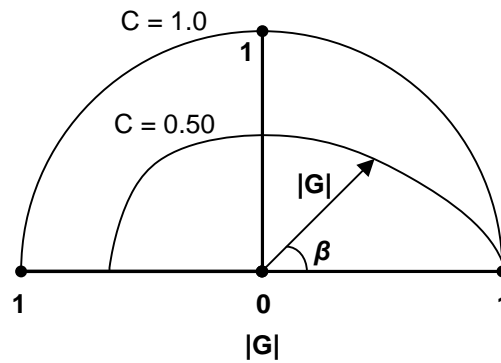
Το μέτρο του συντελεστή ευστάθειας ( $|G|$ ) αναπαρίσταται γραφικά ως συνάρτηση των  $\beta$  και  $C$  στο Σχήμα 2.9.

Ενδεικτικές τιμές του γραφήματος είναι οι παρακάτω:

- Για  $\beta = 0$  από την Εξ. (2.35) είναι  $G = 1$  και άρα  $|G| = 1$ .
- Για  $\beta = \frac{\pi}{2}$  και  $C = 1$  από την Εξ. (2.35) είναι  $G = -i$  και άρα  $|G| = 1$ .

- Για  $\beta = \pi$  και  $C = 1$  από την Εξ. (2.35) είναι  $G = -1$  και άρα  $|G| = 1$ .

Για να είναι το σχήμα Lax-Wendroff ευσταθές θα πρέπει  $|G| < 1$  και παρατηρείται από το γράφημα ότι αυτό συμβαίνει όταν ο αριθμός CFL είναι μικρότερος της μονάδας ( $|C| < 1$ ).



**Σχήμα 2.9** Σχήμα Lax-Wendroff: το μέτρο του συντελεστή ευστάθειας ( $|G|$ ) ως συνάρτηση του αδιάστατου αριθμού κύματος ( $\beta$ ) καθώς και του αριθμού CFL ( $C$ ).