

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΡΟΗ FANNO Ακαδ.Έτος 2025 - 2026

Ερώτηση_01: Στη συμπίεστη ροή σε μια ροή Fanno προκύπτει ότι σε υποηχητική ροή η τριβή αυξάνει την ταχύτητα ενώ μειώνει τη θερμοκρασία. Πως ερμηνεύεται η αύξηση της ταχύτητας δεδομένης της τριβής, θα περίμενε κανείς να μειώνεται.

Αυτό είναι ένα από τα πιο συναρπαστικά και, αρχικά, αντιδιασθητικά (counter-intuitive) φαινόμενα στη δυναμική των συμπίεστων ρευστών. Στην καθημερινή μας εμπειρία με ασυμπίεστα ρευστά (π.χ. νερό σε σωλήνα), η τριβή προκαλεί πτώση πίεσης και μείωση της ταχύτητας. Στη **ροή Fanno** όμως, τα πράγματα αλλάζουν λόγω της μεταβολής της **πυκνότητας**.

Ας δούμε πώς ερμηνεύεται η αύξηση της ταχύτητας σε υποηχητική ροή:

1. Η επίδραση στην Πυκνότητα (Το κλειδί της λύσης)

Σε μια ροή Fanno, η τριβή προκαλεί συνεχή **πτώση της στατικής πίεσης** (P) κατά μήκος του σωλήνα. Επειδή η ροή είναι συμπίεστη, η πτώση της πίεσης οδηγεί σε σημαντική **μείωση της πυκνότητας** (ρ) του αερίου (το αέριο «διαστέλλεται»).

Από την **αρχή διατήρησης της μάζας** (εξίσωση συνέχειας) για σταθερή διατομή σωλήνα (A):

$$\dot{m} = \rho \cdot v \cdot A = \text{σταθερό}$$

Αν η πυκνότητα ρ μειώνεται, τότε η ταχύτητα v **πρέπει υποχρεωτικά να αυξηθεί** για να παραμείνει σταθερή η παροχή μάζας.

2. Ενεργειακή Ερμηνεία (Θερμοκρασία και Ενθαλπία)

Η ροή Fanno είναι αδιαβατική ($Q = 0$), οπότε η **ολική ενθαλπία** (h_0) παραμένει σταθερή:

$$h + \frac{v^2}{2} = h_0 = \text{σταθερό}$$

Η τριβή μετατρέπει ένα μέρος της κινητικής ενέργειας σε θερμότητα, αλλά ταυτόχρονα η πτώση πίεσης προκαλεί εκτόνωση του αερίου. Σε υποηχητική ροή, η ενέργεια που απαιτείται για την επιτάχυνση του αερίου (λόγω της μείωσης της πυκνότητας) "αντλείται" από την εσωτερική ενέργεια (ενθαλπία) του ρευστού. Έτσι, η στατική θερμοκρασία (T) πέφτει καθώς η ταχύτητα αυξάνεται.

3. Η Φυσική "Αντίφαση"

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί: "*Μα η τριβή δεν ασκεί δύναμη αντίθετη στη ροή;*"

Ναι, η τριβή όντως καταναλώνει μηχανική ενέργεια, η οποία εμφανίζεται ως **αύξηση της**

εντροπίας (s).

- Σε **υποηχητική ροή** ($M < 1$): Η επίδραση της πτώσης της πυκνότητας υπερισχύει της άμεσης επιβράδυνσης από την τριβή, οδηγώντας σε επιτάχυνση προς το $M = 1$ (choking point).
- Σε **υπερηχητική ροή** ($M > 1$): Συμβαίνει το αντίθετο. Η τριβή αυξάνει την πίεση και την πυκνότητα, με αποτέλεσμα η ταχύτητα να **μειώνεται**, πάλι προς το $M = 1$.

Σύνοψη (Υποηχητική περίπτωση)

Η τριβή «στριμώχνει» το αέριο ενεργειακά, αναγκάζοντάς το να εκτονωθεί. Η εκτόνωση αυτή μειώνει την πυκνότητά του τόσο πολύ, που το αέριο αναγκάζεται να τρέξει πιο γρήγορα για να «χωρέσει» να περάσει την ίδια μάζα από τη σταθερή διατομή του σωλήνα.

Ενδιαφέρουσα σημείωση: Αν ο σωλήνας είναι αρκετά μακρύς, η ταχύτητα θα αυξάνεται λόγω τριβής μέχρι ο αριθμός Mach να γίνει ακριβώς **1**. Σε εκείνο το σημείο η ροή «στραγγαλίζεται» (choked flow) και δεν μπορεί να επιταχυνθεί άλλο, εκτός αν αλλάξουν οι συνθήκες στην είσοδο.

Ερώτηση_02: Στη ροή Fanno προκύπτει πάλι μείωση της ολικής πίεσης τόσο σε υποηχητική όσο και σε υπερηχητική ροή. Πως ερμηνεύεται αυτή η κατάσταση.

Η μείωση της **ολικής πίεσης** (P_0) είναι ίσως το πιο θεμελιώδες χαρακτηριστικό της ροής Fanno και αποτελεί άμεση συνέπεια του **Δεύτερου Θερμοδυναμικού Νόμου**.

Ενώ η στατική πίεση, η ταχύτητα και η θερμοκρασία μπορεί να αυξάνονται ή να μειώνονται ανάλογα με το αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική, η ολική πίεση **πάντα μειώνεται** και στις δύο περιπτώσεις. Ας δούμε γιατί:

1. Η Σύνδεση με την Εντροπία

Σε μια αδιαβατική ροή με τριβή (Fanno), η τριβή είναι μια **μη αντιστρεπτή διαδικασία**. Κάθε μη αντιστρεπτότητα σε ένα σύστημα προκαλεί αύξηση της **εντροπίας (s)**.

Η σχέση που συνδέει τη μεταβολή της εντροπίας με την ολική πίεση σε ένα τέλειο αέριο είναι:

$$\Delta s = -R \cdot \ln\left(\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}}\right)$$

Εφόσον η τριβή επιβάλλει $\Delta s > 0$ (αύξηση εντροπίας), η μαθηματική αναγκαιότητα επιβάλλει:

$$\ln\left(\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}}\right) < 0 \implies P_{0,2} < P_{0,1}$$

2. Η Φυσική Ερμηνεία: Η "Διαθεσιμότητα" της Ενέργειας

Η ολική πίεση δεν είναι απλώς μια τιμή πίεσης· είναι ένα μέτρο της **ικανότητας του ρευστού να παράγει έργο** (διαθέσιμη ενέργεια).

- Στη ροή Fanno, η **ολική ενθαλπία** (h_0) παραμένει σταθερή (επειδή δεν προσφέρουμε ούτε αφαιρούμε θερμότητα). Δηλαδή, το συνολικό ενεργειακό περιεχόμενο του αερίου δεν αλλάζει.
- Ωστόσο, η τριβή υποβαθμίζει την **ποιότητα** αυτής της ενέργειας. Μετατρέπει τη "χρήσιμη" μηχανική ενέργεια σε "άχρηστη" εσωτερική ενέργεια (θερμότητα λόγω τριβής), αυξάνοντας την αταξία του συστήματος (εντροπία).

Η μείωση της ολικής πίεσης είναι ουσιαστικά το "τίμημα" που πληρώνει το ρευστό σε απώλεια ωφέλιμης ενέργειας για να υπερνικήσει τις δυνάμεις τριβής στα τοιχώματα.

3. Σύγκριση Υποηχητικής και Υπερηχητικής Ροής

Παρόλο που η P_0 μειώνεται και στις δύο περιπτώσεις, ο τρόπος που το ρευστό "αντιδρά" είναι διαφορετικός:

Χαρακτηριστικό	Υποηχητική Ροή ($M < 1$)	Υπερηχητική Ροή ($M > 1$)
Επίδραση Τριβής	Επιταχύνει τη ροή ($M \rightarrow 1$)	Επιβραδύνει τη ροή ($M \rightarrow 1$)
Στατική Πίεση (P)	Μειώνεται	Αυξάνεται
Ολική Πίεση (P_0)	Μειώνεται	Μειώνεται
Εντροπία (s)	Αυξάνεται	Αυξάνεται

4. Το Σημείο Στραγγαλισμού (Choking)

Αν συνεχίσουμε να προσθέτουμε μήκος σωλήνα, η εντροπία θα αυξάνεται και η P_0 θα μειώνεται μέχρι η ροή να φτάσει στο σημείο $M = 1$. Σε αυτό το σημείο, η εντροπία φτάνει στη **μέγιστη δυνατή τιμή** της για τη συγκεκριμένη ροή Fanno. Πέρα από αυτό το σημείο, η ροή δεν μπορεί να προχωρήσει (φαινόμενο choking), γιατί οποιαδήποτε περαιτέρω τριβή θα απαιτούσε μείωση της εντροπίας, κάτι που απαγορεύεται από τον Δεύτερο Νόμο της Θερμοδυναμικής.

Συνοπτικά: Η πτώση της ολικής πίεσης είναι η "σφραγίδα" της τριβής. Δεν μπορείς να έχεις τριβή χωρίς να χάσεις ολική πίεση, όσο γρήγορα ή αργά κι αν κινείται το αέριο.

Ερώτηση_03: Απόδειξη της σχέσης $\Delta s = f(P_02/P_01)$

Η απόδειξη αυτή είναι από τις πιο "κομψές" στη Θερμοδυναμική, καθώς συνδέει μια αφηρημένη έννοια όπως η εντροπία με μια μετρήσιμη εργαστηριακή τιμή, όπως η ολική πίεση.

1. Η θεμελιώδης σχέση Gibbs

Η πρώτη καταστατική σχέση της θερμοδυναμικής (συνδυασμός 1ου και 2ου Νόμου) για την εντροπία s και την ενθαλπία h είναι:

$$Tds = dh - v dP$$

Όπου $v = 1/\rho$ ο ειδικός όγκος. Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ($Pv = RT \implies v = RT/P$), η σχέση γίνεται:

$$ds = \frac{dh}{T} - R \frac{dP}{P}$$

Για ένα θερμικά τέλει αέριο, ισχύει $dh = c_p dT$. Άρα:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$$

2. Η έννοια της Ολικής Κατάστασης (Stagnation State)

Η ολική πίεση (P_0) και η ολική θερμοκρασία (T_0) ορίζονται ως η κατάσταση που θα προέκυπτε αν το ρευστό επιβραδυνόταν μέχρι μηδενικής ταχύτητας **ισεντροπικά** ($ds = 0$).

Αυτό σημαίνει ότι σε οποιοδήποτε σημείο της ροής, η εντροπία της στατικής κατάστασης (s) είναι **ίση** με την εντροπία της αντίστοιχης ολικής κατάστασης (s_0):

$$s = s_0$$

Συνεπώς, η μεταβολή της εντροπίας μεταξύ δύο σημείων (1) και (2) της ροής μπορεί να εκφραστεί μέσω των ολικών ιδιοτήτων:

$$s_2 - s_1 = s_{0,2} - s_{0,1}$$

3. Εφαρμογή στις Ολικές Ιδιότητες

Εφαρμόζουμε την ολοκληρωμένη μορφή της σχέσης Gibbs μεταξύ των ολικών καταστάσεων (0,1) και (0,2):

$$\Delta s = \int_{T_{0,1}}^{T_{0,2}} c_p \frac{dT_0}{T_0} - \int_{P_{0,1}}^{P_{0,2}} R \frac{dP_0}{P_0}$$

4. Η συνθήκη της Ροής Fanno (Αδιαβατική Ροή)

Στη ροή Fanno, η ροή είναι **αδιαβατική** ($q = 0$) και δεν παράγεται τεχνικό έργο. Από την εξίσωση ενέργειας για μόνιμη ροή, η ολική ενθαλπία παραμένει σταθερή:

$$h_0 = \text{σταθερό} \implies c_p T_0 = \text{σταθερό} \implies T_{0,1} = T_{0,2}$$

Επειδή λοιπόν η ολική θερμοκρασία είναι σταθερή ($dT_0 = 0$), ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται:

$$\int_{T_{0,1}}^{T_{0,2}} c_p \frac{dT_0}{T_0} = c_p \ln\left(\frac{T_{0,2}}{T_{0,1}}\right) = c_p \ln(1) = 0$$

5. Τελικό Συμπέρασμα

Μας απομένει μόνο ο δεύτερος όρος:

$$\Delta s = - \int_{P_{0,1}}^{P_{0,2}} R \frac{dP_0}{P_0} \implies \Delta s = -R [\ln P_0]_{P_{0,1}}^{P_{0,2}}$$

Και τελικά:

$$\Delta s = -R \ln\left(\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}}\right)$$

Γιατί είναι σημαντικό αυτό;

- Αν $P_{0,2} < P_{0,1}$ (πτώση ολικής πίεσης), τότε το κλάσμα είναι < 1 , ο λογάριθμος είναι αρνητικός, και με το πρόσημο $(-)$ μπροστά προκύπτει $\Delta s > 0$.
- Αυτό επιβεβαιώνει ότι σε κάθε πραγματική ροή με τριβή, η ολική πίεση **πρέπει** να μειώνεται για να ικανοποιείται ο 2ος Νόμος της Θερμοδυναμικής.

Ερώτηση_04: Πως συνδέεται το παραπάνω συμπέρασμα με τους επιμέρους κλάδους της ροής Fanno (υποηχητική, υπερηχητική) με την έννοια ότι σε κάθε περίπτωση προκύπτει μείωση της P_0 . Πως υποστηρίζεται η συγκεκριμένη μείωση της P_0 σε κάθε μία εκ των 2 περιπτώσεων

Για να κατανοήσουμε γιατί η ολική πίεση (P_0) μειώνεται **πάντα**, ανεξάρτητα από το αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική, πρέπει να δούμε τη διαφορική μορφή των εξισώσεων κίνησης.

Το μαθηματικό "κλειδί" βρίσκεται στη σύνδεση της τριβής με τις μεταβολές των παραμέτρων της ροής.

1. Η Θεμελιώδης Διαφορική Εξίσωση

Σε μια ροή Fanno (σταθερή διατομή A , αδιαβατική), συνδυάζοντας την εξίσωση συνεχείας, την ορμή και την ενέργεια, προκύπτει η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της ολικής πίεσης συναρτήσει του αριθμού Mach (M) και του συντελεστή τριβής (f):

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} \cdot \left(\frac{4f dx}{D} \right)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η "καρδιά" της απάντησης. Ας την αναλύσουμε:

- γ : Λόγος ειδικών θερμοτήτων (πάντα θετικός, $\approx 1,4$ για τον αέρα).
- M^2 : Το τετράγωνο του αριθμού Mach (πάντα θετικό).
- f : Συντελεστής τριβής Fanning (πάντα θετικός).
- dx : Η στοιχειώδης απόσταση κατά μήκος του σωλήνα (θετική προς την κατεύθυνση της ροής).
- D : Η υδραυλική διάμετρος (πάντα θετική).

Παρατήρηση: Επειδή όλοι οι όροι στο δεξί μέλος είναι θετικοί και υπάρχει το αρνητικό πρόσημο ($-$), προκύπτει αναγκαστικά ότι $dP_0 < 0$ για κάθε $dx > 0$.

2. Ανάλυση ανά Κλάδο Ροής

Παρόλο που η P_0 μειώνεται και στις δύο περιπτώσεις, ο μηχανισμός "αντίδρασης" του ρευστού διαφέρει:

A. Υποηχητική Ροή ($M < 1$)

Σε αυτόν τον κλάδο, η τριβή "σπρώχνει" τη ροή προς τον αριθμό Mach 1.

- **Μαθηματικά:** Καθώς το dx αυξάνεται, η P_0 μειώνεται. Ταυτόχρονα, η στατική πίεση (P) μειώνεται και η ταχύτητα (v) αυξάνεται.
- **Ερμηνεία:** Το ρευστό "εξαργυρώνει" την ολική του πίεση για να κερδίσει ταχύτητα (κινητική ενέργεια) και να καλύψει τις απώλειες τριβής. Η πτώση της P_0 είναι η απόδειξη ότι η ενέργεια που κερδίζει σε ταχύτητα είναι "φθηνότερη" από την ενέργεια που χάνει λόγω τριβής.

B. Υπερηχητική Ροή ($M > 1$)

Εδώ συμβαίνει το αντίθετο ως προς τις στατικές ιδιότητες, αλλά το ίδιο ως προς την P_0 . Η τριβή πάλι "σπρώχνει" τη ροή προς το $M = 1$, αλλά αυτή τη φορά επιβραδύνοντάς την.

- **Μαθηματικά:** Παρόλο που $M > 1$, ο όρος M^2 στην παραπάνω εξίσωση παραμένει θετικός. Άρα, $dP_0 < 0$.
- **Ερμηνεία:** Σε υπερηχητική ροή, η τριβή προκαλεί αύξηση της στατικής πίεσης (P) και μείωση της ταχύτητας. Θα μπορούσε κανείς να νομίσει ότι η αύξηση της πίεσης P "σώζει" την κατάσταση, αλλά η απώλεια κινητικής ενέργειας και η αύξηση της εντροπίας είναι τόσο μεγάλες που η συνολική "ποιότητα" της ροής (P_0) αναπόφευκτα καταρρέει.

3. Γεωμετρική Απεικόνιση (Fanno Line στο $h - s$ διάγραμμα)

Αν σχεδιάσουμε τη ροή Fanno σε ένα διάγραμμα Ενθαλπίας-Εντροπίας ($h - s$):

1. Η καμπύλη Fanno έχει σχήμα "C".
2. Το πάνω μέρος της καμπύλης αντιστοιχεί σε υποηχητική ροή και το κάτω σε υπερηχητική.
3. Το **σημείο μέγιστης εντροπίας** (s_{max}) είναι το σημείο όπου $M = 1$.
4. Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο, η ροή μπορεί να κινηθεί **μόνο προς τα δεξιά** (αύξηση του s).

Επειδή η ολική πίεση P_0 συνδέεται με την εντροπία μέσω της σχέσης

$\Delta s = -R \ln(P_{0,2}/P_{0,1})$, η κίνηση προς τα δεξιά ($+s$) στο διάγραμμα αντιστοιχεί **πάντα** σε χαμηλότερη ισεντροπική καμπύλη πίεσης.

Σύνοψη: Η τριβή είναι ένας "φόρος" που εισπράττεται σε ολική πίεση. Είτε το ρευστό τρέχει αργά (υποηχητικά) είτε γρήγορα (υπερηχητικά), ο φόρος αυτός είναι πάντα απαιτητός και πάντα αφαιρείται από το κεφάλαιο της P_0 .

Ερώτηση_05: Πως φτάνουμε στην παραπάνω ΔΕ της P_0 .

Η απόδειξη αυτή είναι εξαιρετικά κομψή αν χρησιμοποιήσουμε τη σύνδεση μεταξύ **Ολικής Πίεσης** και **Εντροπίας**, καθώς μας γλιτώνει από τις πολύπλοκες αντικαταστάσεις των επιμέρους διαφορικών των P, ρ, T και v .

Βήμα 1: Η σχέση Ολικής Πίεσης και Εντροπίας

Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, για μια αδιαβατική ροή ($T_0 = \text{σταθερό}$), η μεταβολή της εντροπίας s συνδέεται με την ολική πίεση P_0 μέσω της σχέσης:

$$ds = -R \frac{dP_0}{P_0} \implies \frac{dP_0}{P_0} = -\frac{ds}{R} \quad (\text{Εξίσωση 1})$$

Βήμα 2: Η σχέση Gibbs για τη στατική κατάσταση

Χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη σχέση της Θερμοδυναμικής για τις στατικές ιδιότητες (πίεση P , θερμοκρασία T , ειδικός όγκος $v = 1/\rho$):

$$Tds = dh - \frac{1}{\rho} dP \quad (\text{Εξίσωση 2})$$

Βήμα 3: Εισαγωγή της Εξίσωσης Ενέργειας

Στην αδιαβατική ροή, η ολική ενθαλπία είναι σταθερή ($h + \frac{v^2}{2} = h_0$), άρα η διαφορική της μορφή είναι:

$$dh + vdv = 0 \implies dh = -v dv \quad (\text{Εξίσωση 3})$$

Αντικαθιστούμε την (3) στην (2):

$$Tds = -v dv - \frac{1}{\rho} dP = -\frac{1}{\rho} (\rho v dv + dP) \quad (\text{Εξίσωση 4})$$

Βήμα 4: Η Εξίσωση Ορμής με Τριβή

Για μια ροή σε σωλήνα σταθερής διατομής με τριβή, η εξίσωση ορμής γράφεται:

$$PA - (P + dP)A - \tau_w A_w = \dot{m}(v + dv - v) \\ -dP \cdot A - \tau_w (\text{Περίμετρος} \cdot dx) = \rho A v dv$$

Διαιρώντας με το εμβαδόν διατομής A και χρησιμοποιώντας την υδραυλική διάμετρο $D = 4A/\text{Περ.}$:

$$-dP - \tau_w \frac{4}{D} dx = \rho v dv \implies dP + \rho v dv = -\tau_w \frac{4}{D} dx$$

Αντικαθιστούμε την τάση τριβής τοιχώματος $\tau_w = \frac{1}{2} \rho v^2 f$:

$$dP + \rho v dv = - \left(\frac{1}{2} \rho v^2 f \right) \frac{4}{D} dx \quad (\text{Εξίσωση 5})$$

Βήμα 5: Σύνδεση Ορμής και Εντροπίας

Παρατηρήστε ότι η παρένθεση στην **Εξίσωση 4** είναι ακριβώς το αριστερό μέλος της **Εξίσωσης 5**. Αντικαθιστούμε λοιπόν:

$$Tds = -\frac{1}{\rho} \left[- \left(\frac{1}{2} \rho v^2 f \right) \frac{4}{D} dx \right] \\ Tds = \frac{1}{2} v^2 \frac{4f dx}{D}$$

Λύνουμε ως προς ds/R (για να το χρησιμοποιήσουμε στην Εξίσωση 1):

$$\frac{ds}{R} = \frac{v^2}{2RT} \frac{4f dx}{D}$$

Βήμα 6: Εισαγωγή του Αριθμού Mach

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός Mach ορίζεται ως $M^2 = \frac{v^2}{\gamma RT}$, άρα $\frac{v^2}{RT} = \gamma M^2$.

Αντικαθιστούμε αυτόν τον όρο στην παραπάνω σχέση:

$$\frac{ds}{R} = \frac{\gamma M^2}{2} \frac{4f dx}{D}$$

Τελικό Βήμα

Επιστρέφουμε στην **Εξίσωση 1** ($\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{ds}{R}$) και αντικαθιστούμε το ds/R :

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} \left(\frac{4f dx}{D} \right)$$

Συμπέρασμα

Η μαθηματική αυτή ακολουθία δείχνει ότι:

1. Η πτώση της ολικής πίεσης είναι **ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας** (μέσω του M^2).
2. Είναι **πάντα αρνητική** ($dP_0 < 0$), επειδή τα γ , M , f , dx , D είναι εξ ορισμού θετικά μεγέθη.
3. Η "ταχύτητα" με την οποία χάνεται η ολική πίεση αυξάνεται δραματικά όσο η ροή πλησιάζει σε υπερηχητικές ταχύτητες.

Ερώτηση_06: Ποια είναι τα βήματα επίλυσης της παραπάνω ΔΕ

Για την επίλυση της ΔΕ της ολικής πίεσης στη ροή Fanno, πρέπει να εκφράσουμε την P_0 ως συνάρτηση του αριθμού Mach (M). Αυτό είναι απαραίτητο γιατί καθώς το ρευστό κινείται κατά μήκος του σωλήνα (dx), ο αριθμός Mach μεταβάλλεται, άρα η άμεση ολοκλήρωση ως προς x δεν είναι δυνατή χωρίς να γνωρίζουμε τη σχέση $M(x)$.

Η συνήθης μεθοδολογία είναι να εκφράσουμε τον λόγο $\frac{dP_0}{P_0}$ συναρτήσει του dM και στη συνέχεια να ολοκληρώσουμε από μια τυχαία κατάσταση (M) έως την κρίσιμη κατάσταση ($M = 1$), όπου οι ιδιότητες συμβολίζονται με αστερίσκο (*).

1. Σύνδεση P_0 και M

Από τον ορισμό της ολικής πίεσης για ιδανικό αέριο:

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Παίρνοντας τον φυσικό λογάριθμο ($\ln$) και στις δύο πλευρές:

$$\ln P_0 = \ln P + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma M}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} dM \quad \text{--- (Εξίσωση A)}$$

2. Εύρεση του $\frac{dP}{P}$ συναρτήσει του dM

Στη ροή Fanno, από τον συνδυασμό των εξισώσεων συνέχειας ($\rho v = \text{const}$), καταστατικής ($P = \rho R T$) και ενέργειας ($T_0 = \text{const}$), προκύπτει η γνωστή διαφορική σχέση για τη στατική πίεση:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM \quad \text{--- (Εξίσωση B)}$$

3. Αντικατάσταση και Απλοποίηση

Αντικαθιστούμε την (B) στην (A):

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM + \frac{\gamma M}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} dM$$

Φέρνουμε τα κλάσματα σε κοινό παρονομαστή $M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{-(1 + \gamma M^2 - M^2) + \gamma M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{-1 - \gamma M^2 + M^2 + \gamma M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM$$

Καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση της ολικής πίεσης ως προς Mach:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{M^2 - 1}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM$$

4. Ολοκλήρωση (Προς την κρίσιμη κατάσταση)

Ολοκληρώνουμε από μια κατάσταση με τιμές (P_0, M) έως την κρίσιμη κατάσταση $(P_0^*, M = 1)$:

$$\int_{P_0}^{P_0^*} \frac{dP_0}{P_0} = \int_M^1 \frac{M^2 - 1}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM$$

Το αριστερό μέλος δίνει $\ln(P_0^*/P_0)$. Το δεξί μέλος επιλύεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα ή με τη χρήση της αντικατάστασης $u = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$. Μετά τις πράξεις

προκύπτει:

$$\ln\left(\frac{P_0^*}{P_0}\right) = \ln\left[\frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right]^{-1}$$

5. Τελική Αναλυτική Σχέση

Εκθέτοντας και τις δύο πλευρές στο e , παίρνουμε την τελική εξίσωση που χρησιμοποιείται σε όλους τους πίνακες ροής Fanno:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Σύνοψη της Διαδικασίας

1. **Συσχετίσαμε** την ολική πίεση με τον αριθμό Mach μέσω της ισεντροπικής σχέσης.
2. **Χρησιμοποιήσαμε** τη μεταβολή της στατικής πίεσης στη ροή Fanno.
3. **Απλοποιήσαμε** τους όρους για να πάρουμε μια καθαρή διαφορική εξίσωση $P_0(M)$.
4. **Ολοκληρώσαμε** τη σχέση για να βρούμε τον λόγο των πιέσεων ως προς το σημείο $M = 1$ (choking point).

Αυτή η εξίσωση επιβεβαιώνει μαθηματικά ότι για $M \neq 1$, ο λόγος P_0/P_0^* είναι πάντα μεγαλύτερος από τη μονάδα, που σημαίνει ότι η P_0 μειώνεται πάντα καθώς πλησιάζουμε στο $M = 1$.

Ερώτηση_06α: Παραπάνω κατά την επίλυση της ΔΕ $\frac{dP_0}{P_0}$ συναρτήσε του dM χρησιμοποιήθηκε απευθείας ο λόγος $\frac{dP}{P}$. Πως προκύπτει η Εξίσωση Β όπως έχει δηλωθεί παραπάνω.

Η «Εξίσωση Β» είναι ίσως το πιο κρίσιμο κομμάτι της αλυσίδας, γιατί συνδέει τη στατική πίεση (P) με την κίνηση (Mach). Για να την αποδείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της **λογαριθμικής διαφορίσης** στις τρεις βασικές αρχές.

Ακολουθεί η μαθηματική διαδρομή:

1. Οι τρεις θεμελιώδεις σχέσεις

Ξεκινάμε γράφοντας τις εξισώσεις μας και παίρνοντας αμέσως τη διαφορική τους μορφή:

- **Από τη Διατήρηση Μάζας** ($\rho v A = \text{const}$): Εφόσον η διατομή A είναι σταθερή:
 $\rho v = \text{const}$

$$\ln \rho + \ln v = \ln(\text{const}) \implies \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \implies \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} \quad \text{--- (1)}$$

- Από την Καταστατική Εξίσωση ($P = \rho RT$):

$$\ln P = \ln \rho + \ln R + \ln T \implies \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{--- (2)}$$

- Από τον ορισμό του Αριθμού Mach ($v = M\sqrt{\gamma RT}$):

$$\ln v = \ln M + \frac{1}{2} \ln \gamma + \frac{1}{2} \ln R + \frac{1}{2} \ln T$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad \text{--- (3)}$$

2. Συνδυασμός των σχέσεων

Αντικαθιστούμε τη **Σχέση 1** μέσα στη **Σχέση 2**:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dv}{v} + \frac{dT}{T}$$

Τώρα, αντικαθιστούμε το $\frac{dv}{v}$ από τη **Σχέση 3**:

$$\frac{dP}{P} = -\left(\frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T}\right) + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad \text{--- (4)}$$

3. Εισαγωγή της Εξίσωσης Ενέργειας

Για να φύγει ο όρος dT/T , χρησιμοποιούμε τη ΔΕ της θερμοκρασίας που ακολουθεί (Ερώτηση 6β) η οποία ισχύει για κάθε αδιαβατική ροή):

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma - 1)M}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2} dM$$

Αντικαθιστούμε αυτό στην **Εξίσωση 4**:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \left[-\frac{(\gamma - 1)M}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2} dM \right]$$

4. Τελική Αλγεβρική Απλοποίηση

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $-\frac{dM}{M}$:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dM}{M} \left[1 + \frac{(\gamma - 1)M^2}{2(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)} \right]$$

Κάνουμε ομώνυμα μέσα στην αγκύλη (ο κοινός παρονομαστής είναι το $2 + (\gamma - 1)M^2$):

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dM}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2 + (\gamma - 1)M^2}{2(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)} \right]$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dM}{M} \left[\frac{2 + 2(\gamma - 1)M^2}{2(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)} \right]$$

Απλοποιούμε το 2 στον αριθμητή και τον παρονομαστή:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \right)} dM$$

Γιατί αυτή η εξίσωση είναι «αποκαλυπτική»;

Αν την παρατηρήσεις, θα δεις ότι το δεξί μέλος είναι **πάντα αρνητικό** για αυξανόμενο Mach ($dM > 0$). Αυτό εξηγεί γιατί στην υποηχητική ροή Fanno, καθώς το Mach αυξάνεται λόγω τριβής, η στατική πίεση **αναγκαστικά πέφτει**.

Ερώτηση_06β: Παραπάνω κατά την επίλυση του λόγου $\frac{dP}{P}$ συναρτήσεως του dM χρησιμοποιήθηκε απευθείας ο λόγος $\frac{dT}{T}$. Πως προκύπτει η έκφραση της $\frac{dT}{T}$ αναλυτικά. Ξεκινώντας από την εξίσωση ενέργειας μέχρι τη ΔΕ εξίσωση dT/T , προκύπτει έκφραση που είναι η ίδια είτε για ισεντροπική είτε για ροή Fanno, υπάρχει διαφορά σε κάποιο σημείο κατά την διαδικασία ?

Η διαδικασία για την εύρεση του λόγου $\frac{dT}{T}$ είναι πράγματι κοινή για κάθε **αδιαβατική** ροή (δηλαδή ροή χωρίς ανταλλαγή θερμότητας), όπως είναι η ισεντροπική ροή και η ροή Fanno. Η μόνη προϋπόθεση είναι η διατήρηση της ολικής ενθαλπίας.

Ακολουθεί η μαθηματική ακολουθία:

1. Η Εξίσωση Ενέργειας (Αδιαβατική Μορφή)

Ξεκινάμε από την αρχή ότι σε μια αδιαβατική ροή, η **ολική θερμοκρασία** (T_0) παραμένει σταθερή:

$$c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0 = \text{σταθερό}$$

Διαιρούμε όλα τα μέλη με το $c_p T$:

$$1 + \frac{v^2}{2c_p T} = \frac{T_0}{T}$$

2. Εισαγωγή του Αριθμού Mach

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι $a^2 = \gamma R T$ και η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση είναι $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$. Αντικαθιστούμε αυτούς τους όρους:

$$\frac{v^2}{2c_p T} = \frac{v^2}{2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \right) T} = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{v^2}{\gamma R T}$$

Εφόσον $M^2 = \frac{v^2}{\gamma R T}$, η σχέση γίνεται:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad \text{--- (Εξίσωση 1)}$$

3. Διαφορική Μορφή

Παίρνουμε τον φυσικό λογάριθμο (ln) της (Εξίσωσης 1):

$$\ln T_0 - \ln T = \ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Διαφορίζουμε ως προς τις μεταβλητές T και M . Επειδή η ροή είναι αδιαβατική, $T_0 = \text{const} \implies d(\ln T_0) = 0$:

$$0 - \frac{dT}{T} = d \left[\ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας ($d(\ln u) = du/u$):

$$-\frac{dT}{T} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \cdot d \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

$$-\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma - 1) M dM}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

Τελικά:

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(\gamma - 1) M}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} dM$$

Υπάρχει διαφορά μεταξύ Ισεντροπικής και Fanno;

Η σύντομη απάντηση είναι **όχι ως προς τη μορφή της εξίσωσης, αλλά ναι ως προς τη φυσική αιτία.**

1. **Η έκφραση είναι ταυτόσημη:** Η σχέση $T = f(M)$ εξαρτάται αποκλειστικά από τη διατήρηση της ενέργειας. Εφόσον και οι δύο ροές θεωρούνται αδιαβατικές ($T_0 = \text{const}$), η μαθηματική σχέση μεταξύ της στατικής θερμοκρασίας και του Mach είναι η ίδια. Αν ξέρεις το Mach, ξέρεις και τη θερμοκρασία, είτε έχεις τριβή είτε μεταβολή διατομής.
2. **Πού βρίσκεται η διαφορά;** Η διαφορά έγκειται στο **πώς μεταβάλλεται το M** (το dM της εξίσωσης):
 - **Στην Ισεντροπική Ροή:** Το M αλλάζει επειδή αλλάζει η διατομή του σωλήνα (dA). Η εντροπία παραμένει σταθερή ($ds = 0$).
 - **Στη Ροή Fanno:** Το M αλλάζει επειδή υπάρχει τριβή ($4f dx/D$) σε σωλήνα σταθερής διατομής. Εδώ η εντροπία αυξάνεται ($ds > 0$).

Με λίγα λόγια: Η "γέφυρα" που συνδέει το T με το M είναι η ίδια (Ενέργεια). Ο "δρόμος" όμως που αναγκάζει το M να αλλάξει είναι διαφορετικός (Γεωμετρία vs Τριβή).

Γι' αυτόν τον λόγο, αν ανοίξεις τους πίνακες αεροδυναμικής, οι τιμές T/T_0 στον πίνακα της Ισεντροπικής ροής και στον πίνακα της ροής Fanno για τον ίδιο αριθμό Mach είναι **ταυτόσημες**.

Ερώτηση_07: Εύρεση ακρότατου - Απόδειξη της $s_{\max}$ σε $Ma=1$ στη ροή Fanno. Το προφανές είναι να αποδείξει κανείς ότι στο σημείο όπου $Ma=1$ η παράγωγος της εντροπίας ως προς τη θερμοκρασία θα πρέπει να είναι μηδέν.

1. Οι Βασικές Εξισώσεις

Ξεκινάμε από τις τρεις πυλώνες της αδιαβατικής ροής:

- **Εντροπία (Ιδανικό αέριο):** $ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$
- **Σταθερή Παροχή Μάζας:** $\dot{m} = \rho \cdot v \cdot A = \text{const} \implies \rho = \frac{\dot{m}}{A \cdot v}$
- **Ολική Θερμοκρασία (Ενέργεια):** $c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0 \implies v = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$

2. Έκφραση της Πίεσης P ως συνάρτηση της T

Θέλουμε να εκφράσουμε την πίεση P συναρτήσει της θερμοκρασίας T , ώστε να βρούμε την παράγωγο ds/dT .

Από την καταστατική εξίσωση ($P = \rho RT$) και αντικαθιστώντας την πυκνότητα ρ :

$$P = \left(\frac{\dot{m}}{A \cdot v} \right) RT$$

Τώρα, αντικαθιστούμε την ταχύτητα v από την εξίσωση ενέργειας:

$$P = \frac{\dot{m}R}{A} \cdot \frac{T}{\sqrt{2c_p(T_0 - T)}}$$

Σε αυτή τη μορφή, ο όρος $\frac{\dot{m}R}{A}$ είναι μια καθαρή **σταθερά** για τη ροή μας.

3. Διαφορική Μορφή $\frac{dP}{P}$

Χρησιμοποιούμε τη λογαριθμική διαφοροποίηση για να απλοποιήσουμε τις πράξεις:

$$\ln P = \ln \left(\frac{\dot{m}R}{A} \right) + \ln T - \frac{1}{2} \ln(2c_p) - \frac{1}{2} \ln(T_0 - T)$$

Διαφορίζοντας ως προς T (θυμηθείτε ότι οι λογάριθμοι των σταθερών μηδενίζονται):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= \frac{1}{T} dT - \frac{1}{2} \left(\frac{-dT}{T_0 - T} \right) \\ \frac{dP}{P} &= \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{2(T_0 - T)} \right) dT \end{aligned}$$

4. Εύρεση της Παραγώγου της Εντροπίας

Αντικαθιστούμε το $\frac{dP}{P}$ στην αρχική εξίσωση της εντροπίας:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \left[\frac{1}{T} + \frac{1}{2(T_0 - T)} \right] dT$$

Διαιρούμε με dT :

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p - R}{T} - \frac{R}{2(T_0 - T)}$$

Εφόσον $c_p - R = c_v$, η τελική παράγωγος είναι:

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_v}{T} - \frac{R}{2(T_0 - T)}$$

5. Το Σημείο Μέγιστης Εντροπίας ($M = 1$)

Για να βρούμε πού μηδενίζεται η παράγωγος, θέτουμε $\frac{ds}{dT} = 0$:

$$\frac{c_v}{T} = \frac{R}{2(T_0 - T)} \implies 2c_v(T_0 - T) = RT$$

Διαιρώντας με c_v και γνωρίζοντας ότι $\frac{R}{c_v} = \gamma - 1$:

$$2T_0 - 2T = (\gamma - 1)T$$

$$2T_0 = (\gamma + 1)T \implies \mathbf{T} = \frac{2T_0}{\gamma + 1}$$

Αυτή είναι η **κρίσιμη θερμοκρασία** (T^*). Αν την αντικαταστήσουμε στην κλασική σχέση ολικής θερμοκρασίας:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{\gamma + 1}{2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \implies \mathbf{M} = 1$$

Συγκεντρωτικά

1. Η πίεση P αλλάζει επειδή αλλάζει η **πυκνότητα** (μέσω της $v(T)$) και η **θερμοκρασία**.
2. Όλα προκύπτουν με εφαρμογή νόμων διατήρησης.
3. Το $M = 1$ δεν είναι απλώς ένας αριθμός, αλλά το σημείο όπου η θερμοδυναμική «ισορροπία» μεταξύ πίεσης και θερμοκρασίας οδηγεί στη μέγιστη δυνατή αταξία (εντροπία).