Πίνακας Περιεχομένων

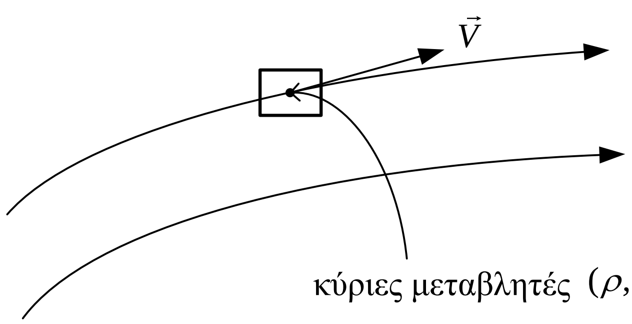
1.1 Ορισμός Πεδίου Ροής 1-2
1.2 Διάκριση των ροών 1-3
1.3 Παραμόρφωση στοιχείου ρευστού 1-4
  1.3.1 Διατμητική παραμόρφωση 1-4
  1.3.2 Ορθή παραμόρφωση 1-6
  1.3.3 Η μεταβολή του όγκου 1-6
1.4 Στροβιλότητα 1-8
1.5 Η Ροϊκή Συνάρτηση και το Δυναμικό Ταχύτητας 1-11
1.6 Παραδείγματα – Ασκήσεις 1-15
  1.6.1 Μορφή και συνεκτικότητα πεδίου ροής 1-15
  1.6.2 Ασυμπίεστο και αστρόβιλο πεδίο ροής 1-17

1 Βασικές Έννοιες Πεδίων Ροής

Για τη μελέτη κάθε είδους ροής, απαιτείται ο ορισμός βασικών μεγεθών, που μονοσήμαντα καθορίζουν τη δυναμική της. Το στοιχείο ρευστού είναι η βασική έννοια που θα χρησιμοποιήσουμε. Η μεταβολή του σχήματός του κατά την κίνησή του στη ροή καθορίζει τον τύπο του πεδίου.

1.1 Ορισμός Πεδίου Ροής

Ένα πεδίο ροής, σε δεδομένη χρονική στιγμή, μπορεί να οριστεί από την κατανομή στο χώρο της πυκνότητας $\rho(x,y,z)$, της ταχύτητας $\vec{V}(x,y,z)$ καθώς και της πίεσης του ρευστού $p(x,y,z)$. Οι μεταβλητές αυτές εξαρτώνται άμεσα από τις φυσικές ιδιότητες του ρευστού, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα σταθερές, όπως ο *συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας (k)*, και το *δυναμικό ιξώδες (μ)*, μεγέθη τα οποία θα οριστούν στο Κεφάλαιο 3. Επιπλέον με τη χρήση θερμοδυναμικών σχέσεων είναι εφικτός ο προσδιορισμός άλλων μεγεθών, όπως η εσωτερική ενέργεια (e) και η θερμοκρασία (T). Το Σχήμα 1.1 απεικονίζει στοιχείο ρευστού ταχύτητας $\vec{V}$, καθώς και "τροχιές" οι οποίες ονομάζονται *ροϊκές γραμμές*.



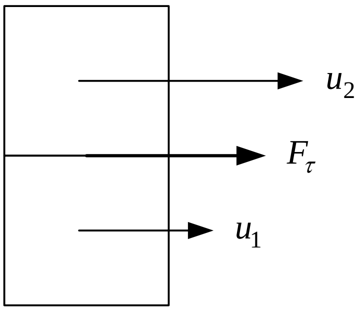
Σχήμα 1.1: *Γεωμετρική απεικόνιση ροϊκών γραμμών και ενός στοιχείου ρευστού με τις βασικές μεταβλητές του πεδίου ροής.*

1.2 Διάκριση των ροών

Η διάκριση των ροών πραγματοποιείται με γνώμονα την μαθηματική απλοποίηση των εξισώσεων ροής, αλλά πάντα με βάση τη φυσική των ροϊκών φαινομένων που εξετάζονται.

Σταθερή ροή χαρακτηρίζεται η ροή στην οποία παρατηρείται μη μεταβολή του ροϊκού πεδίου στο χρόνο. Στη σταθερή ροή οι παράγωγοι των ροϊκών μεγεθών ως προς το χρόνο είναι μηδενικές.

Συνεκτική ροή χαρακτηρίζεται η ροή στην οποία αναπτύσσεται τριβή μεταξύ των στοιχείων του ρευστού και λαμβάνει χώρα ροή θερμότητας λόγω αγωγιμότητας. Οι πραγματικές ροές είναι πάντα συνεκτικές. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι η τριβή αναπτύσσεται μόνο όταν υπάρχει βαθμίδα ταχύτητας, διαφορετικά είναι μηδενική. Η δύναμη τριβής $\left(F_\tau\right)$ μεταξύ δύο στοιχείων ρευστού είναι ανάλογη της διαφοράς ταχυτήτων $\left(u_2 - u_1\right)$, όπως απεικονίζει το Σχήμα 1.2. Σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να αγνοηθεί η τριβή με αποτελέσματα την σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων της ροής, όπως θα δειχθεί στο Κεφάλαιο 3. Ομοίως, η ροή θερμότητας αναπτύσσεται μόνο όταν υπάρχει βαθμίδα θερμοκρασίας.



Σχήμα 1.2: *Δύναμη τριβής $\left(F_\tau\right)$ μεταξύ δυο γειτονικών στοιχείων ρευστού που έχουν διαφορετική ταχύτητα.*

Συμπιεστή ροή χαρακτηρίζεται η ροή στην οποία παρατηρείται μεταβολή της πυκνότητας. Συμπιεστές είναι κυρίως οι ροές των αερίων σε μεγάλες ταχύτητες.

Στροβιλή ροή χαρακτηρίζεται η ροή στην οποία τα στοιχεία ρευστού περιστρέφονται ως προς το κέντρο τους. Η σημασία της στροβιλότητας θα γίνει κατανοητή κατά την ανάπτυξη σε επόμενο τμήμα, καθώς και στο επόμενο κεφάλαιο των θεμελιωδών ροών.

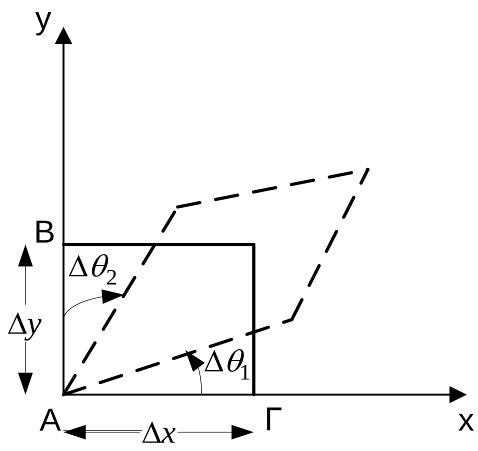
Τυρβώδης ροή χαρακτηρίζεται το πεδίο το οποίο παρουσιάζει τυχαίες διακυμάνσεις των μεγεθών του. Σχεδόν όλες οι πραγματικές ροές είναι τυρβώδεις και η μελέτη τους γίνεται κυρίως με πειραματικά και υπολογιστικά μέσα.

1.3 Παραμόρφωση στοιχείου ρευστού

Ένα στοιχείο ρευστού παραμορφώνεται κατά την κίνησή του στο πεδίο της ροής. Στη συνέχεια θα εξετασθεί η μεταβολή του σχήματός του στις δύο διαστάσεις.

1.3.1 Διατμητική παραμόρφωση

Η παραμόρφωση σε διάτμηση στοιχείου ρευστού αρχικού σχήματος τετραγώνου απεικονίζεται στο Σχήμα 1.3. Οι πλευρές ΑΓ και ΑΒ περιστρέφονται κατά γωνίες $\Delta\theta_1$ και $\Delta\theta_2$, αντίστοιχα. Θεωρώντας πεδίο ταχυτήτων (u,v) και χρονικό διάστημα Δt, έχουμε ότι το σημείο Α μετατοπίζεται στην y- διεύθυνση κατά απόσταση $v\Delta t$ ενώ το σημείο Γ μετατοπίζεται κατά $\left[\left(v+\left(\partial v/\partial x\right)\Delta x\right)\right]\Delta t$ λόγω της βάθμωσης του πεδίου. Δηλαδή, το σημείο Γ μετατοπίζεται στην y-διεύθυνση κατά $\left(\partial v/\partial x\right)\Delta x\Delta t$ σε σχέση με το Α.



Σχήμα 1.3: *Παραμόρφωση στοιχείου ρευστού.*

Θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις ισχύει:

$$\tan\left(\Delta\theta_1\right) \approx \Delta\theta_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t \tag{1.1}$$

Με αντίστοιχο τρόπο για τη πλευρά ΑΒ του στοιχείου προκύπτει:

$$\Delta\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t \tag{1.2}$$

Ο *ρυθμός διατμητικής παραμόρφωσης* του στοιχείου του ρευστού $\left(\dot{\varepsilon}_{xy}\right)$ υπολογίζεται ως ο μέσος όρος:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.3}$$

1.3.2 Ορθή παραμόρφωση

Θεωρείται πάλι το στοιχείο ρευστού, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.3. Η ροή είναι οριζόντια και η ταχύτητα (u) μεταβάλλεται μόνο κατά x-διεύθυνση. Σε χρόνο Δt, τα σημεία Α και Γ μετατοπίζονται κατά απόσταση $u\Delta t$, και $\left[\left(u+\left(\partial u/\partial x\right)\Delta x\right)\right]\Delta t$, αντίστοιχα. Συνεπώς, η σχετική μετατόπιση του σημείου Γ ως προς το Α είναι ίση με $\left(\partial u/\partial x\right)\Delta x\Delta t$. Επομένως, η σχετική επιμήκυνση ή σμίκρυνση του τμήματος ΑΓ (*ορθή παραμόρφωση*), υπολογίζεται ως:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta t \tag{1.4}$$

Επομένως, ο *ρυθμός ορθής παραμόρφωσης* στη x-διεύθυνση είναι:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.5}$$

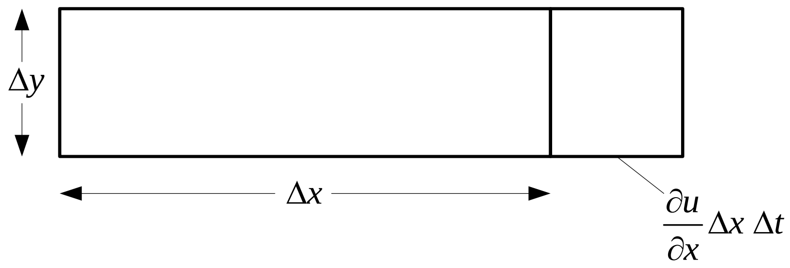
Με όμοιο τρόπο δείχνεται ότι ο ρυθμός ορθής παραμόρφωσης στη y-διεύθυνση είναι:

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.6}$$

1.3.3 Η μεταβολή του όγκου

Θεωρείται το στοιχείο ρευστού, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.4, το οποίο επιμηκύνεται κατά την x-διεύθυνση σε χρόνο Δt. Αρχικά η επιφάνειά του είναι $\Delta x\Delta y$. Λόγω της παραμόρφωσης, η οριζόντια πλευρά επιμηκύνεται κατά $\left(\partial u/\partial x\right)\Delta x\Delta t$. Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας αδιαστατοποιημένος με την αρχική επιφάνεια είναι $\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\Delta \mathrm{A}}{\Delta t}$, και υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{1}{A}\frac{\Delta A}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{1}{\Delta x\Delta y}\,\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta \mathrm{t}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.7}$$



Σχήμα 1.4: *Παραμόρφωση μεταβολής όγκου σε μία διάσταση.*

Στις τρεις διαστάσεις ο ρυθμός μεταβολής όγκου ανά μονάδα όγκου (‘Dilatation’) δίνεται από την παρακάτω γενική σχέση:

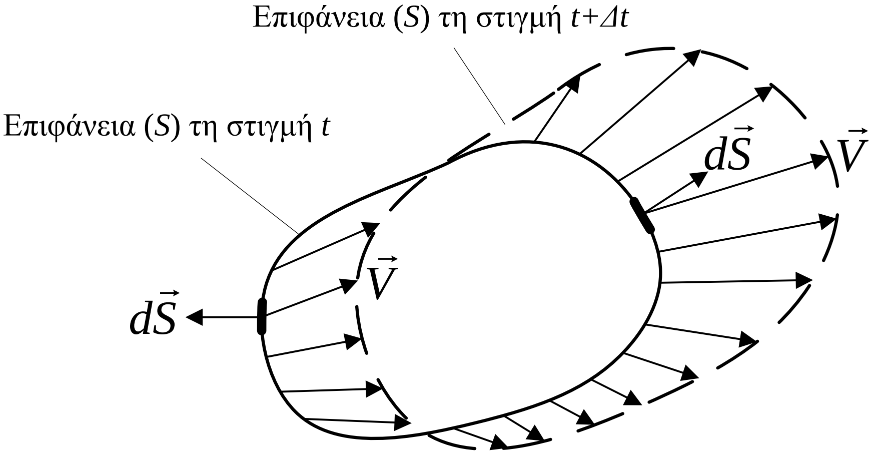
$$\frac{1}{\mathrm{V}}\frac{\Delta \mathrm{V}}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V} \tag{1.8}$$

Η σχέση (1.8), προκύπτει και ως εξής. Σε ένα στοιχείο ρευστού τυχαίας γεωμετρίας, το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 1.5, προκαλείται μεταβολή του όγκου του, εξαιτίας της μετακίνησης ενός απειροστού τμήματος της επιφάνειάς του $\left(d\,\vec{S}\right)$ σε χρόνο Δt με ταχύτητα $\vec{V}$. Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\Delta\mathrm{V}=\Delta\mathrm{t}\cdot\vec{V}\cdot d\,\vec{S} \tag{1.9}$$

οπότε για τυχαία μετακίνηση όλης της επιφάνειας και με βάση το *θεώρημα Gauss*, ισχύει:

$$\Delta\mathrm{V}=\Delta t\iint_{S}\vec{V}\cdot d\vec{S}\;=\;\Delta t\iiint_{\mathrm{V}}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\mathrm{V} \tag{1.10}$$



Σχήμα 1.5: *Παραμόρφωση μεταβολής όγκου για στοιχείο ρευστού τυχαίας γεωμετρίας, επιφάνειας* S .

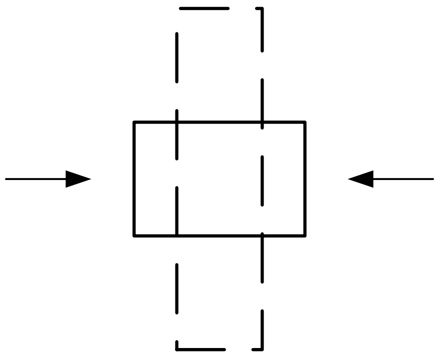
Λόγω των απειροστών διαστάσεων του στοιχείου ρευστού μπορεί να θεωρηθεί ότι η απόκλιση της ταχύτητας $\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)$ είναι σταθερή σε όλο τον όγκο του. Είναι δηλαδή,

$$\iiint_{\mathrm{V}}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\mathrm{V}=\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\cdot\mathrm{V}$$

Συνεπώς, προκύπτει:

$$\frac{1}{\mathrm{V}}\frac{\Delta\mathrm{V}}{\Delta t}=\nabla\cdot\vec{V}$$

Στην περίπτωση της *ασυμπίεστης* ροής ισχύει ότι $\nabla\cdot\vec{V}=0$, το οποίο θα δειχθεί σε επόμενο κεφάλαιο. Αυτό συνεπάγεται ότι η επιφάνεια του στοιχείου του ρευστού παραμένει σταθερή, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: *Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής η παραμόρφωση του στοιχείου ρευστού δεν μεταβάλλει την επιφάνειά του.*

1.4 Στροβιλότητα

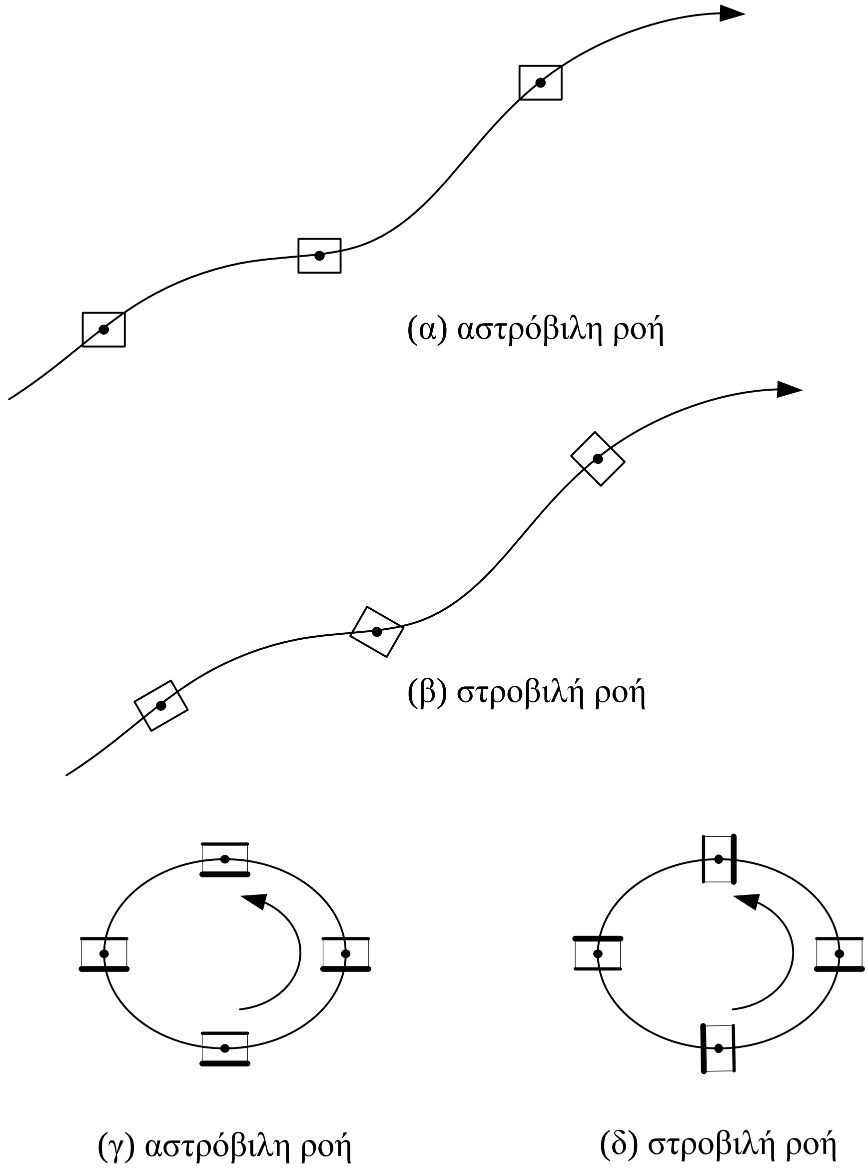
Η στροβιλότητα (ω) εκφράζει την περιστροφή στοιχείου του ρευστού ως προς το κέντρο του, όπως απεικονίζει το Σχήμα 1.7. Ορίζεται ως η διαφορά του ρυθμού μεταβολής των γωνιών που σχηματίζουν οι πλευρές του με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Δηλαδή, με βάση το Σχήμα 1.3, και τις σχέσεις (1.1) και (1.2), προκύπτει:

$$\omega\equiv\frac{d\left(\Delta\theta_1\right)}{dt}-\frac{d\left(\Delta\theta_2\right)}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.11}$$

Η επιλογή της ανωτέρω σειράς διαφοράς των γωνιών, δίνει θετική την στροβιλότητα όταν το στοιχείο περιστρέφεται ανθωρολογιακά.

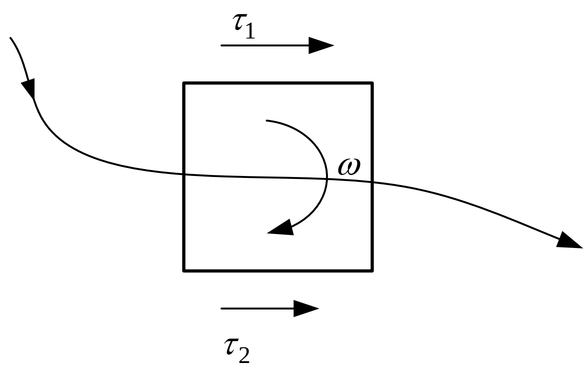
Στις τρεις διαστάσεις η στροβιλότητα είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{\kappa} \qquad (1.12)$$



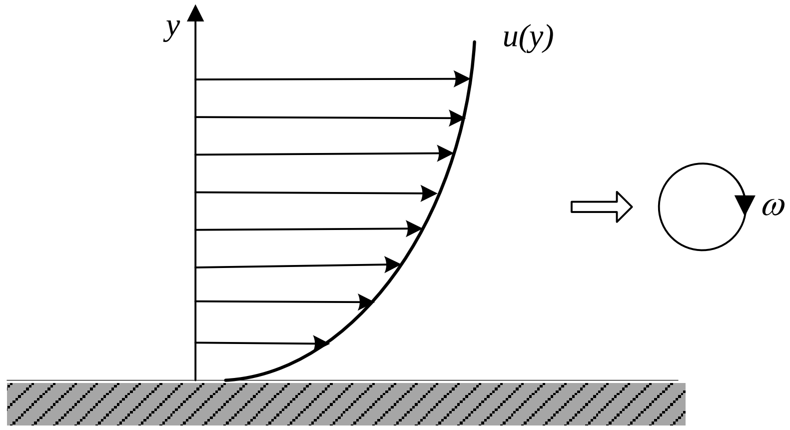
Σχήμα 1.7: *Η αλλαγή του προσανατολισμού (περιστροφή) των στοιχείων του ρευστού σημαίνει στροβιλή ροή.*

Στη συνεκτική ροή αναπτύσσεται στροβιλότητα λόγω των δυνάμεων τριβής που ασκούνται σε ένα στοιχείο ρευστού από τα γειτονικά του. Η τριβή αυτή γενικά προκαλεί την παραμόρφωση και ειδικά την περιστροφή του, όπως απεικονίζει το Σχήμα 1.8.



***Σχήμα 1.8**: Δημιουργία στροβιλότητας σε συνεκτική ροή λόγω διαφοράς τάσεων τριβής στην πάνω και κάτω πλευρά στοιχείου ρευστού.*

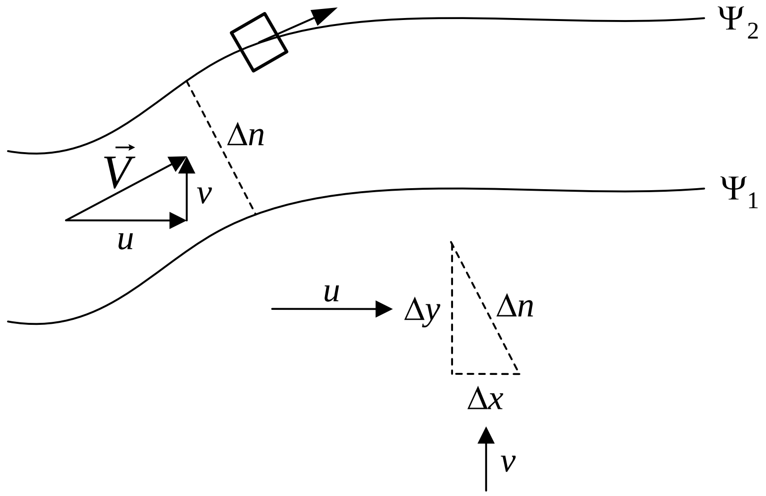
Μία τυπική περίπτωση συνεκτικής ροής που χαρακτηρίζεται από σημαντική στροβιλότητα είναι αυτή του οριακού στρώματος, το οποίο δημιουργείται κατά τη ροή ρευστού κοντά στην επιφάνεια ενός σώματος. Ένα τυπικό προφίλ ταχύτητας στο οριακό στρώμα φαίνεται στο Σχήμα 1.9. Η ταχύτητα είναι μηδενική στην επιφάνεια και αυξάνεται βαθμιαία όσο μεγαλώνει η απόσταση από αυτήν. Το οριακό στρώμα θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4.



Σχήμα 1.9: *Τυπικό προφίλ ταχύτητας οριακού στρώματος, το οποίο χαρακτηρίζεται από σημαντική στροβιλότητα.*

1.5 Η Ροϊκή Συνάρτηση και το Δυναμικό Ταχύτητας

Αρκετά πεδία ροής μπορούν να εκφραστούν με βάση μία μόνο μεταβλητή. Θεωρούνται οι γραμμές ροής χρονικά αμετάβλητου πεδίου οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 1.10. Το διάνυσμα της ταχύτητας στοιχείου ρευστού είναι εφαπτομενικό στην τοπική γραμμή ροής την οποία ακολουθεί το στοιχείο. Δηλαδή, η κλίση του διανύσματος της ταχύτητας είναι ίση με την κλίση της γραμμής ροής στο σημείο αυτό.



Σχήμα 1.10: *Στοιχείο ρευστού και γραμμές ροής σε χρονικά αμετάβλητο πεδίο ροής.*

Αυτό μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \Rightarrow -vdx + udy = 0 \tag{1.13}$$

Θεωρείται μια ειδική συνάρτηση $\Psi(x, y)$ η οποία έχει σταθερή τιμή σε κάθε γραμμή ροής του πεδίου. Ισχύει δηλαδή, στην ροϊκή γραμμή ότι:

$$d\Psi = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \tag{1.14}$$

Συγκρίνοντας τις Σχέσεις (1.13) και (1.14) παρατηρείται ότι από την συνάρτηση $\Psi(x,y)$ μπορεί να υπολογιστεί το πεδίο ταχυτήτων της ροής ως εξής:

$$\boxed{u=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\ v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}} \tag{1.15}$$

Η συνάρτηση $\Psi(x,y)$ ονομάζεται *ροϊκή συνάρτηση*. Η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να οριστεί στις τρεις διαστάσεις.

Σε πολικές συντεταγμένες (r,θ), οι αντίστοιχες εκφράσεις των συνιστωσών της ταχύτητας $(V_r\ ,V_\theta)$ είναι:

$$V_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad \text{και} \quad V_\theta=-\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

Η διαφορά $\Delta\Psi=\Psi_2-\Psi_1$ μεταξύ δύο γραμμών ροής εκφράζει την παροχή μάζας ανάμεσα από τις γραμμές αυτές. Χρησιμοποιώντας το Σχήμα 1.10, η παροχή μάζας $\dot{m}$ είναι:

$$\dot{m}=\rho V\Delta n=\rho u\Delta \mathrm{y}-\rho v\Delta \mathrm{x} \ \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{m}}{\rho}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Delta x=\Delta\Psi$$

όπου V είναι η ταχύτητα του ρευστού στην διατομή (Δn) της επιφάνειας μεταξύ των δύο γραμμών ροής.

Τέλος, για την περίπτωση *αστρόβιλης* ροής $(\vec{\omega}=\nabla\times\vec{V}=0)$ προκύπτει μία σχετικά απλή εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης :

$$\nabla\times\vec{V}=0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Rightarrow -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0 \ \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2\Psi=0} \tag{1.16}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σύνθετα πεδία ροής μπορούν να εκφραστούν με υπέρθεση απλούστερων πεδίων, αθροίζοντας τις αντίστοιχες ροϊκές συναρτήσεις.

Το *δυναμικό ταχύτητας* είναι ένας άλλος τρόπος περιγραφής του πεδίου για την περίπτωση της *αστρόβιλης ροής*. Για μια συνάρτηση $\Phi(x, y, z)$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\nabla\times\left(\nabla\Phi\right)=0 \tag{1.17}$$

Επομένως, στην αστρόβιλη ροή ($\nabla\times\vec{V}=0$), μπορεί η ταχύτητα του πεδίου να εκφραστεί ως

$$\vec{V}=\nabla\Phi,\ \text{δηλαδή}$$

$$\boxed{u=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ v=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \ w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}} \tag{1.18}$$

Η συνάρτηση Φ ονομάζεται δυναμικό ταχύτητας. Δεν έχει τον περιορισμό των δύο διαστάσεων όπως έχει η ροϊκή συνάρτηση.

Σε πολικές συντεταγμένες $(r\,,\theta)$, οι εκφράσεις των ταχυτήτων $\left(V_r\,,V_\theta\right)$είναι:

$$V_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\quad \text{και}\quad V_\theta=\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

Αν θεωρηθεί επιπλέον και *ασυμπίεστη* η ροή $\left(\nabla\cdot\vec{V}=0\right)$, συνεπάγεται ότι:

$$\boxed{\nabla^2\Phi=0} \tag{1.19}$$

Οι γραμμές δυναμικού είναι κάθετες στις γραμμές ροής του πεδίου όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.11. Η κλίση των γραμμών δυναμικού βρίσκεται αν θεωρηθεί ότι το δυναμικό Φ είναι σταθερό σε κάθε τέτοια γραμμή:

$$d\Phi=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=0\ \Rightarrow\ udx+vdy=0\ \Rightarrow$$

$$(dy/dx)_{\Phi=\sigma\tau\alpha\theta}=-\ u\,/\,v \tag{1.20}$$

Για τις γραμμές ροής ισχύει αντίστοιχα:

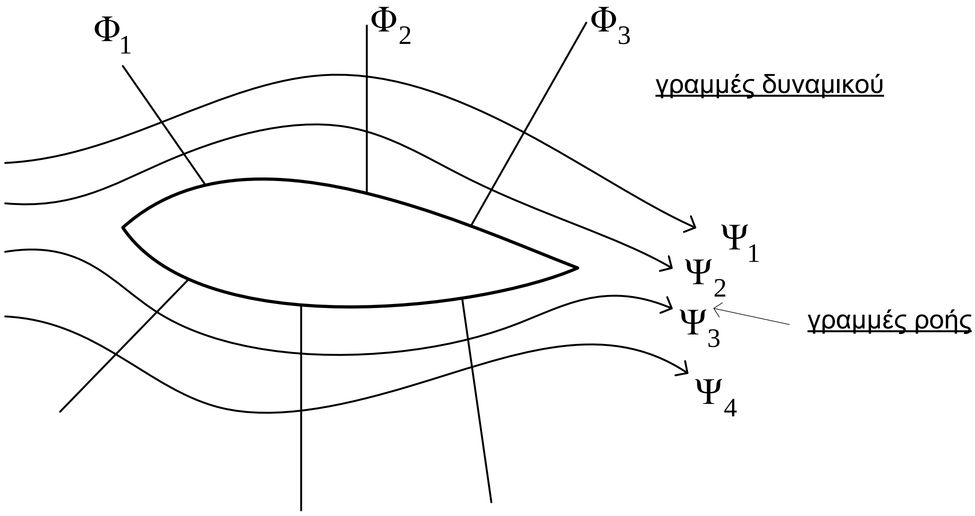
$$d\Psi = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = 0 \;\Rightarrow\; -vdx + udy = 0 \;\Rightarrow$$

$$(dy/dx)_{\Psi=\sigma\tau\alpha\theta} = v/u \tag{1.21}$$

Από τις (1.20) και (1.21) προκύπτει:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\sigma\tau\alpha\theta} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\sigma\tau\alpha\theta} = -1 \tag{1.22}$$

δηλαδή οι γραμμές ροής και οι γραμμές δυναμικού τέμνονται υπό ορθή γωνία.



Σχήμα 1.11*: Γραμμές δυναμικού* (Φ) *και ροϊκές γραμμές* (Ψ) *γύρω από αεροτομή.*

1.6 Παραδείγματα – Ασκήσεις

1.6.1 Μορφή και συνεκτικότητα πεδίου ροής

Θεωρούμε πεδίο ταχυτήτων ροής που δίνεται με βάση τις συνιστώσες $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ και $v = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}$. Τι μορφή έχει το πεδίο ροής; Είναι η ροή συνεκτική;

Λύση

Η κλίση της ροϊκής γραμμής σε ένα σημείο είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{-x}{x^2 + y^2}}{\dfrac{y}{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow$$

$$\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 = -x^2 + c'$$

Οπότε, η εξίσωση της ροϊκής γραμμής είναι:

$$y^2 + x^2 = c'$$

δηλαδή, οι ροϊκές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι.

Υπολογίζουμε τη στροβιλότητα της ροής:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \dfrac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}\vec{k}=
$$

$$
=0\vec{\imath}+0\vec{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]\vec{k}=
$$

$$
=0\vec{\imath}+0\vec{j}+\left[\frac{-x^2-y^2+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\vec{k}=
$$

$$
=0\vec{\imath}+0\vec{j}+\left(\frac{x^2-y^2-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\vec{k}=0\vec{\imath}+0\vec{j}+0\vec{k}
$$

δηλαδή η ροή είναι αστρόβιλη και επομένως μη συνεκτική.

1.6.2 Ασυμπίεστο και αστρόβιλο πεδίο ροής

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός ροϊκού πεδίου, δίνονται από τις σχέσεις:

$$u = -A\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + By + C \text{ και}$$

$$v = -E\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) + Fx + G$$

Να υπολογιστεί η σχέση μεταξύ των συντελεστών A,B,C,E,F,G ώστε η ροή να είναι

A. Ασυμπίεστη

B. Αστρόβιλη

Λύση

A) Για να είναι η ροή ασυμπίεστη πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας της ασυμπίεστης ροής, δηλαδή $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ όπου

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -A\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -A\frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -E\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -E\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -E\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\text{Άρα } -A\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-E\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0 \Rightarrow A=E$$

Αρκεί δηλαδή να ισχύει η παραπάνω σχέση για να είναι η ροή ασυμπίεστη

B) Ομοίως, για να είναι η ροή αστρόβιλη πρέπει: $\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ όπου

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-E\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)+F=-E\frac{-y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+F=E\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+F$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-A\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+B=-A\frac{-x\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+B=A\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+B$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\omega=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad E\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+F-A\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+B=0$$

και θεωρώντας ασυμπίεστη ροή ($A=E$) είναι:

$$B=F$$

Παρατηρούμε ότι οι σταθερές C και G δεν επηρεάζουν τον τύπο του πεδίου ροής.