9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). (1)

- Πέρα από τα κρουστικά κύματα (ορθά ή πλάγια), ισεντροπική ροή (αντιστρεπτή και αδιαβατική) συζητήθηκε στην περίπτωση συγκλίνοντος – αποκλίνοντος ακροφυσίου , στην οποία όμως δεν περιλαμβάνει μεταφορά θερμότητας και τριβή.
- Στα πρακτικά προβλήματα συμπιεστής ροής περιλαμβάνονται χημικές αντιδράσεις (καύση), πυρηνικές αντιδράσεις, εξάτμιση – συμπύκνωση, προσθήκη ή απώλεια θερμότητας από τα τοιχώματα του αγωγού.
- Τέτοιες πολύπλοκες ροές μπορούν να αναλυθούν μοντελοποιώντας τη γέννεση και την απορρόφηση θερμικής ενέργειας ως μεταφορά θερμότητας ίδιου ρυθμού μέσω των τοιχωμάτων του αγωγού αγνοώντας μεταβολές στη χημική σύσταση της ροής.
- Κατά την ανάλυση δεν προσμετρώνται πάλι φαινόμενα τριβής, μεταβολές στη διατομή του αγωγού και η ροή θεωρείται μονοδιάστατη.

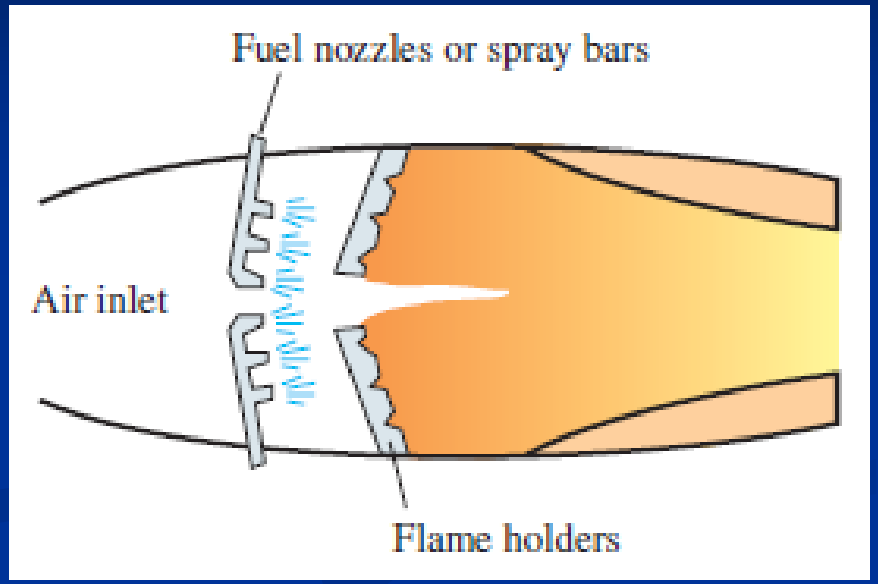


FIGURE 17–52 Many practical compressible flow problems involve combustion, which may be modeled as heat gain through the duct wall.
(Cengel , Bowles, Kanonglou).

- Θεωρείται δηλ. μόνιμη, μονοδιάστατη ροή ιδανικού αερίου με σταθερές ειδικές θερμότητες σε αγωγό σταθερής διατομής με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή. Μια ροή υπό αυτές τις συνθήκες καλείται **ροή Rayleigh**

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). (2)

- Κατά τη μελέτη της ροής Rayleigh θεωρείται όγκος ελέγχου και σε αυτόν εφαρμόζονται οι εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας.

- ΑΔΜ $$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

- ΑΔΟ $$\sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}$$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \longrightarrow P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- ΑΔΕ $$\dot{Q} + \dot{m}\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) \longrightarrow q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$q = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

$$q = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

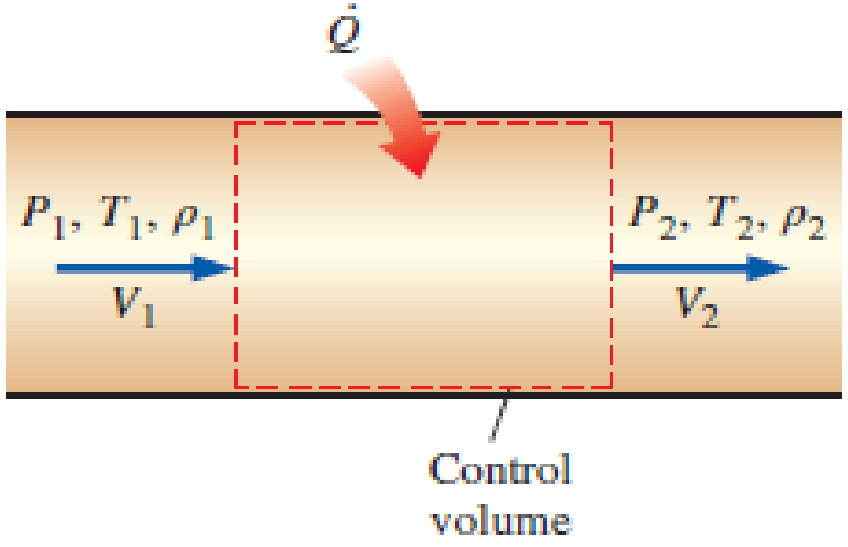


FIGURE 17–53 Control volume for flow in a Constant - area duct with heat transfer and negligible friction. *(Cengel, Bowles, Kanonglou)*.

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). (3)

- Κατά τη μελέτη της ροής Rayleigh θεωρείται όγκος ελέγχου και σε αυτόν εφαρμόζονται οι εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας.
- **ΑΔΜ:** Το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του αγωγού A είναι σταθερό.
- **ΑΔΟ:** Εφαρμόζεται στη x- διεύθυνση (ροή μονοδιάστατη) δεν θεωρούνται διατμητικές δυνάμεις ούτε άλλες εξωτερικές δυνάμεις.
- **ΑΔΕ:** Ο CV δεν περιλαμβάνει διατμητικό τεχνικό ή άλλες μορφές έργου και $\Delta p_e=0$. (η ροή γίνεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς υψομετρικές διαφορές).
- Στη διάρκεια μιας ροής Rayleigh h_0, T_0 μεταβάλλονται (αυξάνονται και οι δύο ιδιότητες όταν θερμότητα μεταφέρεται στο ρευστό δηλ. ***q > 0***).

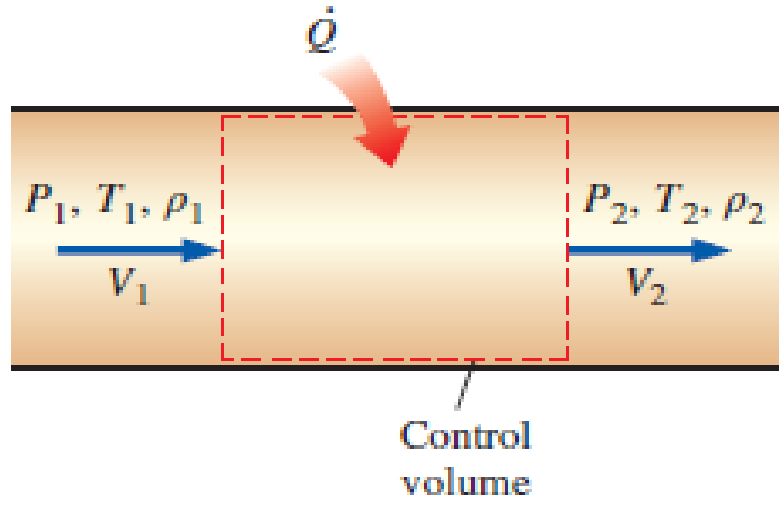


FIGURE 17–53 Control volume for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction.(Cengel , Bowles, Kanonglou).

- Μεταβολή εντροπίας **(Δs)** :
  - ✓ Η εντροπία του συστήματος μεταβάλλεται μόνο λόγω της μεταφοράς θερμότητας, αυξάνεται με την προσθήκη θερμότητας, μειώνεται με την απώλεια θερμότητας.
  - ✓ Η εντροπία είναι ιδιότητα της ροής, οπότε αποτελεί καταστατική συνάρτηση και θεωρώντας ιδανικό αέριο με σταθερές ειδικές θερμότητες, η μεταβολή της θα δίνεται

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). (4)

- Κατά τη μελέτη της ροής Rayleigh θεωρείται αέριο γνωστών ιδιοτήτων R, k, cp.
- Για δεδομένη κατάσταση εισόδου (1) θεωρούνται γνωστές οι 5 ιδιότητες εισόδου δηλ. P_1, T_1, ρ_1, V_1, s_1 και μέσω των εξισώσεων και για όποια τιμή q υπολογίζονται οι 5 ιδιότητες εξόδου P_2, T_2, ρ_2, V_2, s_2.
- Πρακτικά ο προσδιορισμός των κατάντη καταστάσεων γίνεται υποθέτοντας τιμές T_2 και στη συνέχεια μέσω των εξισώσεων διατήρησης και συμπληρωματικά της καταστατικής εξίσωσης, υπολογίζονται οι υπόλοιπες ιδιότητες όπως και το ποσό της μεταφερόμενης θερμότητας q.
- Η αναπαράσταση της ροής Rayleigh σε διάγραμμα T-s δίνει την καμπύλη που περνά από τη γνωστή κατάσταση εισόδου.

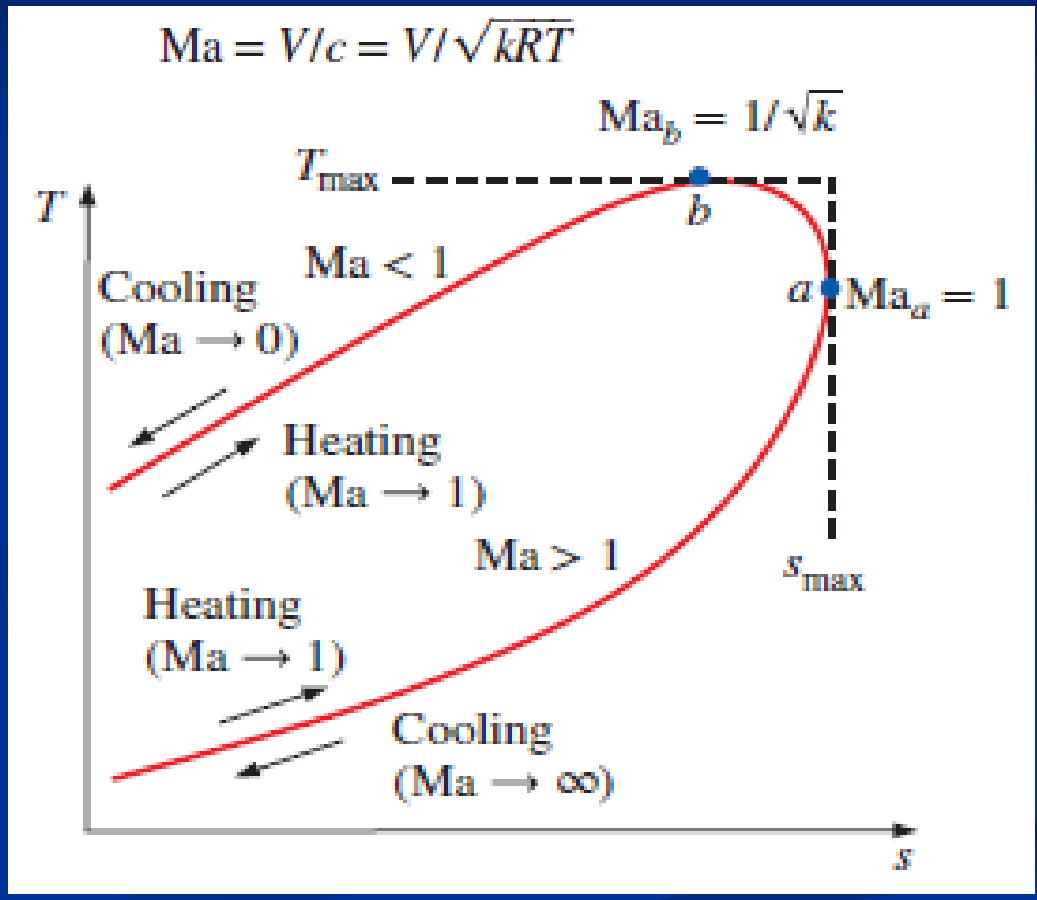


FIGURE 17–54 *T-s* diagram for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction (Rayleigh flow). (Cengel , Bowles, Kanonglou).

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). (5)

1. Όλες οι καταστάσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις διατήρησης ανήκουν στη γραμμή Rayleigh. Δηλ. για γνωστή αρχική κατάσταση δεν μπορεί να υπάρξει κατάντη κατάσταση ροής εκτός της γραμμής Rayleigh. Δηλ. η γραμμή Rayleigh αποτελεί το γ.τ των φυσικά εφικτών κατάντη καταστάσεων που αντιστοιχούν σε δεδομένη αρχική κατάσταση.

2. Προσθέτοντας q στο ρευστό η εντροπία s αυξάνεται, αυτό ερμηνεύεται ως κίνηση προς τα δεξιά πάνω στην καμπύλη.

   - ✓ Στο σημείο (α) => Ma = 1 και είναι το σημείο μέγιστης εντροπίας.
   - ✓ Οι καταστάσεις ροής που αντιστοιχούν στο άνω τμήμα της γραμμής Rayleigh πάνω από το (α) είναι υποηχητικές ενώ,
   - ✓ Οι καταστάσεις ροής που αντιστοιχούν στο κάτω τμήμα της γραμμής Rayleigh κάτω από το (α) είναι υπερηχητικές.
   - ✓ Άρα μια διεργασία κινείται προς τα δεξιά με την προσθήκη θερμότητας και προς τα αριστερά με την απόρριψη θερμότητας.

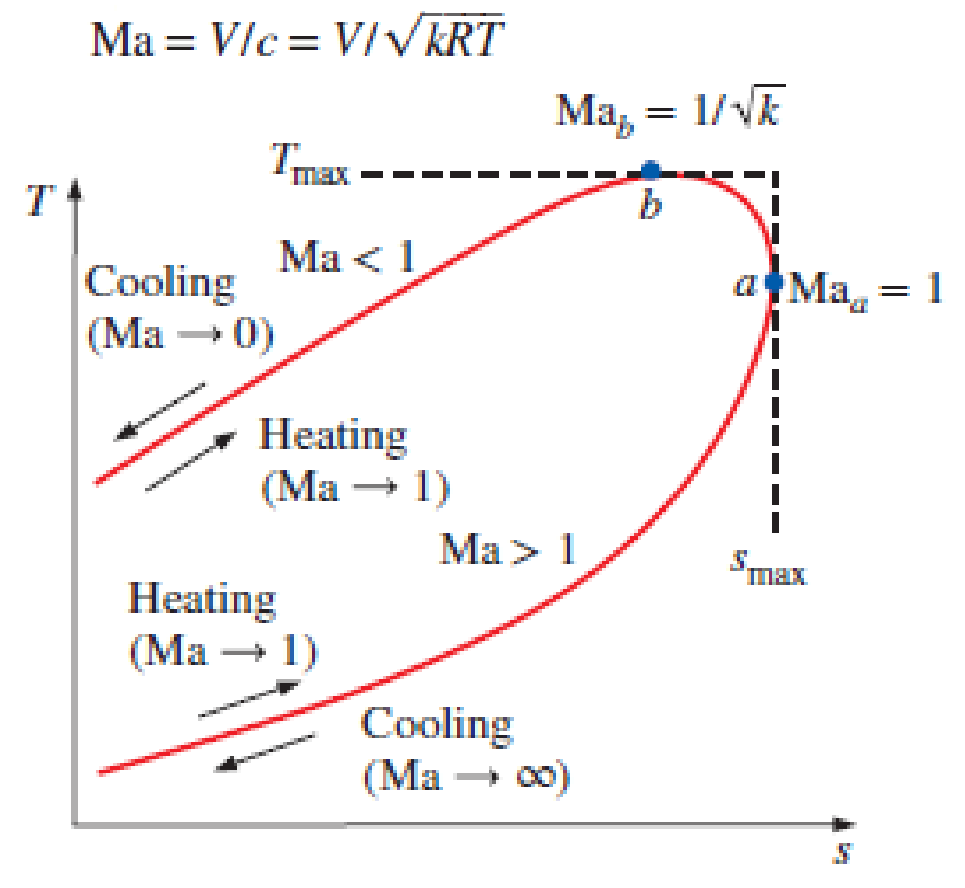


FIGURE 17–54 *T-s* diagram for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction (Rayleigh flow). (Cengel , Bowles, Kanonglou).

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). *(6)*

3. Στις υποηχητικές ροές η θέρμανση αυξάνει τον Ma ενώ στις υπερηχητικές τον μειώνει. Ο Ma της ροής προσεγγίζει την τιμή Ma = 1 και στις 2 περιπτώσεις (από 0 στις υποηχητικές και από ∞ στις υπερηχητικές ροές) στη διάρκεια της θέρμανσης.

4. Από το ενεργειακό ισοζύγιο **$q = c_p\,(T_{02} - T_{01})$** φαίνεται ότι η θέρμανση αυξάνει την T_0 (T_{02}) τόσο στις υποηχητικές όσο και στις υπερηχητικές ροές, ενώ η ψύξη τη μειώνει.

   - ✓ Στην υποηχητική ροή τόσο η θερμοκρασία όσο και ο Ma αυξάνονται με τη θέρμανση αλλά η T φθάνει σε μια T_{max} για Ma = $(1/k)^{0.5}$ (σημείο –b) και στη συνέχεια μειώνεται.

   - ✓ Μπορεί η θερμοκρασία ενός ρευστού να μειώνεται με την προσθήκη θερμότητας λόγω της μεγάλης αύξησης της ταχύτητας του ρευστού και τη συνακόλουθη πτώση της θερμοκρασίας (διαδρομή b->a)

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow \boxed{T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}}$$

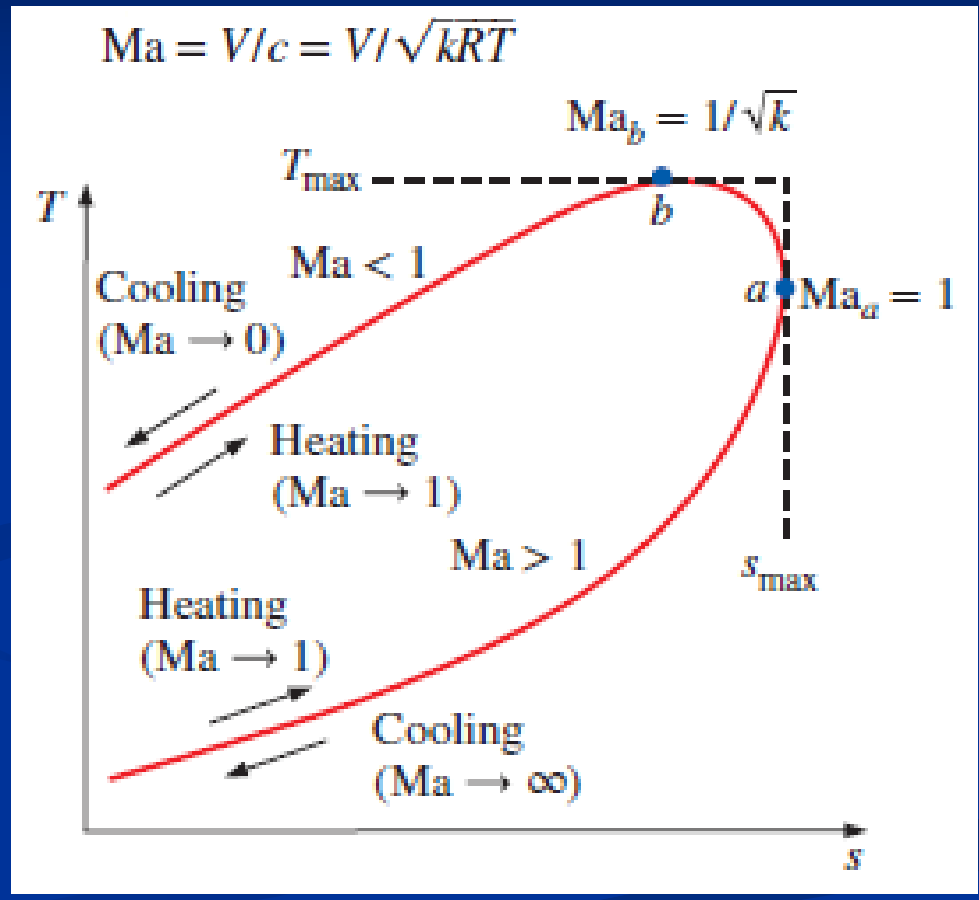


FIGURE 17–54 *T-s* diagram for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction (Rayleigh flow). (Cengel , Bowles, Kanonglou).

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). *(7)*

5. Η εξίσωση της ορμής P+KV = σταθ, με (K=ρV=σταθ.) δείχνει ότι η ταχύτητα και η στατική πίεση παρουσιάζουν αντίθετες τάσεις.

$$P_1A_1 - P_2A_2 = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \longrightarrow P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2)V_2 - (\rho_1 V_1)V_1$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- ✓ Στην υποηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας στο ρευστό η στατική πίεση μειώνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma αυξάνονται) ενώ
- ✓ Στην υπερηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας στο ρευστό η στατική πίεση αυξάνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma μειώνονται).

6. Η εξίσωση συνέχειας (ρV = σταθ.) δείχνει ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Δηλ.

- ✓ Στην υποηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας στο ρευστό, η πυκνότητα μειώνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma αυξάνονται) ενώ
- ✓ Στην υπερηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας η πυκνότητα αυξάνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma μειώνονται).

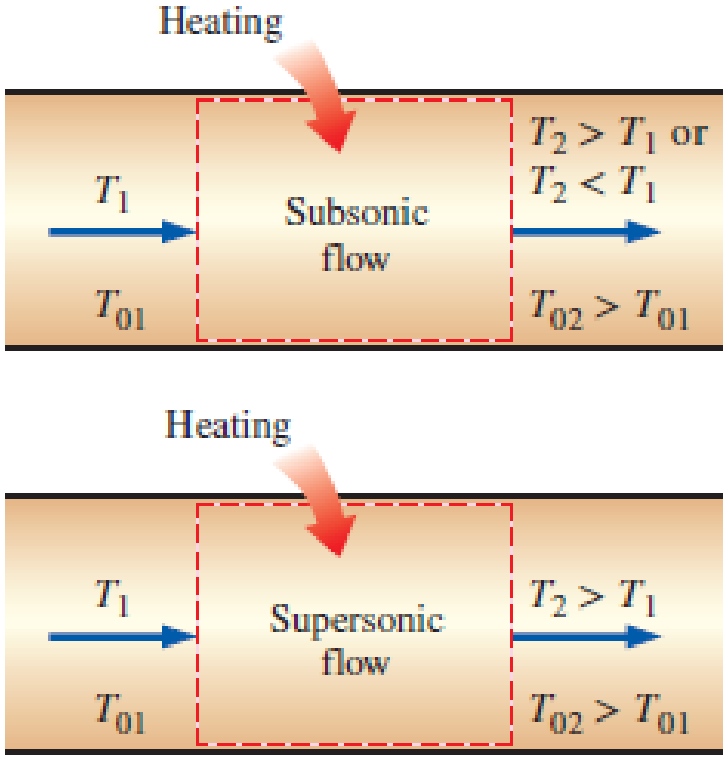


FIGURE 17–55 During heating, fluid temperature always increases if the Rayleigh flow is supersonic, but the temperature may actually drop if the flow is subsonic. (Cengel , Bowles, Kanonglou)

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). *(8)*

5. Η εξίσωση της ορμής P+KV = σταθ, με (K=ρV=σταθ.) δείχνει ότι η ταχύτητα και η στατική πίεση παρουσιάζουν αντίθετες τάσεις.

$$P_1A_1 - P_2A_2 = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \longrightarrow P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2)V_2 - (\rho_1 V_1)V_1$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- ✓ Στην υποηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας στο ρευστό η στατική πίεση μειώνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma αυξάνονται) ενώ
- ✓ Στην υπερηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας στο ρευστό η στατική πίεση αυξάνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma μειώνονται).

6. Η εξίσωση συνέχειας (ρV = σταθ.) δείχνει ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Δηλ.

- ✓ Στην υποηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας στο ρευστό, η πυκνότητα μειώνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma αυξάνονται) ενώ
- ✓ Στην υπερηχητική ροή με την προσθήκη θερμότητας η πυκνότητα αυξάνεται (εφόσον η ταχύτητα και ο Ma μειώνονται).

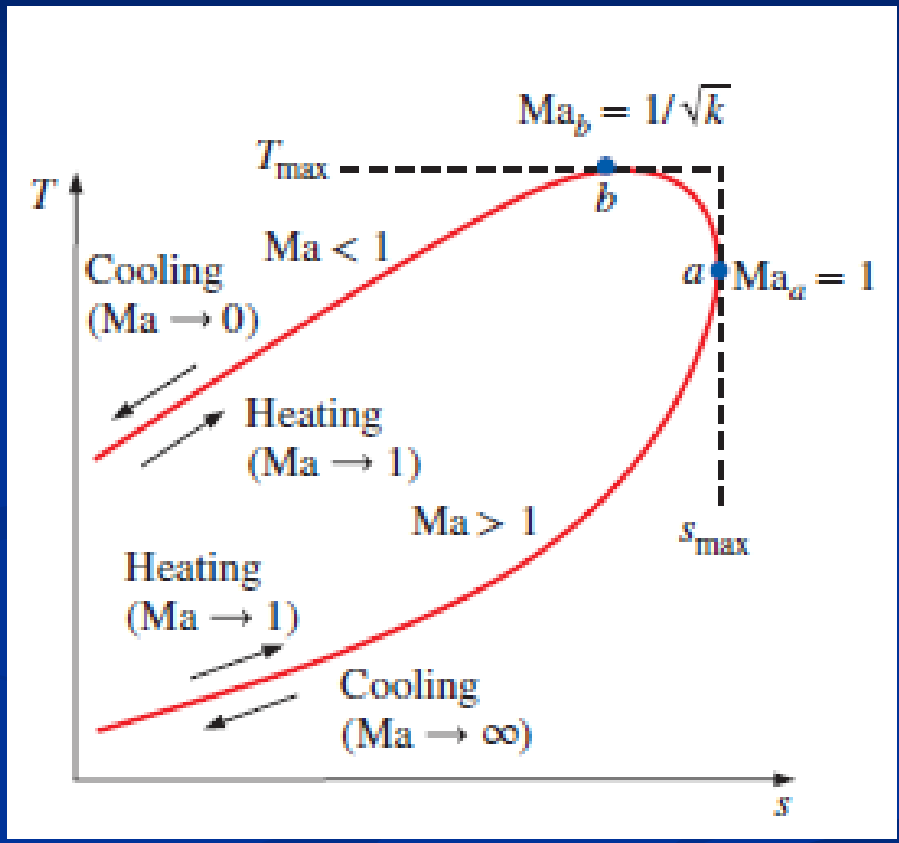


FIGURE 17–54 *T-s* diagram for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction (Rayleigh flow). (Cengel , Bowles, Kanonglou).

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh). (9)

- Οι παρατηρήσεις (1) – (6) προηγούμενα μπορούν να συμπτυχθούν στον ακόλουθο πίνακα σε συνδυασμό και με τις καμπύλες που διέπουν μια ροή Rayleigh (Fig.17-54).

The effects of heating and cooling on the properties of Rayleigh flow

	Heating		*Cooling*	
Property	Subsonic	Supersonic	Subsonic	Supersonic
Velocity, V	Increase	Decrease	Decrease	Increase
Mach number, Ma	Increase	Decrease	Decrease	Increase
Stagnation temperature, T_0	Increase	Increase	Decrease	Decrease
Temperature, T	Increase for Ma < $1/k^{1/2}$ Decrease for Ma > $1/k^{1/2}$	Increase	Decrease for Ma < $1/k^{1/2}$ Increase for Ma > $1/k^{1/2}$	Decrease
Density, ρ	Decrease	Increase	Increase	Decrease
Stagnation pressure, P_0	Decrease	Decrease	Increase	Increase
Pressure, P	Decrease	Increase	Increase	Decrease
Entropy, s	Increase	Increase	Decrease	Decrease

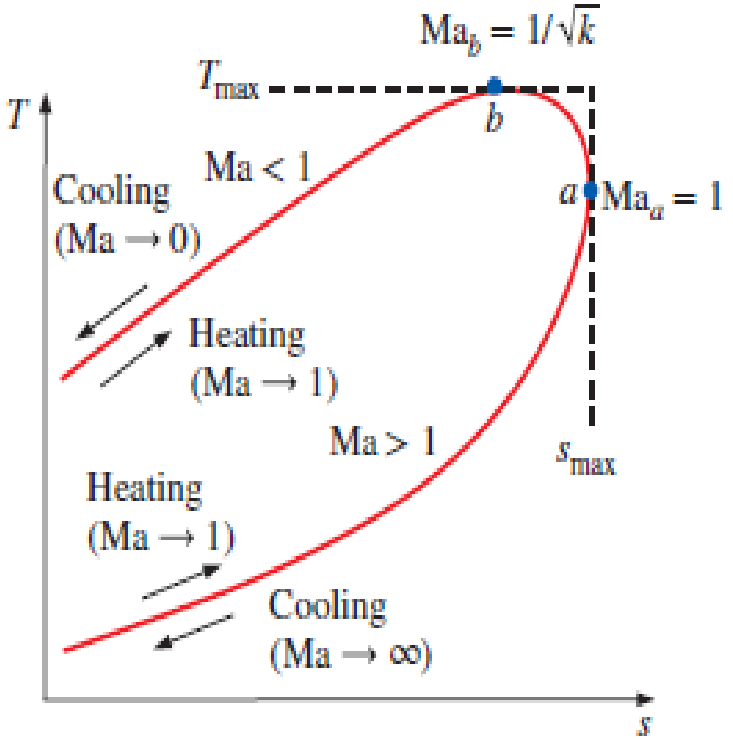
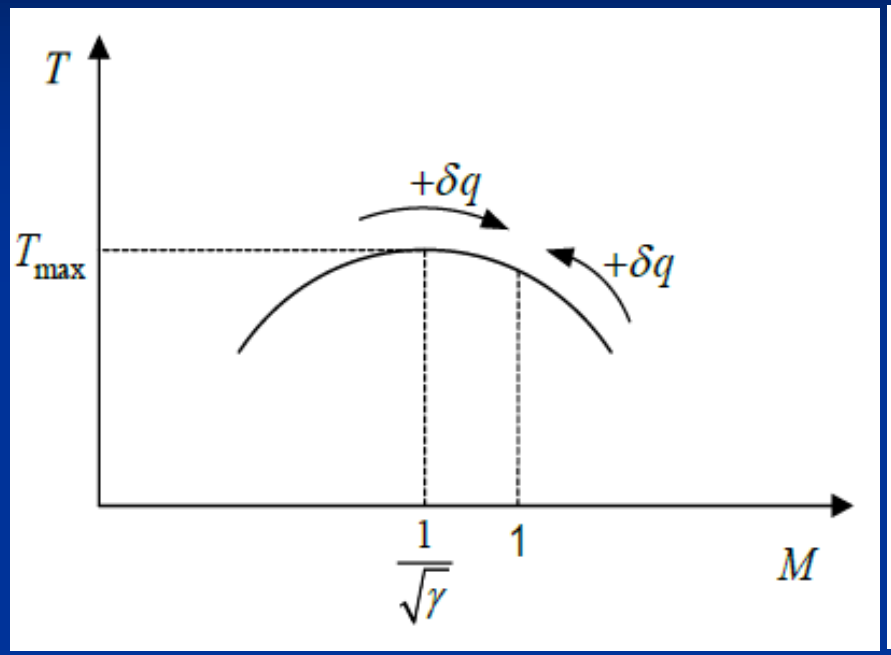


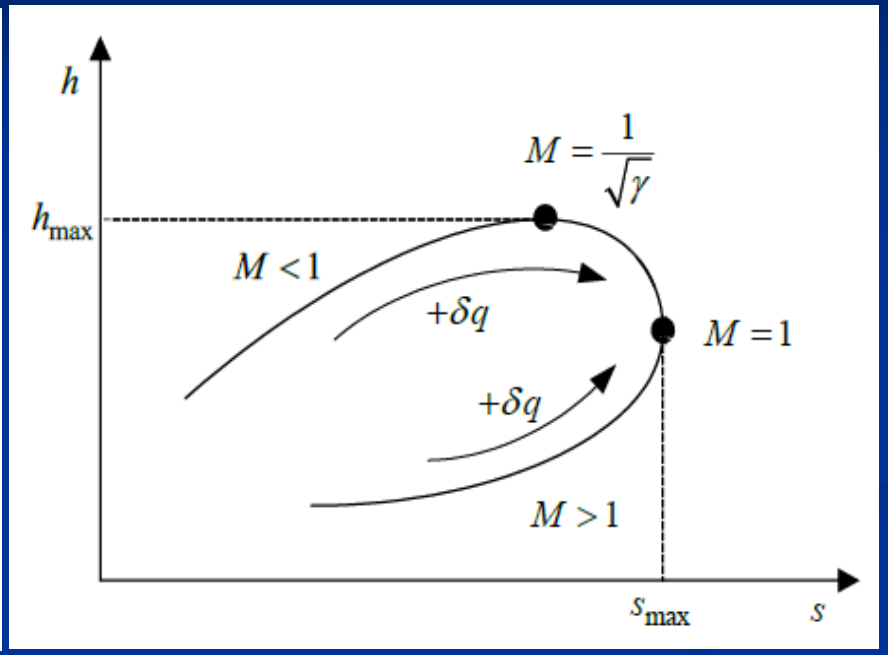
FIGURE 17–54 *T-s* diagram for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction (Rayleigh flow). (Cengel , Bowles, Kanonglou).

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow \boxed{T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}}$$

9.1.1 Διάγραμμα Ενθαλπίας – Εντροπίας σε Ροή Rayleigh (Ι. Καλλιντέρης 2025). *(1)*



Σχήμα 6.18: Μεταβολή της θερμοκρασίας συναρτήσει του αριθμού Mach για θερμαινόμενο αγωγό (Ι. Καλλιντέρης 2025).



Σχήμα 6.20: Διάγραμμα ενθαλπίας-εντροπίας για ροή σε αγωγό με μετάδοση θερμότητας -καμπύλη Rayleigh. (Ι. Καλλιντέρης 2025).

Το ποσό θερμότητας που διαπερνά τα τοιχώματα του αγωγού σταθερής διατομής θα αυξάνει την ολική ενθαλπία της ροής όπως και την εντροπία:

$$dq = dh_0 = C_p\, dT_0 = dh + V\, dV$$

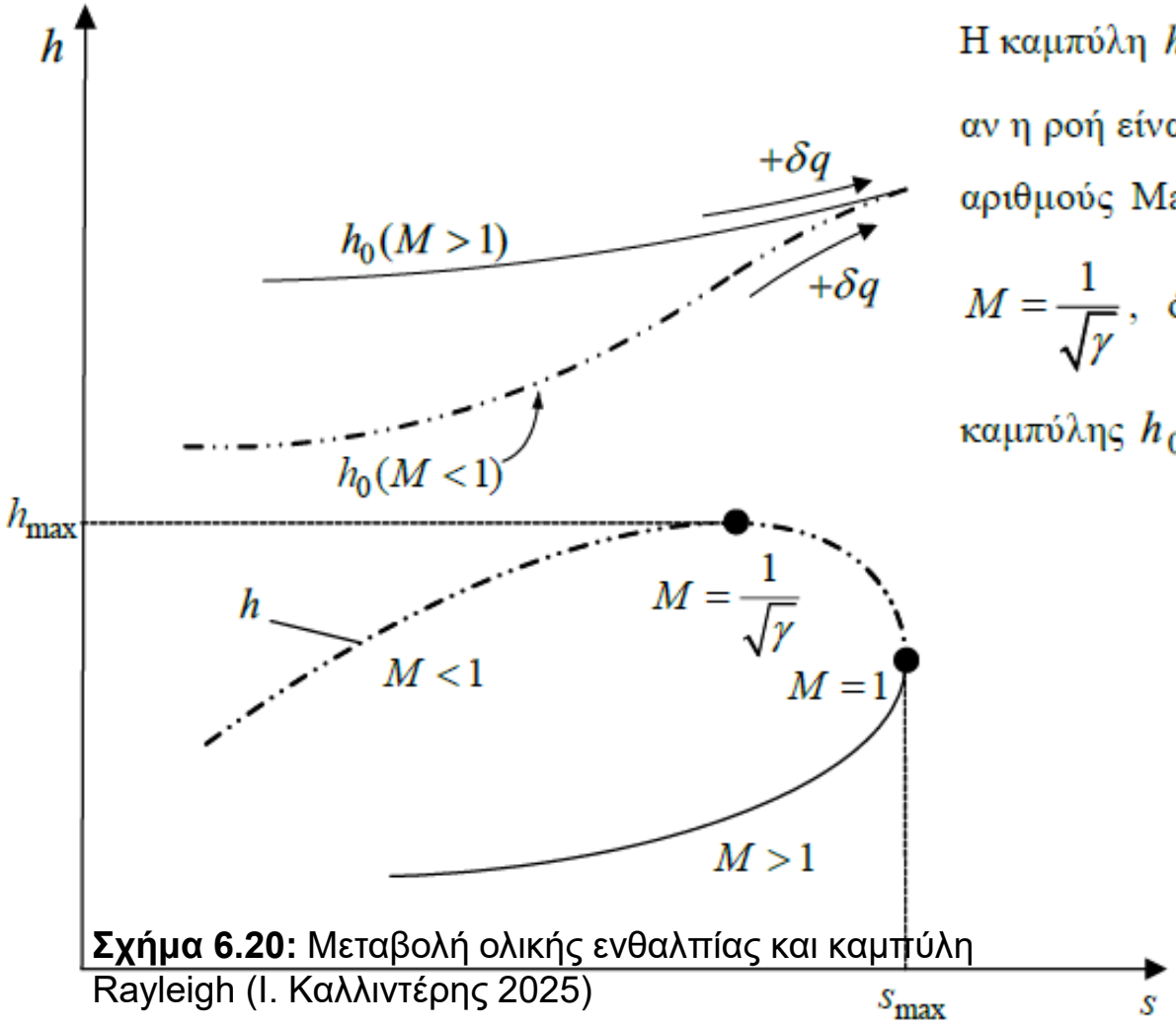
$$ds = \frac{dq}{T} \Rightarrow dq = Tds$$

Η ροή δεν είναι αδιαβατική οπότε η ολική ενθαλπία μεταβάλλεται:

$$\frac{dh_0}{ds} = T$$

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow \boxed{T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}}$$

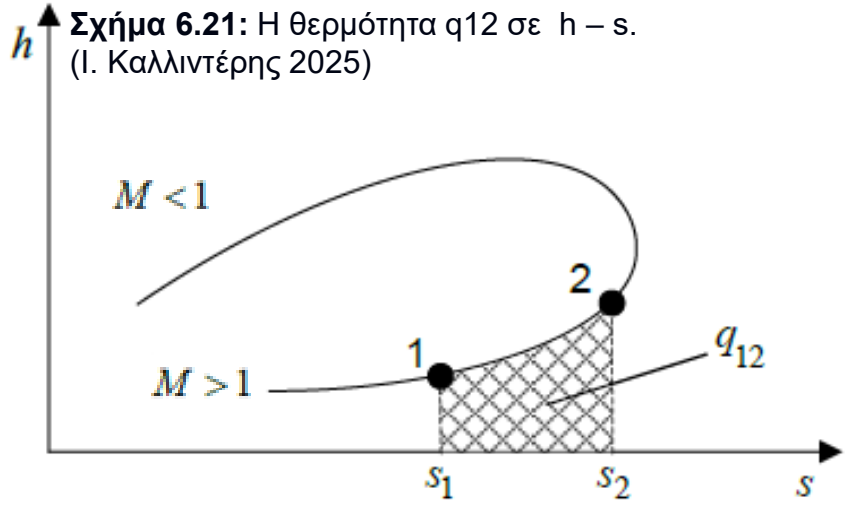
9.1.1 Διάγραμμα Ενθαλπίας – Εντροπίας σε Ροή Rayleigh (Ι. Καλλιντέρης 2025). (2)



Σχήμα 6.20: Μεταβολή ολικής ενθαλπίας και καμπύλη Rayleigh (Ι. Καλλιντέρης 2025)

Η καμπύλη h_0 χωρίζεται σε δυο σκέλη, όπως και η καμπύλη Rayleigh, ανάλογα με το αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική. Έτσι, οι στικτές καμπύλες αντιστοιχούν σε αριθμούς Mach $M<1$, ενώ οι συνεχείς σε $M>1$. Σημειώνουμε επίσης ότι για $M=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, όπου $T=T_{\max}$, είναι και $\frac{dh_0}{ds}=\left(\frac{dh_0}{ds}\right)_{\max}$, δηλαδή η κλίση της καμπύλης h_0 είναι μέγιστη. Για $M=1$, η h_0 έχει τη μέγιστη τιμή της.

9.1.1 Διάγραμμα Ενθαλπίας – Εντροπίας σε Ροή Rayleigh (Ι. Καλλιντέρης 2025). (3)



Σχήμα 6.21: Η θερμότητα q12 σε h – s. (Ι. Καλλιντέρης 2025)



Σχήμα 6.22: Απαιτούμενο ποσό θερμότητας για την ίδια μεταβολή δs σε υποηχητική και υπερηχητική ροή. (Ι. Καλλιντέρης 2025)

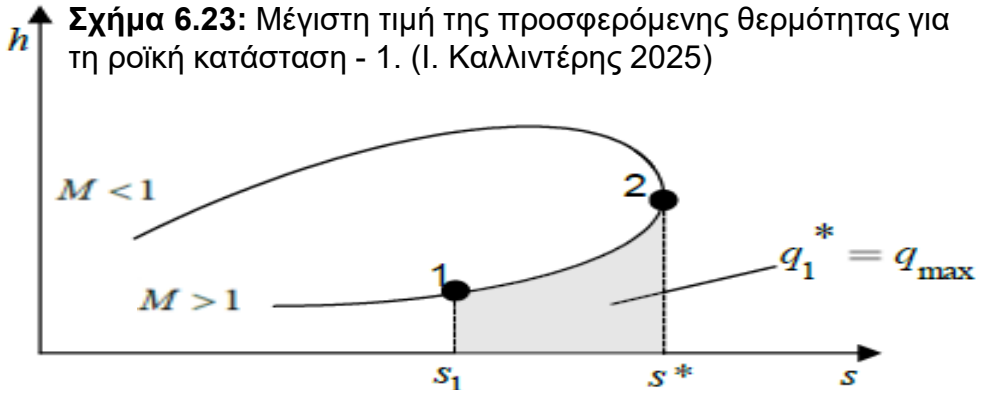
- Το διάγραμμα (h – s) δίνει πληροφορία για τη μεταφορά θερμότητας. Το ποσό θερμότητας q_{12} που προστίθεται ή αφαιρείται από τη ροή μεταξύ δύο σημείων (1) και (2) είναι το εμβαδό υπό την καμπύλη Rayleigh μεταξύ των συγκεκριμένων σημείων (Σχήμα 6.21).

$$dq = T \cdot ds \Rightarrow q_{12} = \int_{s_1}^{s_2} T ds$$

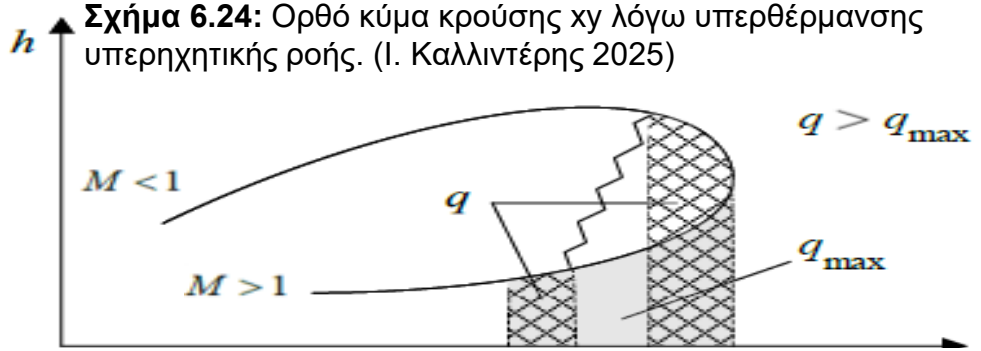
- Για την ίδια μεταβολή της εντροπίας δs μια υποηχητική ροή μπορεί να απορροφήσει πολύ μεγαλύτερο ποσό θερμότητας δq από ότι η αντίστοιχη υπερηχητική μεταξύ των ίδιων σημείων εντροπίας (Σχήμα 6.22). Δηλ. $q_{1'2'} > q_{12}$.

- Η κατάσταση μέγιστης εντροπίας είναι η ηχητική ροή. Άρα θα υπάρχει ένα μέγιστο ποσό θερμότητας που μπορεί να απορροφήσει μια ροή προκειμένου να μεταβεί σε ηχητική. Το ποσό αυτό θερμότητας σημειώνεται ως q_1^*.και θα είναι αυτό που θα αντιστοιχεί σε σημείο (2) για το οποίο θα είναι $s_2 = s_{max} = s^*$ (Σχήμα 6.23).

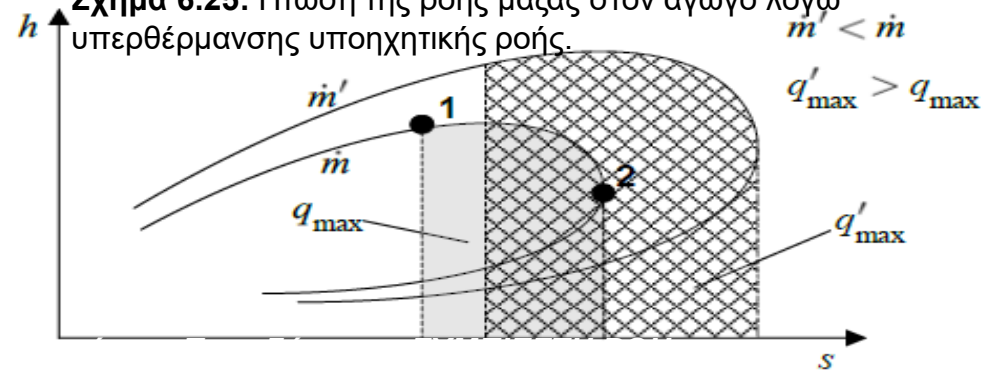
9.1.1 Διάγραμμα Ενθαλπίας – Εντροπίας σε Ροή Rayleigh (Ι. Καλλιντέρης 2025). (4)



Σχήμα 6.23: Μέγιστη τιμή της προσφερόμενης θερμότητας για τη ροϊκή κατάσταση - 1. (Ι. Καλλιντέρης 2025)



Σχήμα 6.24: Ορθό κύμα κρούσης xy λόγω υπερθέρμανσης υπερηχητικής ροής. (Ι. Καλλιντέρης 2025)



Σχήμα 6.25: Πτώση της ροής μάζας στον αγωγό λόγω υπερθέρμανσης υποηχητικής ροής.

- Η κατάσταση μέγιστης εντροπίας είναι η ηχητική ροή (σημείο -2). Άρα θα υπάρχει ένα μέγιστο ποσό θερμότητας που μπορεί να απορροφήσει μια ροή προκειμένου να μεταβεί σε ηχητική. Το ποσό αυτό θερμότητας σημειώνεται ως q_1^*.και θα είναι αυτό που θα αντιστοιχεί σε σημείο (2) για το οποίο θα είναι $s_2 = s_{max} = s^*$ (Σχήμα 6.23).

- Προκύπτει το ερώτημα τι θα συμβεί αν στη ροή προσφερθεί $q > q_{max}$.
- Διακρίνονται 2 περιπτώσεις:

- <u>Περίπτωση Υπερηχητικής ροής:</u> Σχηματίζεται κρουστικό κύμα που μεταβάλλει τη ροή σε υποηχητική ώστε να μπορεί να απορροφά μεγαλύτερα ποσά θερμότητας. Η διαφορά ($q - q_{max}$) θα καθορίζει τη θέση του κύματος κρούσης αλλά η ροή στην έξοδο του αγωγού (σημείο 2) θα είναι ηχητική και η παροχή (m-dot) της ροής θα είναι σταθερή (Σχήμα 6.24).

- <u>Περίπτωση Υποηχητικής ροής:</u> Κατά την υπερθέρμανση υποηχητικής ροής προκύπτει μείωση της παροχής μάζας m-dot οπότε και η ροή μεταβαίνει σε μια άλλη καμπύλη Rayleigh έτσι ώστε όμως η ροή στην έξοδο του αγωγού (σημείο 2) να είναι ηχητική.

9.2 Παράδειγμα 17.13 (CBK) /12.12 (CC) – Ακρότατα Γραμμής Rayleigh. (1)

- Από το διάγραμμα T – s και χρησιμοποιώντας τις διαφορικές μορφές των εξισώσεων διατήρησης να γίνει μελέτη συνάρτησης για το μέγεθος της εντροπίας.
- Υποθέσεις Ροής Rayleigh: Θεωρείται μόνιμη, μονοδιάστατη ροή ιδανικού αερίου με σταθερές ιδιότητες σε αγωγό σταθερής διατομής με αμελητέα φαινόμενα τριβής.

$$\rho V = \text{constant} \longrightarrow \rho\, dV + V\, d\rho = 0 \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (1)$$

$$P + (\rho V)V = \text{constant} \longrightarrow dP + (\rho V)dV = 0 \longrightarrow \frac{dP}{dV} = -\rho V \quad (2)$$

$$P = \rho RT \longrightarrow dP = \rho R\, dT + RT\, d\rho \longrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (3)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P} \quad (4)$$

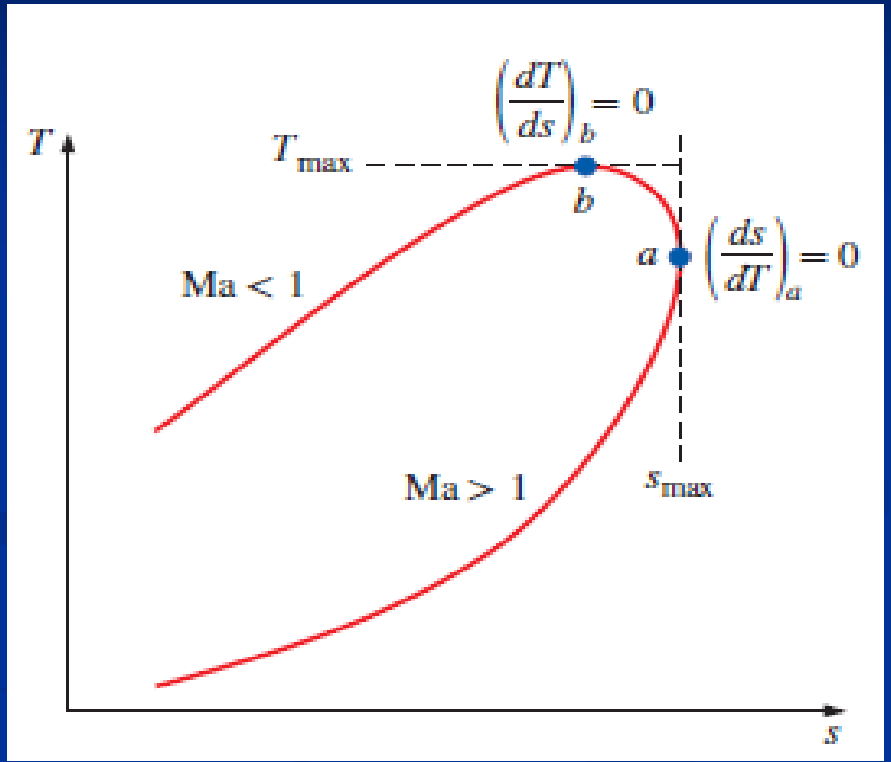


FIGURE 17–56 The *T-s* diagram of Rayleigh flow considered in Example 17–13. (Cengel , Bowles, Kanonglou)

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R \ln\frac{P_2}{P_1}$$

9.2 Παράδειγμα 17.13 (CBK) /12.12 (CC) – Ακρότατα Γραμμής Rayleigh. (2)

- Από το διάγραμμα T – s και χρησιμοποιώντας τις διαφορικές μορφές των εξισώσεων διατήρησης να γίνει μελέτη συνάρτησης. για το μέγεθος της εντροπίας.

Substituting Eq. 3 into Eq. 4 gives

$$ds = c_p\frac{dT}{T} - R\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}\right) = (c_p - R)\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{k-1}\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} \quad (5)$$

Dividing both sides of Eq. 5 by dT and combining with Eq. 1,

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (1)$$

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{V}\frac{dV}{dT} \quad (6)$$

Dividing Eq. 3 by dV and combining it with Eqs. 1 and 2 give, after rearranging,

$$\frac{dT}{dV} = \frac{T}{V} - \frac{V}{R} \quad (7)$$

Substituting Eq. 7 into Eq. 6 and rearranging,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{T - V^2/R} = \frac{R(kRT - V^2)}{T(k-1)(RT - V^2)} \quad (8)$$

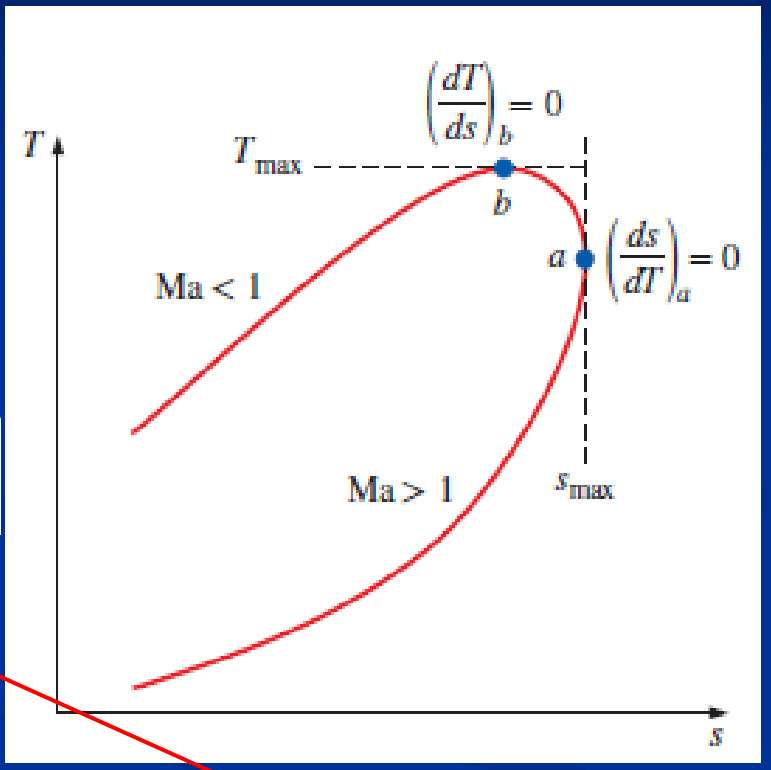


FIGURE 17–56 The *T*-*s* diagram of Rayleigh flow considered in Example 17–13 (Cengel , Bowles, Kanonglou)

$$c_p - R = c_V \rightarrow kc_V - R = c_V \rightarrow c_V = R/(k-1)$$

9.2 Παράδειγμα 17.13 (CBK) /12.12 (CC) – Ακρότατα Γραμμής Rayleigh. (3)

- Από το διάγραμμα T – s και χρησιμοποιώντας τις διαφορικές μορφές των εξισώσεων διατήρησης να γίνει μελέτη συνάρτησης για το μέγεθος της εντροπίας.

Setting $ds/dT = 0$ and solving the resulting equation $R(kRT - V^2) = 0$ for V give the velocity at point a to be

$$V_a = \sqrt{kRT_a} \quad \text{and} \quad \text{Ma}_a = \frac{V_a}{c_a} = \frac{\sqrt{kRT_a}}{\sqrt{kRT_a}} = 1 \tag{9}$$

Therefore, sonic conditions exist at point a, and thus the Mach number is 1.

Setting $dT/ds = (ds/dT)^{-1} = 0$ and solving the resulting equation $T(k - 1) \times (RT - V^2) = 0$ for velocity at point b give

$$V_b = \sqrt{RT_b} \quad \text{and} \quad \text{Ma}_b = \frac{V_b}{c_b} = \frac{\sqrt{RT_b}}{\sqrt{kRT_b}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{10}$$

Therefore, the Mach number at point b is $\text{Ma}_b = 1\sqrt{k}$. For air, $k = 1.4$ and thus $\text{Ma}_b = 0.845$.

Discussion Note that in Rayleigh flow, sonic conditions are reached as the entropy reaches its maximum value, and maximum temperature occurs during subsonic flow.

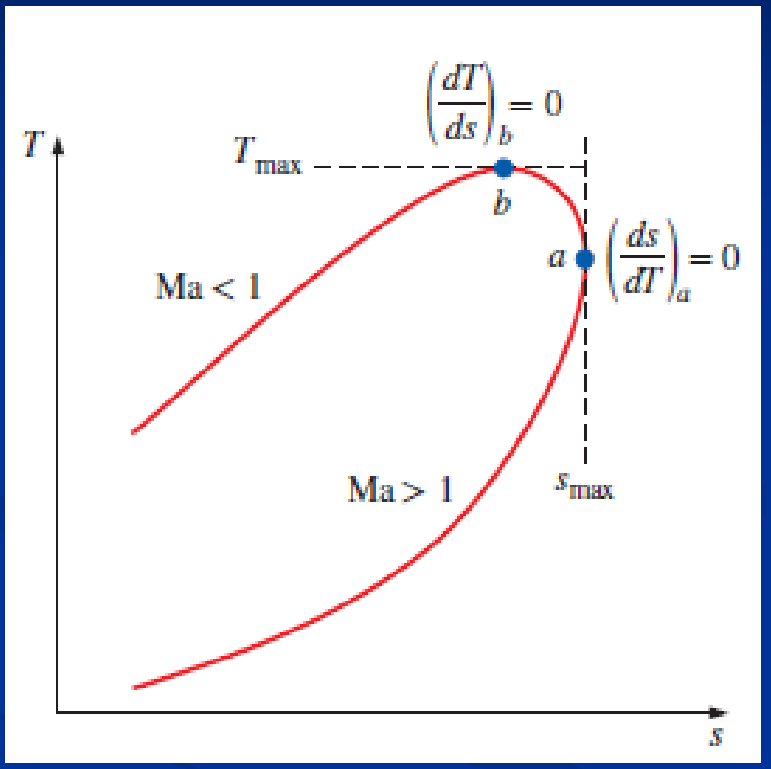


FIGURE 17–56 The *T-s* diagram of Rayleigh flow considered in Example 17–13.
(Cengel , Bowles, Kanonglou)

9.3 Παράδειγμα 17.14 /12.13– Επίδραση της Μεταφοράς Θερμότητας στην Ταχύτητα της Ροής. (1)

- Ξεκινώντας από τη διαφορική μορφή της εξίσωσης ενέργειας να εξετάσετε τη μεταβολή της ταχύτητας της ροής ως προς τη θερμότητα που μπορεί να προσφέρεται ή να αφαιρείται.

$$\delta q = dh_0 = d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = c_p\,dT + V\,dV \tag{1}$$

Dividing by c_pT and factoring out dV/V give

$$\frac{\delta q}{c_pT} = \frac{dT}{T} + \frac{V\,dV}{c_pT} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V}{dV}\frac{dT}{T} + \frac{(k-1)V^2}{kRT}\right) \tag{2}$$

where we also used $c_p = kR/(k-1)$. Noting that $\mathrm{Ma}^2 = V^2/c^2 = V^2/kRT$ and using Eq. 7 for dT/dV from Example 17–13 give

$$\frac{\delta q}{c_pT} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V}{T}\left(\frac{T}{V} - \frac{V}{R}\right) + (k-1)\mathrm{Ma}^2\right) = \frac{dV}{V}\left(1 - \frac{V^2}{TR} + k\mathrm{Ma}^2 - \mathrm{Ma}^2\right) \tag{3}$$

Canceling the two middle terms in Eq. 3 since $V^2/TR = k\ \mathrm{Ma}^2$ and rearranging give the desired relation,

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_pT}\frac{1}{(1-\mathrm{Ma}^2)} \tag{4}$$

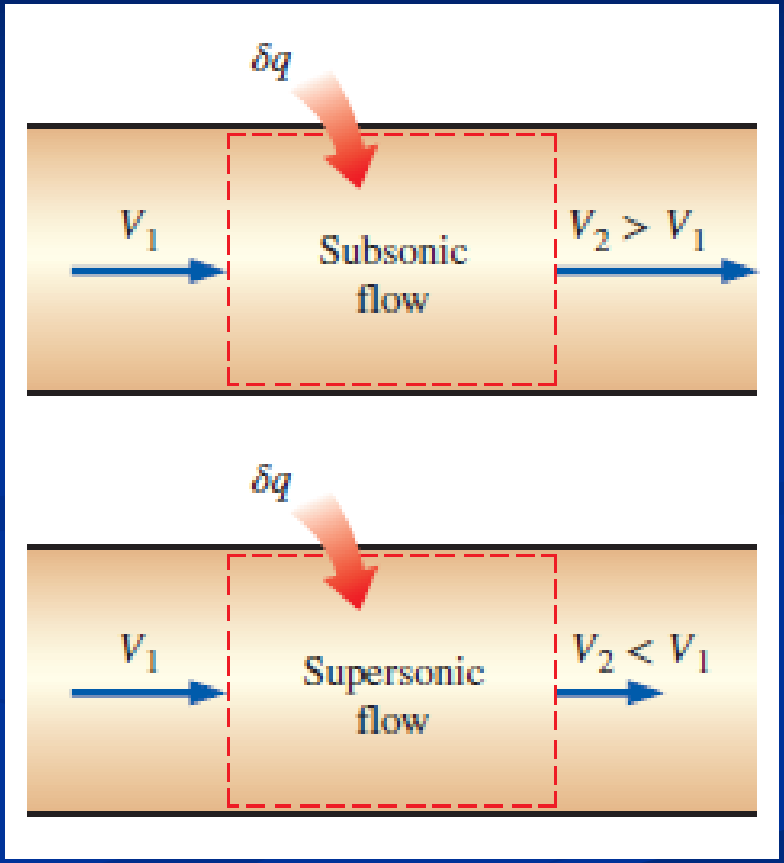


FIGURE 17–57 Heating increases the flow Velocity in subsonic flow but decreases it in supersonic flow.
(Cengel , Bowles, Kanonglou)

9.3 Παράδειγμα 17.14 /12.13– Επίδραση της Μεταφοράς Θερμότητας στην Ταχύτητα της Ροής. (2)

- Ξεκινώντας από τη διαφορική μορφή της εξίσωσης ενέργειας να εξετάσετε τη μεταβολή της ταχύτητας της ροής ως προς τη θερμότητα που μπορεί να προσφέρεται ή να αφαιρείται.

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T(1 - \mathrm{Ma}^2)}$$

- **Θέρμανση της Ροής – Προσθήκη θερμότητας (δq > 0) :**
  - ✓ Για υποηχητική ροή (1- $Ma^2 > 0$) προκύπτει αύξηση της ταχύτητας της ροής.
  - ✓ Για υπερηχητική ροή (1- $Ma^2 < 0$) προκύπτει μείωση της ταχύτητας της ροής.

- **Ψύξη της Ροής – Αφαίρεση θερμότητας (δq < 0) :**
  - ✓ Για υποηχητική ροή (1- $Ma^2 > 0$) προκύπτει μείωση της ταχύτητας της ροής.
  - ✓ Για υπερηχητική ροή (1- $Ma^2 < 0$) προκύπτει αύξηση της ταχύτητας της ροής.

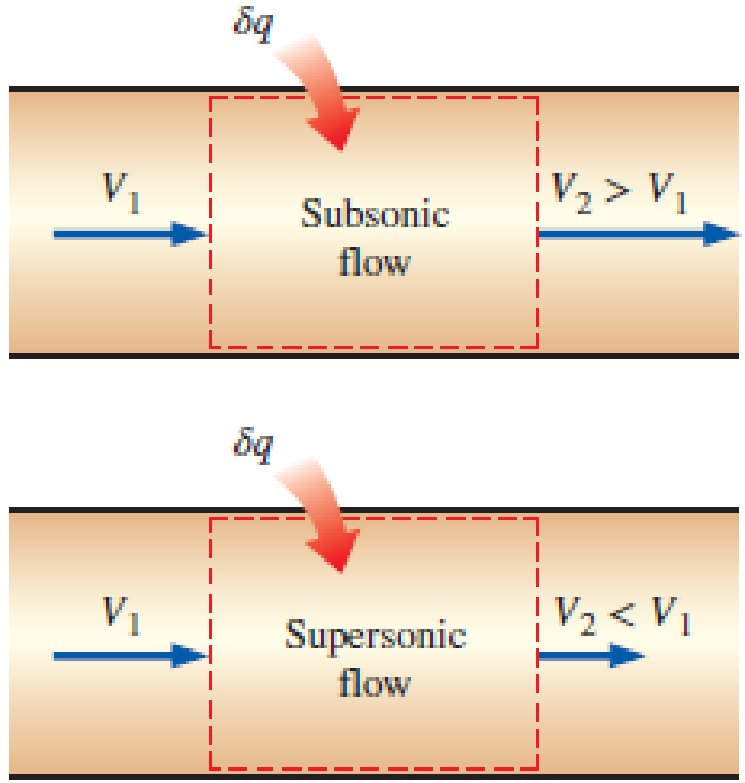


FIGURE 17–57 Heating increases the flow Velocity in subsonic flow but decreases it in supersonic flow.
(Cengel , Bowles, Kanonglou)

9.4 Σχέσεις Ιδιοτήτων της ροής Rayleigh (CBK). *(1)*

- Ζητούνται εκφράσεις των μεταβολών των ροϊκών ιδιοτήτων ως συνάρτηση του Ma (εύκολα...)

Property Relations for Rayleigh Flow

It is often desirable to express the variations in properties in terms of the Mach number Ma. Noting that $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$ and thus $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$,

$$\rho V^2 = \rho kRT\,\text{Ma}^2 = kP\,\text{Ma}^2 \qquad \textbf{(17–57)}$$

since $P = \rho RT$. Substituting into the momentum equation (Eq. 17–51) gives $P_1 + kP_1\text{Ma}_1^2 = P_2 + kP_2\text{Ma}_2^2$, which can be rearranged as

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \qquad \textbf{(17–58)}$$

Again utilizing $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$, the continuity equation $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ is expressed as

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{Ma}_2\sqrt{kRT_2}}{\text{Ma}_1\sqrt{kRT_1}} = \frac{\text{Ma}_2\sqrt{T_2}}{\text{Ma}_1\sqrt{T_1}} \qquad \textbf{(17–59)}$$

Then the ideal-gas relation (Eq. 17–56) becomes

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2\rho_1}{P_1\rho_2} = \left(\frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2}\right)\left(\frac{\text{Ma}_2\sqrt{T_2}}{\text{Ma}_1\sqrt{T_1}}\right) \qquad \textbf{(17–60)}$$

Solving Eq. 17–60 for the temperature ratio T_2/T_1 gives

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{\text{Ma}_2(1 + k\text{Ma}_1^2)}{\text{Ma}_1(1 + k\text{Ma}_2^2)}\right]^2 \qquad \textbf{(17–61)}$$

Substituting this relation into Eq. 17–59 gives the density or velocity ratio as

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Ma}_1^2(1 + k\text{Ma}_2^2)}{\text{Ma}_2^2(1 + k\text{Ma}_1^2)} \qquad \textbf{(17–62)}$$

Flow properties at sonic conditions are usually easy to determine, and thus the critical state corresponding to Ma = 1 serves as a convenient reference point in compressible flow. Taking state 2 to be the sonic state ($\text{Ma}_2 = 1$, and superscript * is used) and state 1 to be any state (no subscript), the property relations in Eqs. 17–58, 17–61, and 17–62 reduce to (Fig. 17–58)

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k}{1 + k\text{Ma}^2} \qquad \frac{T}{T^*} = \left(\frac{\text{Ma}(1 + k)}{1 + k\text{Ma}^2}\right)^2 \qquad \frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1 + k)\,\text{Ma}^2}{1 + k\text{Ma}^2} \qquad \textbf{(17–63)}$$

9.5 Σχέσεις Ιδιοτήτων Ανακοπής της ροής Rayleigh. (1)

- Ζητούνται εκφράσεις των ιδιοτήτων ανακοπής ως συνάρτηση του Ma.

Similar relations can be obtained for dimensionless stagnation temperature and stagnation pressure as follows:

$$\frac{T_0}{T_0^*}=\frac{T_0}{T}\frac{T}{T^*}\frac{T^*}{T_0^*}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)\left[\frac{\mathrm{Ma}(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right]^2\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{-1} \quad (17\text{–}64)$$

which simplifies to

$$\frac{T_0}{T_0^*}=\frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}^2]}{(1+k\mathrm{Ma}^2)^2} \quad (17\text{–}65)$$

Also,

$$\frac{P_0}{P_0^*}=\frac{P_0}{P}\frac{P}{P^*}\frac{P^*}{P_0^*}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{k/(k-1)}\left(\frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{-k/(k-1)} \quad (17\text{–}66)$$

which simplifies to

$$\frac{P_0}{P_0^*}=\frac{k+1}{1+k\mathrm{Ma}^2}\left[\frac{2+(k-1)\mathrm{Ma}^2}{k+1}\right]^{k/(k-1)} \quad (17\text{–}67)$$

The five relations in Eqs. 17–63, 17–65, and 17–67 enable us to calculate the dimensionless pressure, temperature, density, velocity, stagnation temperature, and stagnation pressure for Rayleigh flow of an ideal gas with a specified k for any given Mach number. Representative results are given in tabular and graphical form in Table A–34 for $k = 1.4$.

TABLE A–34

Rayleigh flow functions for an ideal gas with $k = 1.4$

Ma	T_0/T_0^*	P_0/P_0^*	T/T^*	P/P^*	V/V^*
0.0	0.0000	1.2679	0.0000	2.4000	0.0000
0.1	0				0.0237
0.2	0				0.0909
0.3	0				0.1918
0.4	0				0.3137
0.5	0				0.4444
0.6	0				0.5745
0.7	0				0.6975
0.8	0				0.8101
0.9	0				0.9110
1.0	1				1.0000
1.2	0				1.1459
1.4	0				1.2564
1.6	0				1.3403
1.8	0				1.4046
2.0	0				1.4545
2.2	0				1.4938
2.4	0				1.5252
2.6	0				1.5505
2.8	0				1.5711
3.0	0.6540	3.4245	0.2803	0.1765	1.5882

$$\frac{T_0}{T_0^*}=\frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}^2]}{(1+k\mathrm{Ma}^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*}=\frac{k+1}{1+k\mathrm{Ma}^2}\left[\frac{2+(k-1)\mathrm{Ma}^2}{k+1}\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*}=\left[\frac{\mathrm{Ma}(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right]^2$$

$$\frac{P}{P^*}=\frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*}=\frac{\rho^*}{\rho}=\frac{(1+k)\mathrm{Ma}^2}{1+k\mathrm{Ma}^2}$$

9.6 Σχέσεις Ιδιοτήτων της ροής Rayleigh μεταξύ 2 θέσεων του αγωγού. (1)

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}/P_2}{P_{01}/P_1}\cdot\frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}\cdot\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}$$

$$s_2 - s_1 = C_P \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{M_2}{M_1}\cdot\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right]^2$$

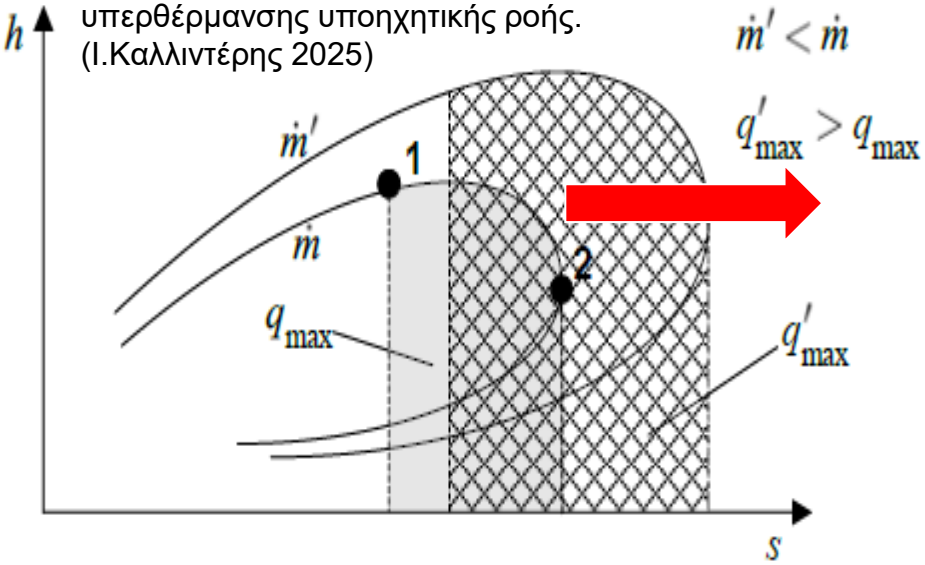
$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\left[\frac{M_2}{M_1}\cdot\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right]^2$$

9.7.1 Στραγγαλισμένη Ροή Rayleigh (Choked flow)– Υποηχητική. (1)

- Από τη μέχρι εδώ συζήτηση προκύπτει ότι μια **υποηχητική ροή Rayleigh** $(1 - Ma^2 > 0)$ μπορεί να επιταχυνθεί στην ηχητική ταχύτητα (Ma = 1) με θέρμανση.

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T} \frac{1}{(1 - \mathrm{Ma}^2)}$$

- Τι θα συμβαίνει όμως όταν συνεχίζουμε να θερμαίνουμε το ρευστό?
- Θα συνεχίζει το ρευστό να επιταχύνεται σε υπερηχητικές ταχύτητες?
- Παρατηρώντας τη γραμμή Rayleigh φαίνεται ότι το ρευστό στην κρίσιμη κατάσταση (Ma = 1) δεν μπορεί να επιταχυνθεί σε υπερηχητικές ταχύτητες με θέρμανση.
- Επομένως η ροή είναι στραγγαλισμένη, κατά αντιστοιχία με την κατάσταση αδυναμίας επιτάχυνσης του ρευστού σε υπερηχητικές ταχύτητες σε συγκλίνον ακροφύσιο με επέκταση του συγκλίνοντος τμήματος.
- Με επιπλέον θέρμανση του ρευστού, η κρίσιμη κατάσταση μετακινείται κατάντη ενώ εφόσον η πυκνότητα του ρευστού στην κρίσιμη κατάσταση θα είναι μικρότερη , ο ρυθμός ροής θα μειωθεί.



Σχήμα 6.25: Μείωση της ροής μάζας στον αγωγό λόγω υπερθέρμανσης υποηχητικής ροής. (Ι.Καλλιντέρης 2025)

- Η εξ. Συνέχειας εξακολουθεί να ισχύει πάντα (ΑΔΜ) αλλά η πληροφορία θα ταξιδέψει στην είσοδο – αρχική κατάσταση και θα υποδείξει μείωση της παροχής από την είσοδο. (Αντίστοιχη περίπτωση με την επέκταση συγκλίνοντος ακροφυσίου).

9.7.1 Στραγγαλισμένη Ροή Rayleigh (Choked flow)– Υποηχητική. (2)

- Άρα για γνωστή κατάσταση εισόδου, η αντίστοιχη κρίσιμη κατάσταση προσδιορίζει τη μέγιστη δυνατή μεταφορά θερμότητας. Δηλ.

$$q_{\max} = h_0^* - h_{01} = c_p(T_0^* - T_{01})$$

- Προσθέτοντας περισσότερη θερμότητα η ροή φθάνει σε στραγγαλισμό μεταβάλλοντας έτσι την κατάσταση εισόδου (μείωση της πυκνότητας) και η ροή δεν ακολουθεί πλέον την ίδια γραμμή Rayleigh.

- Ψύξη της υποηχητικής ροής Rayleigh ($\delta q < 0$, $1 - Ma^2 > 0$) οδηγεί σε μείωση της ταχύτητας της ροής και καθώς η θερμοκρασία πλησιάζει το απόλυτο μηδέν, $Ma \to 0$.

- Η T_0 (θερμοκρασία ανακοπής) είναι μέγιστη στην κρίσιμη κατάσταση ($Ma = 1$).

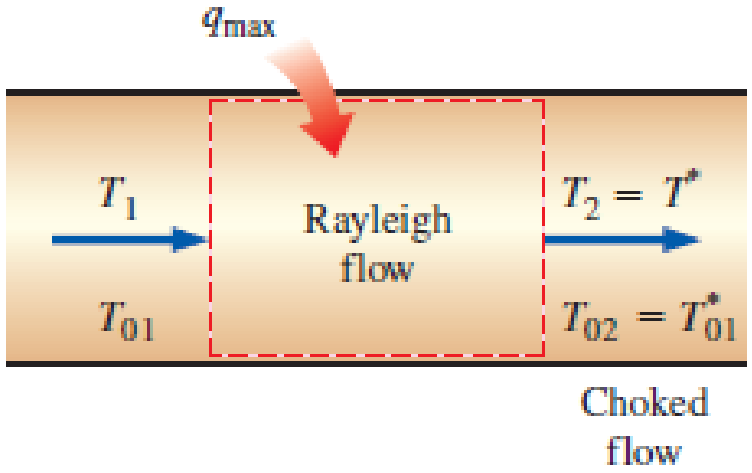


FIGURE 17–59 For a given inlet state, the maximum possible heat transfer occurs when sonic conditions are reached at the exit state. (Cengel , Bowles, Kanonglou)

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T(1 - \mathrm{Ma}^2)}$$

9.7.2 Στραγγαλισμένη Ροή Rayleigh (Choked flow)- Υπερηχητική. (1)

- Στην **υπερηχητική ροή Rayleigh** (1- $Ma^2 < 0$) η θέρμανση ($\delta q > 0$) οδηγεί σε μείωση της ταχύτητας της ροής. Επιπλέον θέρμανση μειώνει τη θερμοκρασία και μετακινεί το σημείο κρίσιμης κατάστασης κατάντη, οδηγώντας σε μείωση της παροχής μάζας του ρευστού (Προσοχή στην παρανόηση!!! Οι CC αρκετά πιο χαμηλά γράφουν ότι αυτά συμβαίνουν μετά την εμφάνιση του ΚΚΚ..)..

- Μια υπερηχητική ροή Rayleigh δεν μπορεί να ψυχθεί απεριόριστα, αλλά υπάρχει όριο. Για k = 1.4 T_0/T^*_0 =0.49

- Δηλ. αν T_0 = 1000 K, η ροή Rayleigh του αέρα δεν μπορεί να ψυχθεί κάτω από 490 K. Τέλος αν η υπερηχητική ροή δεν μπορεί να συντηρηθεί ένα κάθετο κρουστικό κύμα μετατρέπει τη ροή σε υποηχητική.

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T} \frac{1}{(1 - \mathrm{Ma}^2)}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2[2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2]}{(1 + k\mathrm{Ma}^2)^2} \qquad (17\text{–}65)$$

$$\lim_{\mathrm{Ma}\to\infty} \frac{T_0}{T_0^*} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

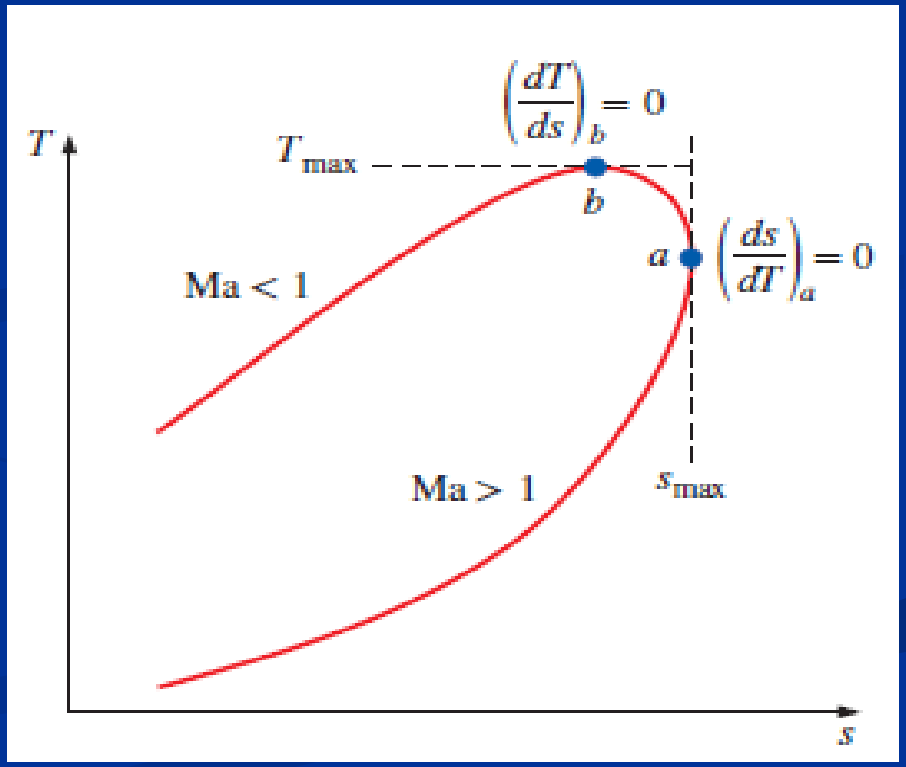


FIGURE 17–56 The *T-s* diagram of Rayleigh flow considered in Example 17–13. (Cengel , Bowles, Kanonglou)

9.8 Παράδειγμα 17.15CBK / 12.14CC Ροή Rayleigh σε σωληνοειδή καυστήρα. (1)

- Θάλαμος καύσης αποτελείται από σωληνοειδείς καυστήρες διαμέτρων 15cm. Συμπιεσμένος αέρας εισέρχεται στους σωλήνες σε **550K, 480kPa με 80m/s**. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 42,000 kJ/kg ψεκάζεται στο ρεύμα αέρα και καίγεται με ένα **AFR = 40**.
- Θεωρώντας την καύση ως μια διαδικασία μεταφοράς θερμότητας σε ρεύμα αέρα, να προσδιοριστούν στην έξοδο του θαλάμου τα μεγέθη **T, P, V, Ma**.

Assumptions **1** The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid. **2** Combustion is complete, and it is treated as a heat addition process, with no change in the chemical composition of the flow. **3** The increase in mass flow rate due to fuel injection is disregarded.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

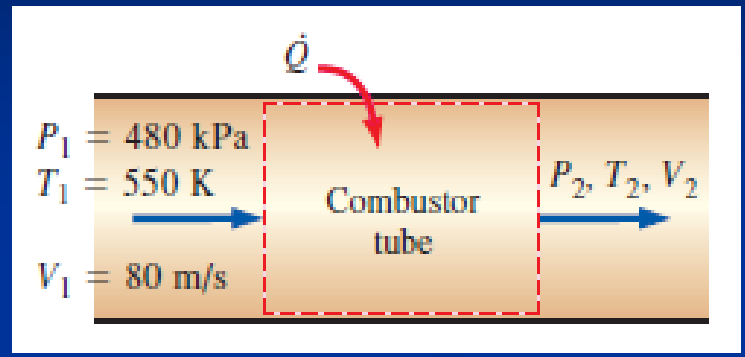


FIGURE 17–60 Schematic of the combustor tube analyzed in Ex. 17–15 (Cengel , Bowles, Kanonglou)

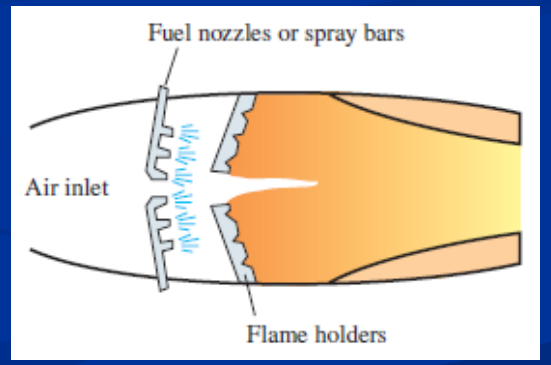


FIGURE 17–52 Many practical compressible flow problems involve combustion, which may be modeled as heat gain through the duct wall.
(Cengel , Bowles, Kanonglou).

9.8 Παράδειγμα 17.15CBK / 12.14CC Ροή Rayleigh σε σωληνοειδή καυστήρα. *(2)*

- Θάλαμος καύσης αποτελείται από σωληνοειδείς καυστήρες διαμέτρων 15cm. Συμπιεσμένος αέρας εισέρχεται στους σωλήνες σε **550K, 480kPa με 80m/s**. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 42,000 kJ/kg ψεκάζεται στο ρεύμα αέρα και καίγεται με ένα **AFR = 40**.
- Θεωρώντας την καύση ως μια διαδικασία μεταφοράς θερμότητας σε ρεύμα αέρα, να προσδιοριστούν στην έξοδο του θαλάμου τα μεγέθη **T, P, V, Ma**.

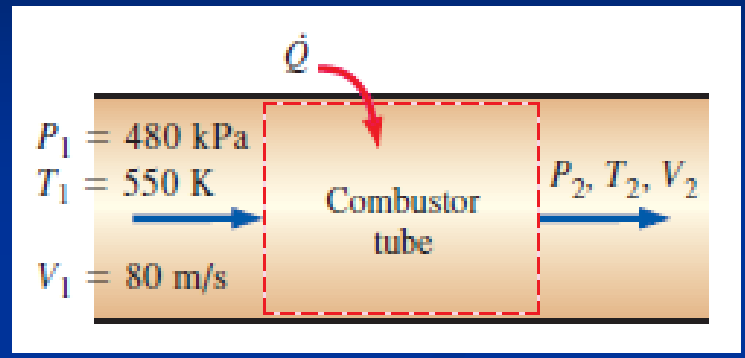


FIGURE 17–60 Schematic of the combustor tube analyzed in Ex. 17–15 (Cengel , Bowles, Kanonglou)

Analysis The inlet density and mass flow rate of air are

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{480\ \text{kPa}}{(0.287\ \text{kJ/kg·K})(550\ \text{K})} = 3.041\ \text{kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{\text{air}} = \rho_1 A_1 V_1 = (3.041\ \text{kg/m}^3)[\pi(0.15\ \text{m})^2/4](80\ \text{m/s}) = 4.299\ \text{kg/s}$$

The mass flow rate of fuel and the rate of heat transfer are

$$\dot{m}_{\text{fuel}} = \frac{\dot{m}_{\text{air}}}{\text{AF}} = \frac{4.299\ \text{kg/s}}{40} = 0.1075\ \text{kg/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{fuel}}\text{HV} = (0.1075\ \text{kg/s})(42{,}000\ \text{kJ/kg}) = 4514\ \text{kW}$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{\text{air}}} = \frac{4514\ \text{kJ/s}}{4.299\ \text{kg/s}} = 1050\ \text{kJ/kg}$$

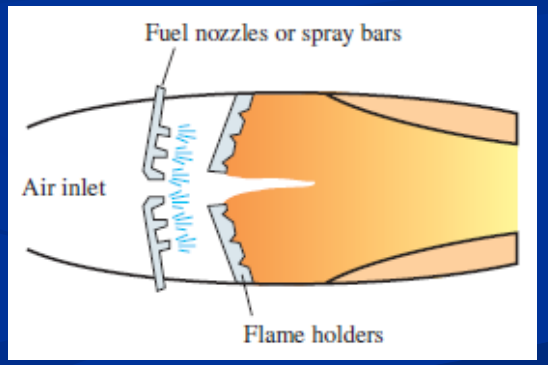


FIGURE 17–52 Many practical compressible flow problems involve combustion, which may be modeled as heat gain through the duct wall.
(Cengel , Bowles, Kanonglou).

9.8 Παράδειγμα 17.15CBK / 12.14CC Ροή Rayleigh σε σωληνοειδή καυστήρα. (3)

- Θάλαμος καύσης αποτελείται από σωληνοειδείς καυστήρες διαμέτρων 15cm. Συμπιεσμένος αέρας εισέρχεται στους σωλήνες σε **550K, 480kPa με 80m/s**. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 42,000 kJ/kg ψεκάζεται στο ρεύμα αέρα και καίγεται με ένα **AFR = 40**.
- Θεωρώντας την καύση ως μια διαδικασία μεταφοράς θερμότητας σε ρεύμα αέρα, να προσδιοριστούν στην έξοδο του θαλάμου τα μεγέθη **T, P, V, Ma**.

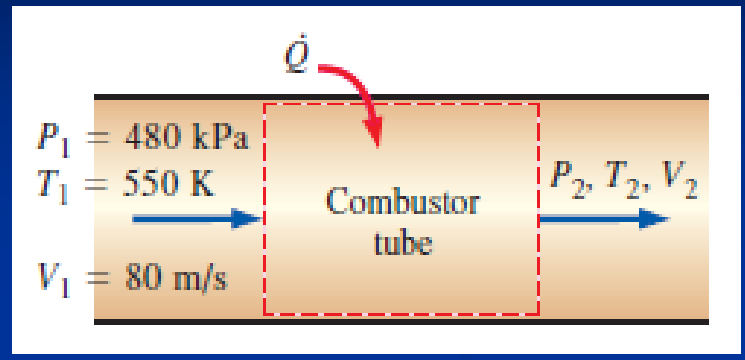


FIGURE 17–60 Schematic of the combustor tube analyzed in Ex. 17–15 (Cengel , Bowles, Kanonglou)

The stagnation temperature and Mach number at the inlet are

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 550\ \text{K} + \frac{(80\ \text{m/s})^2}{2(1.005\ \text{kJ/kg·K})}\left(\frac{1\ \text{kJ/kg}}{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}\right) = 553.2\ \text{K}$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\ \text{kJ/kg·K})(550\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 470.1\ \text{m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{80\ \text{m/s}}{470.1\ \text{m/s}} = 0.1702$$

9.8 Παράδειγμα 17.15CBK / 12.14CC Ροή Rayleigh σε σωληνοειδή καυστήρα. *(4)*

- Θάλαμος καύσης αποτελείται από σωληνοειδείς καυστήρες διαμέτρων 15cm. Συμπιεσμένος αέρας εισέρχεται στους σωλήνες σε **550K, 480kPa με 80m/s**. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 42,000 kJ/kg ψεκάζεται στο ρεύμα αέρα και καίγεται με ένα **AFR = 40**.
- Θεωρώντας την καύση ως μια διαδικασία μεταφοράς θερμότητας σε ρεύμα αέρα, να προσδιοριστούν στην έξοδο του θαλάμου τα μεγέθη **T, P, V, Ma**.

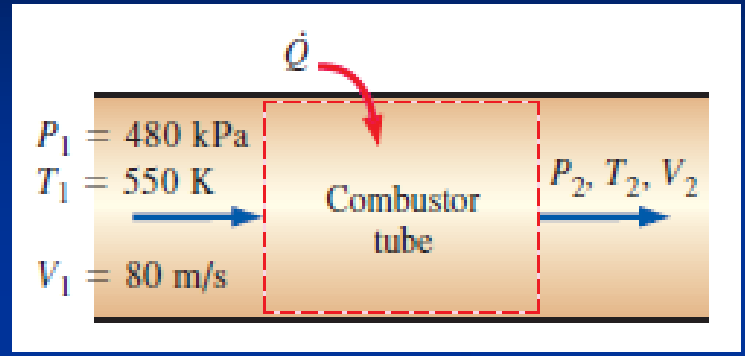


FIGURE 17–60 Schematic of the combustor tube analyzed in Ex. 17–15 (Cengel , Bowles, Kanonglou)

The exit stagnation temperature is, from the energy equation $q = c_p(T_{02} - T_{01})$,

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 553.2\ \text{K} + \frac{1050\ \text{kJ/kg}}{1.005\ \text{kJ/kg·K}} = 1598\ \text{K}$$

The maximum value of stagnation temperature T_0^* occurs at Ma = 1, and its value can be determined from Table A–34 or from Eq. 17–65. At $\text{Ma}_1 = 0.1702$ we read $T_0/T_0^* = 0.1291$. Therefore,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.1291} = \frac{553.2\ \text{K}}{0.1291} = 4284\ \text{K}$$

The stagnation temperature ratio at the exit state and the Mach number corresponding to it are, from Table A–34,

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1598\ \text{K}}{4284\ \text{K}} = 0.3730 \longrightarrow \text{Ma}_2 = 0.3142 \cong \mathbf{0.314}$$

9.8 Παράδειγμα 17.15CBK / 12.14CC Ροή Rayleigh σε σωληνοειδή καυστήρα. (5)

- Θάλαμος καύσης αποτελείται από σωληνοειδείς καυστήρες διαμέτρων 15cm. Συμπιεσμένος αέρας εισέρχεται στους σωλήνες σε **550K, 480kPa με 80m/s**. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 42,000 kJ/kg ψεκάζεται στο ρεύμα αέρα και καίγεται με ένα **AFR = 40**.
- Θεωρώντας την καύση ως μια διαδικασία μεταφοράς θερμότητας σε ρεύμα αέρα, να προσδιοριστούν στην έξοδο του θαλάμου τα μεγέθη **T, P, V, Ma**.
- Οι συναρτήσεις – ιδιότητες της ροής Rayleigh λαμβάνονται από τον **Πίνακα Α-34** (CBK)

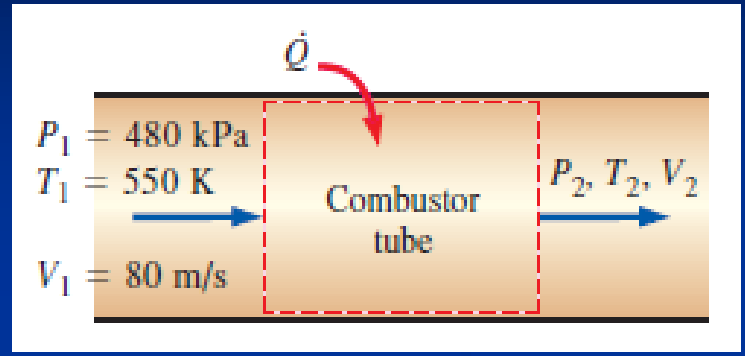


FIGURE 17–60 Schematic of the combustor tube analyzed in Ex. 17–15 (Cengel , Bowles, Kanonglou)

$$\text{Ma}_1 = 0.1702: \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.1541 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2.3065 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0.0668$$

$$\text{Ma}_2 = 0.3142: \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.4389 \quad \frac{P_2}{P^*} = 2.1086 \quad \frac{V_2}{V^*} = 0.2082$$

- Το πρόβλημα μπορεί επίσης να λυθεί με επίλυση των σχέσεων ιδιοτήτων πέρα από την ανάγνωση στον ΠίνΑ-34 όπου βρίσκονται οι σχέσεις πινακοποιημένες.

Then the exit temperature, pressure, and velocity are determined to be

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.4389}{0.1541} = 2.848 \longrightarrow T_2 = 2.848\,T_1 = 2.848(550\text{ K}) = \mathbf{1566\text{ K}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P^*}{P_1/P^*} = \frac{2.1086}{2.3065} = 0.9142 \longrightarrow P_2 = 0.9142\,P_1 = 0.9142(480\text{ kPa}) = \mathbf{439\text{ kPa}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{0.2082}{0.0668} = 3.117 \longrightarrow V_2 = 3.117\,V_1 = 3.117(80\text{ m/s}) = \mathbf{249\text{ m/s}}$$

9.9 Πίνακας Ιδιοτήρων Ροής Rayleigh.

(1)

TABLE A–34

Rayleigh flow functions for an ideal gas with $k = 1.4$

Ma	T_0/T_0^*	P_0/P_0^*	T/T^*	P/P^*	V/V^*
0.0	0.0000	1.2679	0.0000	2.4000	0.0000
0.1	0.0468	1.2591	0.0560	2.3669	0.0237
0.2	0.1736	1.2346	0.2066	2.2727	0.0909
0.3	0.3469	1.1985	0.4089	2.1314	0.1918
0.4	0.5290	1.1566	0.6151	1.9608	0.3137
0.5	0.6914	1.1141	0.7901	1.7778	0.4444
0.6	0.8189	1.0753	0.9167	1.5957	0.5745
0.7	0.9085	1.0431	0.9929	1.4235	0.6975
0.8	0.9639	1.0193	1.0255	1.2658	0.8101
0.9	0.9921	1.0049	1.0245	1.1246	0.9110
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.2	0.9787	1.0194	0.9118	0.7958	1.1459
1.4	0.9343	1.0777	0.8054	0.6410	1.2564
1.6	0.8842	1.1756	0.7017	0.5236	1.3403
1.8	0.8363	1.3159	0.6089	0.4335	1.4046
2.0	0.7934	1.5031	0.5289	0.3636	1.4545
2.2	0.7561	1.7434	0.4611	0.3086	1.4938
2.4	0.7242	2.0451	0.4038	0.2648	1.5252
2.6	0.6970	2.4177	0.3556	0.2294	1.5505
2.8	0.6738	2.8731	0.3149	0.2004	1.5711
3.0	0.6540	3.4245	0.2803	0.1765	1.5882

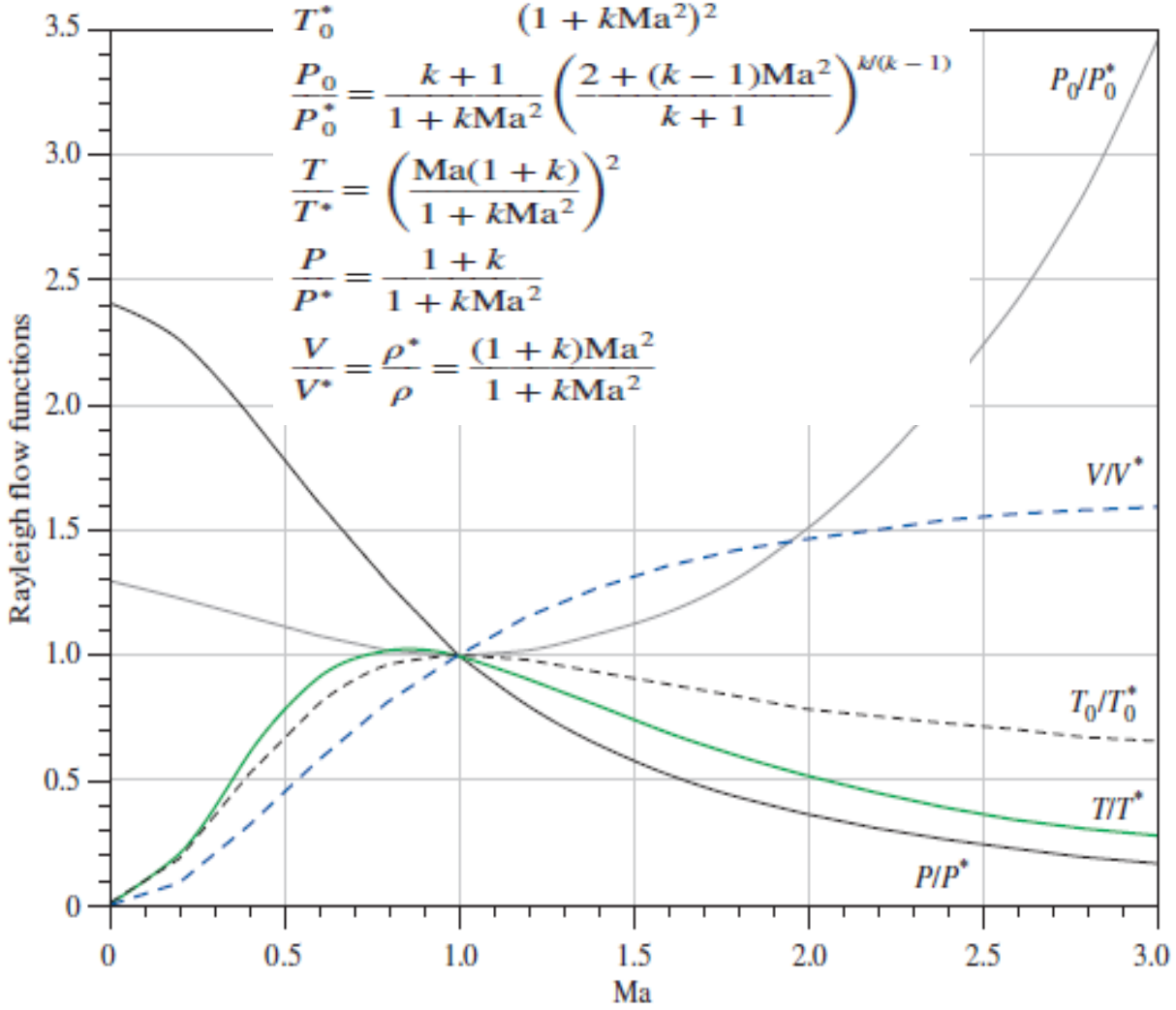
$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}^2]}{(1+k\mathrm{Ma}^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+k\mathrm{Ma}^2}\left(\frac{2+(k-1)\mathrm{Ma}^2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{\mathrm{Ma}(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right)^2$$

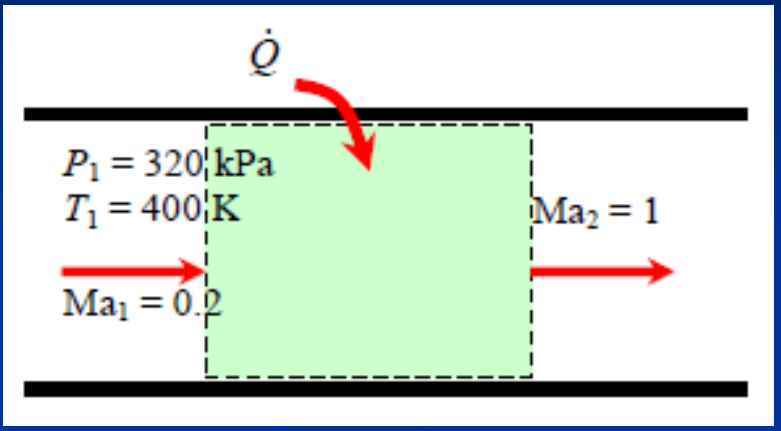
$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+k)\mathrm{Ma}^2}{1+k\mathrm{Ma}^2}$$



9.10 Άσκηση 17.99 CBK / 17.104s/ 12.81 CC/ 12.86s. *(1)*

- Αργό εισέρχεται σε αγωγό σταθερής διατομής με $Ma_1 = 0.2$, $P_1 = 320$ kPa, $T_1 = 400$ K και ρυθμό 1.2 kg/s. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής, να προσδιοριστεί ο υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας χωρίς να επέλθει μείωση της παροχής μάζας.



Assumptions 1 The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid. 2 Mass flow rate remains constant.

Properties We take the properties of argon to be $k = 1.667$, $c_p = 0.5203$ kJ/kg·K, and $R = 0.2081$ kJ/kg·K.

Analysis Heat transfer stops when the flow is choked, and thus $Ma_2 = V_2/c_2 = 1$. The inlet stagnation temperature is

$$T_{01} = T_1\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right) = (400\,\text{K})\left(1+\frac{1.667-1}{2}0.2^2\right) = 405.3\,\text{K}$$

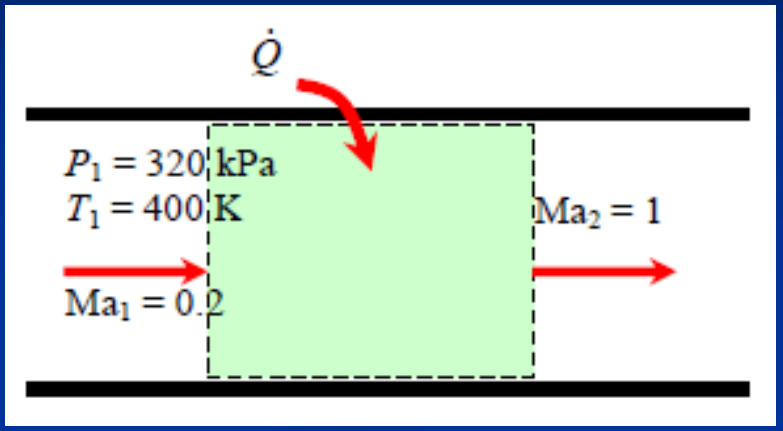
The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are

$$T_{02}/T_0^* = 1 \text{ (since } Ma_2 = 1)$$

$$\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{(k+1)Ma_1^2[2+(k-1)Ma_1^2]}{(1+kMa_1^2)^2} = \frac{(1.667+1)0.2^2[2+(1.667-1)0.2^2]}{(1+1.667\times0.2^2)^2} = 0.1900$$

9.10 Άσκηση 17.99 CBK / 17.104s/ 12.81 CC/ 12.86s. *(2)*

- Αργό εισέρχεται σε αγωγό σταθερής διατομής με $Ma_1 = 0.2$, $P_1 = 320$ kPa, $T_1 = 400$ K και ρυθμό 1.2 kg/s. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής, να προσδιοριστεί ο υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας χωρίς να επέλθει μείωση της παροχής μάζας.



$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}/T_0^*}{T_{01}/T_0^*} = \frac{1}{0.1900} \quad \rightarrow \quad T_{02} = T_{01}/0.1900 = (405.3\ \text{K})/0.1900 = 2133\ \text{K}$$

Then the rate of heat transfer becomes

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{air}} c_p (T_{02} - T_{01}) = (1.2\ \text{kg/s})(0.5203\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K})(2133 - 400)\ \text{K} = \mathbf{1080\ kW}$$

Discussion It can also be shown that $T_2 = 1600$ K, which is the highest thermodynamic temperature that can be attained under stated conditions. If more heat is transferred, the additional temperature rise will cause the mass flow rate to decrease. Also, in the solution of this problem, we cannot use the values of Table A-34 since they are based on $k = 1.4$.

9.10 Άσκηση 17.99 CBK / 17.104s/ 12.81 CC/ 12.86s. (3)

TABLE A–2

Ideal-gas specific heats of various common gases

(*a*) At 300 K

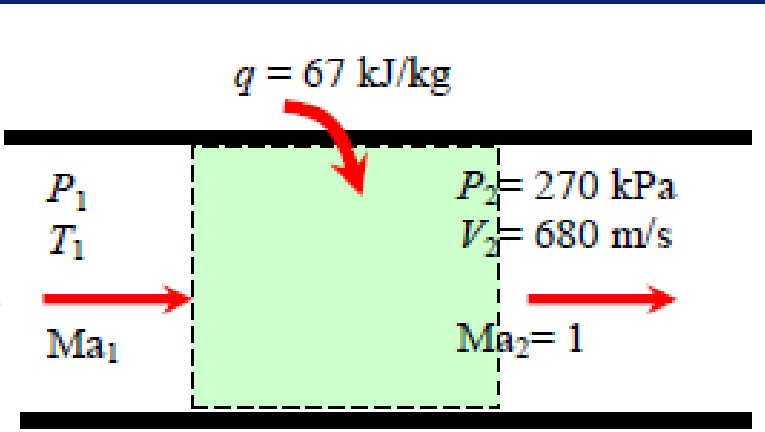
Gas	Formula	Gas constant, R kJ/kg·K	c_p kJ/kg·K	c_v kJ/kg·K	k
Air	—	0.2870	1.005	0.718	1.400
Argon	Ar	0.2081	0.5203	0.3122	1.667
Butane	C_4H_{10}	0.1433	1.7164	1.5734	1.091
Carbon dioxide	CO_2	0.1889	0.846	0.657	1.289
Carbon monoxide	CO	0.2968	1.040	0.744	1.400
Ethane	C_2H_6	0.2765	1.7662	1.4897	1.186
Ethylene	C_2H_4	0.2964	1.5482	1.2518	1.237
Helium	He	2.0769	5.1926	3.1156	1.667
Hydrogen	H_2	4.1240	14.307	10.183	1.405
Methane	CH_4	0.5182	2.2537	1.7354	1.299
Neon	Ne	0.4119	1.0299	0.6179	1.667
Nitrogen	N_2	0.2968	1.039	0.743	1.400
Octane	C_8H_{18}	0.0729	1.7113	1.6385	1.044
Oxygen	O_2	0.2598	0.918	0.658	1.395
Propane	C_3H_8	0.1885	1.6794	1.4909	1.126
Steam	H_2O	0.4615	1.8723	1.4108	1.327

Note: The unit kJ/kg·K is equivalent to kJ/kg·°C.

Source of Data: B. G. Kyle, *Chemical and Process Thermodynamics, 3rd ed.* (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000).

9.11 Άσκηση 17.100 CBK / 17.105s/ 12.82 CC/ 12.87s. (1)

- Αέρας θερμαίνεται καθώς διαπερνά αγωγό με υποηχητική ταχύτητα. Όταν το ποσό θερμότητας φθάσει στην τιμή 67 kJ/kg, η ροή στραγγαλίζεται και η ταχύτητα και η στατική πίεση μετρώνται ίσες με 680 m/s και 270 kPa αντίστοιχα. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστούν V, P, T στην είσοδο του αγωγού.



Assumptions The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

Analysis Noting that sonic conditions exist at the exit, the exit temperature is

$$c_2 = V_2/\mathrm{Ma}_2 = (680\ \mathrm{m/s})/1 = 680\ \mathrm{m/s}$$

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} \rightarrow \sqrt{(1.4)(0.287\ \mathrm{kJ/kg\cdot K})T_2\left(\frac{1000\ \mathrm{m^2/s^2}}{1\ \mathrm{kJ/kg}}\right)} = 680\ \mathrm{m/s}$$

It gives

$$T_2 = 1151\ \mathrm{K}.$$

Then the exit stagnation temperature becomes

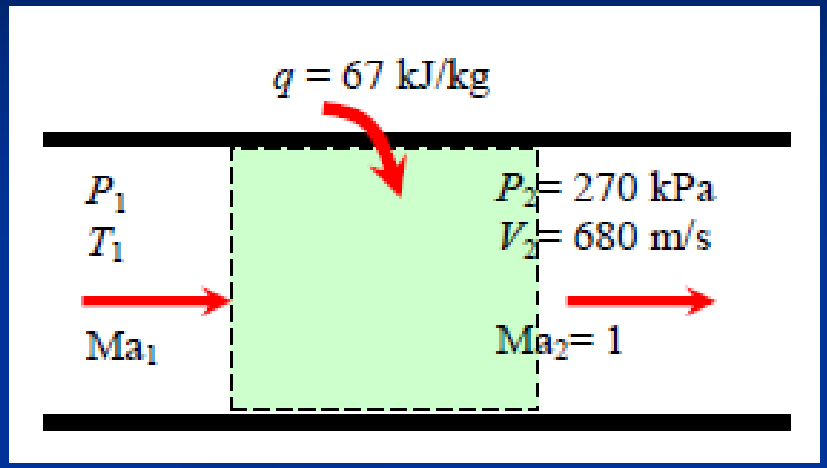
$$T_{02} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} = 1151\ \mathrm{K} + \frac{(680\ \mathrm{m/s})^2}{2\times 1.005\ \mathrm{kJ/kg\cdot K}}\left(\frac{1\ \mathrm{kJ/kg}}{1000\ \mathrm{m^2/s^2}}\right) = 1381\ \mathrm{K}$$

The inlet stagnation temperature is, from the energy equation $q = c_p(T_{02} - T_{01})$

$$T_{01} = T_{02} - \frac{q}{c_p} = 1381\ \mathrm{K} - \frac{67\ \mathrm{kJ/kg}}{1.005\ \mathrm{kJ/kg\cdot K}} = 1314\ \mathrm{K}$$

9.11 Άσκηση 17.100 CBK / 17.105s/ 12.82 CC/ 12.87s. *(2)*

- Αέρας θερμαίνεται καθώς διαπερνά αγωγό με υποηχητική ταχύτητα. Όταν το ποσό θερμότητας φθάσει στην τιμή 67 kJ/kg, η ροή στραγγαλίζεται και η ταχύτητα και η στατική πίεση μετρώνται ίσες με 680 m/s και 270 kPa αντίστοιχα. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστούν V, P, T στην είσοδο του αγωγού.
- Η υψηλότερη τιμή θερμοκρασίας ανακοπής T_0^* θα συμβαίνει για **$Ma_2 = 1$** και στην περίπτωση αυτή θα είναι T_{02} αφού η ροή είναι στραγγαλισμένη. Επομένως θα είναι: **$T_0^* = T_{02} = 1381$ K**.
- Τότε το πηλίκο θερμοκρασίας ανακοπής στην είσοδο και ο αντίστοιχος Ma θα προκύπτουν από τον Πιν.Α-34



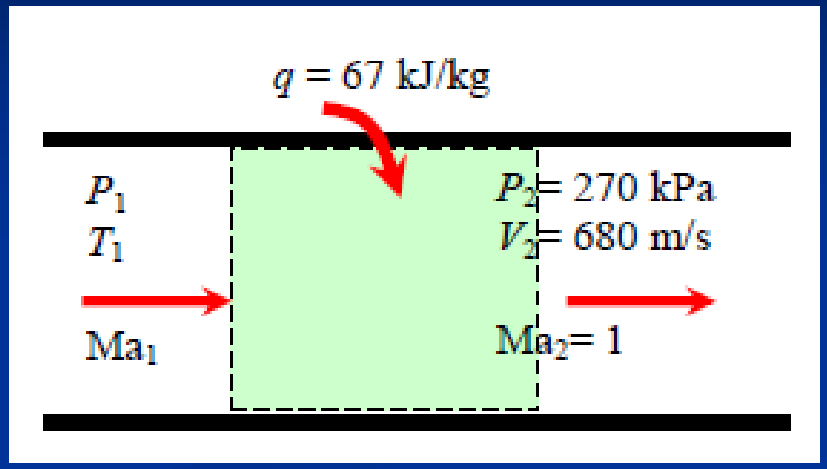
$$\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{1314\,\text{K}}{1381\,\text{K}} = 0.9516 \quad \rightarrow \quad \text{Ma}_1 = 0.7779 \cong \mathbf{0.778}$$

The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are (Table A-34):

$\text{Ma}_1 = 0.7779$:	$T_1/T^* = 1.018$,	$P_1/P^* = 1.301$,	$V_1/V^* = 0.7852$
$\text{Ma}_2 = 1$:	$T_2/T^* = 1$,	$P_2/P^* = 1$,	$V_2/V^* = 1$

9.11 Άσκηση 17.100 CBK / 17.105s/ 12.82 CC/ 12.87s. (3)

- Αέρας θερμαίνεται καθώς διαπερνά αγωγό με υποηχητική ταχύτητα. Όταν το ποσό θερμότητας φθάσει στην τιμή 67 kJ/kg, η ροή στραγγαλίζεται και η ταχύτητα και η στατική πίεση μετρώνται ίσες με 680 m/s και 270 kPa αντίστοιχα. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστούν V, P, T στην είσοδο του αγωγού.



Then the inlet temperature, pressure, and velocity are determined to be

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_2/T^*}{T_1/T^*}=\frac{1}{1.018} \rightarrow T_1=1.018T_2=1.018(1151\,\text{K})=\mathbf{1172K}$$

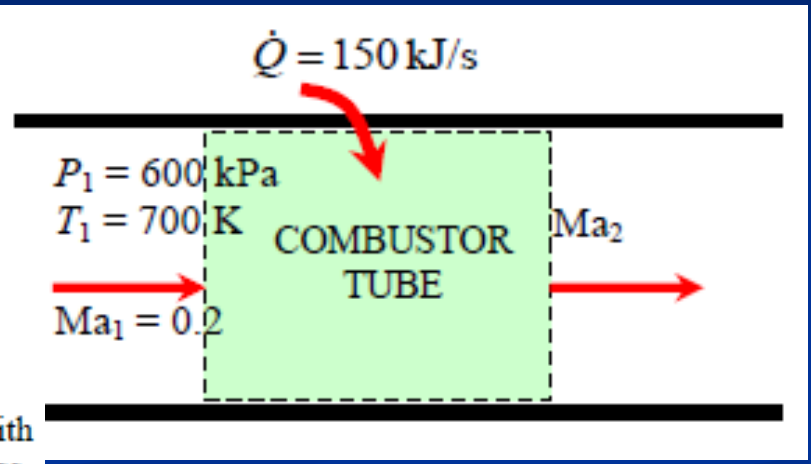
$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{P_2/P^*}{P_1/P^*}=\frac{1}{1.301} \rightarrow P_1=1.301P_2=1.301(270\,\text{kPa})=\mathbf{351.3kPa}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_2/V^*}{V_1/V^*}=\frac{1}{0.7852} \rightarrow V_1=0.7852V_2=0.7852(680\,\text{m/s})=\mathbf{533.9m/s}$$

Discussion Note that the temperature and pressure decreases with heating during this subsonic Rayleigh flow while velocity increases. This problem can also be solved using appropriate relations instead of tabulated values, which can likewise be coded for convenient computer solutions.

9.12 Άσκηση 17.101 CBK / 17.106s/ 12.83 CC / 12.88s. (1)

- Συμπιεσμένος αέρας από το συμπιεστή αεριοστροβίλου εισέρχεται σε θάλαμο καύσης μιας μηχανής με T_1 = 700K, P_1 = 600kPa, Ma_1 = 0.2 και ρυθμό 0.3 kg/s. Θερμότητα με ρυθμό 150 kJ/s μεταφέρεται λόγω της καύσης στον αέρα που διαπερνά τον αγωγό με αμελητέα τριβή.
- Να προσδιοριστεί ο Ma στην έξοδο του αγωγού και η πτώση στην πίεση ανακοπής $P_{01} - P_{02}$ κατά τη διάρκεια της διεργασίας.



Assumptions 1 The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid. 2 The cross-sectional area of the combustion chamber is constant. 3 The increase in mass flow rate due to fuel injection is disregarded.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

$$T_{01} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right) = (700\text{ K})\left(1 + \frac{1.4-1}{2}0.2^2\right) = 705.6\text{ K}$$

$$P_{01} = P_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)^{k/(k-1)} = (600\text{ kPa})\left(1 + \frac{1.4-1}{2}0.2^2\right)^{1.4/0.4} = 617.0\text{ kPa}$$

The exit stagnation temperature is determined from

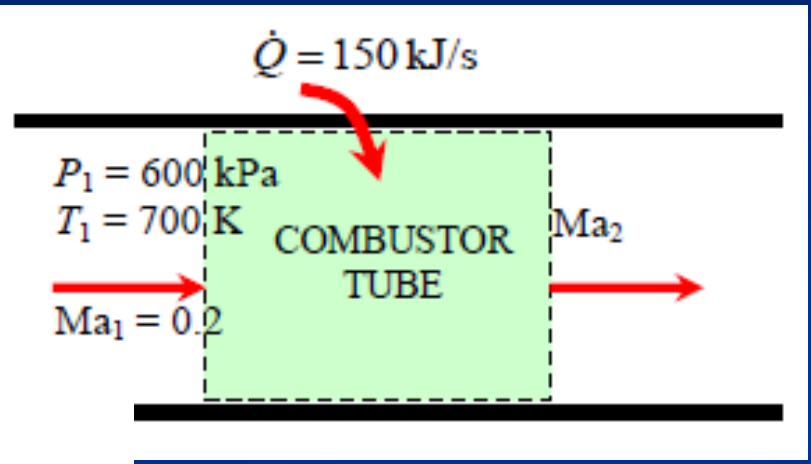
$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{air}} c_p (T_{02} - T_{01}) \quad \rightarrow \quad 150\text{ kJ/s} = (0.3\text{ kg/s})(1.005\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(T_{02} - 705.6)\text{ K}$$

It gives

$$T_{02} = 1203\text{ K}$$

9.12 Άσκηση 17.101 CBK / 17.106s/ 12.83 CC / 12.88s. *(2)*

- Συμπιεσμένος αέρας από το συμπιεστή αεριοστροβίλου εισέρχεται σε θάλαμο καύσης μιας μηχανής με T_1 = 700K, P_1 = 600kPa, Ma_1 = 0.2 και ρυθμό 0.3 kg/s. Θερμότητα με ρυθμό 150 kJ/s μεταφέρεται λόγω της καύσης στον αέρα που διαπερνά τον αγωγό με αμελητέα τριβή.
- Να προσδιοριστεί ο Ma στην έξοδο του αγωγού και η πτώση στην πίεση ανακοπής $P_{01} - P_{02}$ κατά τη διάρκεια της διεργασίας.



At $Ma_1 = 0.2$ we read from $T_{01}/T_0^* = 0.1736$ (Table A-34). Therefore,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.1736} = \frac{705.6\,\text{K}}{0.1736} = 4064.5\,\text{K}$$

Then the stagnation temperature ratio at the exit and the Mach number corresponding to it are (Table A-34)

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1203\,\text{K}}{4064.5\,\text{K}} = 0.2960 \quad \rightarrow \quad Ma_2 = 0.2706 \cong \mathbf{0.271}$$

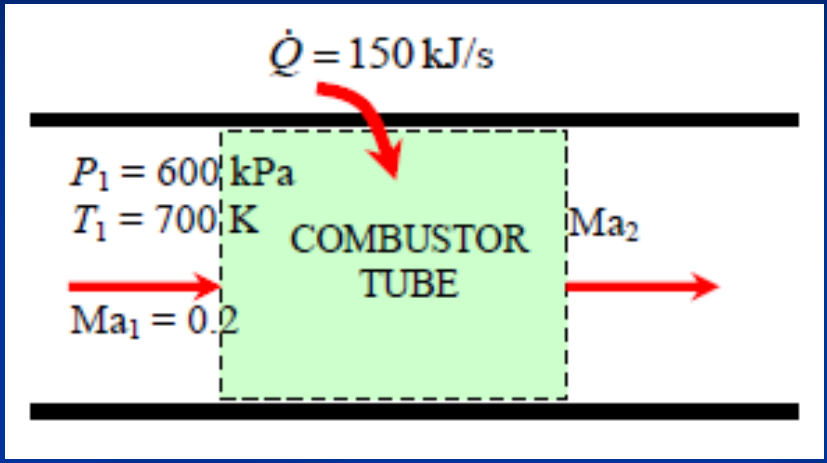
Also,

$$Ma_1 = 0.2 \quad \rightarrow \; P_{01}/P_0^* = 1.2346$$

$$Ma_2 = 0.2706 \quad \rightarrow \; P_{02}/P_0^* = 1.2091$$

9.12 Άσκηση 17.101 CBK / 17.106s/ 12.83 CC / 12.88s. *(3)*

- Συμπιεσμένος αέρας από το συμπιεστή αεριοστροβίλου εισέρχεται σε θάλαμο καύσης μιας μηχανής με T_1 = 700 K, P_1 = 600 kPa, Ma_1 = 0.2 και ρυθμό 0.3 kg/s. Θερμότητα με ρυθμό 150 kJ/s μεταφέρεται λόγω της καύσης στον αέρα που διαπερνά τον αγωγό με αμελητέα τριβή.
- Να προσδιοριστεί ο Ma στην έξοδο του αγωγού και την πτώση στην πίεση ανακοπής $P_{01} - P_{02}$ κατά τη διάρκεια της διεργασίας.



Then the stagnation pressure at the exit and the pressure drop become

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}/P_0^*}{P_{01}/P_0^*} = \frac{1.2091}{1.2346} = 0.9794 \quad \rightarrow \quad P_{02} = 0.9794 P_{01} = 0.9794(617\,\text{kPa}) = 604.3\,\text{kPa}$$

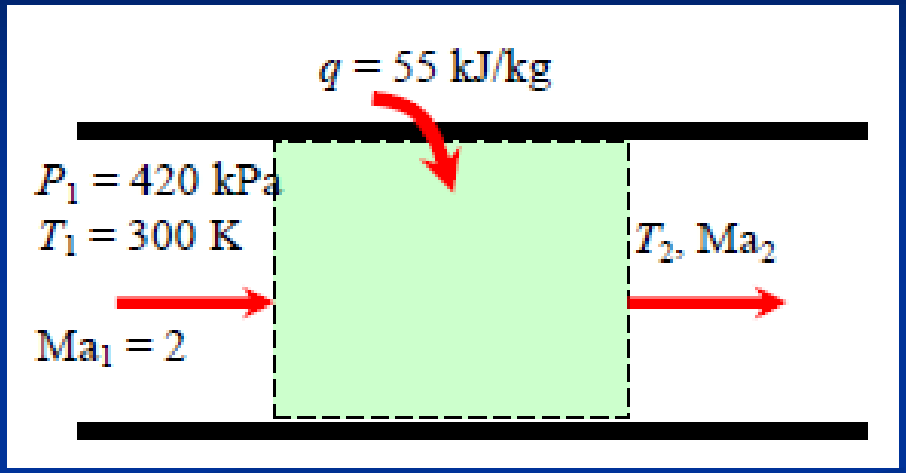
and

$$\Delta P_0 = P_{01} - P_{02} = 617.0 - 604.3 = \mathbf{12.7\,kPa}$$

Discussion This problem can also be solved using appropriate relations instead of tabulated values, which can likewise be coded for convenient computer solutions.

9.13 Άσκηση 17.105 CBK / 17.111s/ 12.88 CC / 12.93s. *(1)*

- Αέρας εισέρχεται σε τετραγωνικής διατομής αγωγό με T_1 = 300 K, P_1 = 420 kPa, Ma_1 = 2.0. Καθώς ο αέρας διαπερνά τον αγωγό προσλαμβάνει θερμότητα με ρυθμό 55 kJ/s. Αν η ροή θεωρείται αμελητέας τριβής (Ροή Rayleigh).
- Να προσδιοριστούν Ma, T στην έξοδο του αγωγού.



Assumptions The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

Analysis The stagnation temperature and Mach number at the inlet are

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K})(300\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 347.2\ \text{m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 2(347.2\ \text{m/s}) = 694.4\ \text{m/s}$$

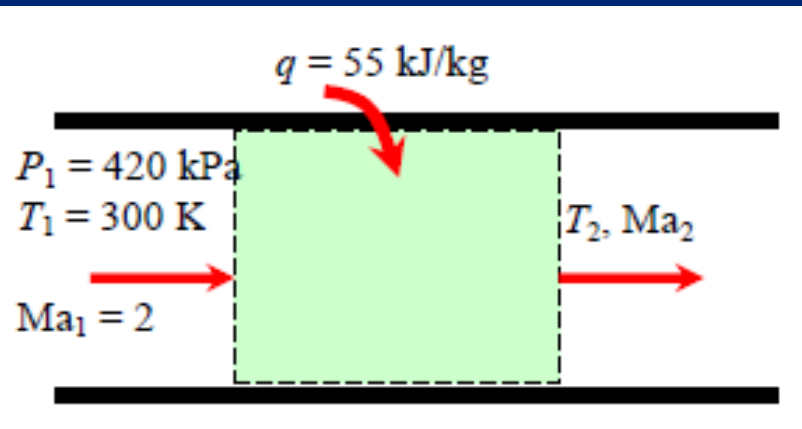
$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 300\ \text{K} + \frac{(694.4\ \text{m/s})^2}{2\times 1.005\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}}\left(\frac{1\ \text{kJ/kg}}{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}\right) = 539.9\ \text{K}$$

The exit stagnation temperature is, from the energy equation $q = c_p(T_{02} - T_{01})$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 539.9\ \text{K} + \frac{55\ \text{kJ/kg}}{1.005\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}} = 594.6\ \text{K}$$

9.13 Άσκηση 17.105 CBK / 17.111s/ 12.88 CC / 12.93s. *(2)*

- Αέρας εισέρχεται σε τετραγωνικής διατομής αγωγό με T_1 = 300 K, P_1 = 420 kPa, Ma_1 = 2.0. Καθώς ο αέρας διαπερνά τον αγωγό προσλαμβάνει θερμότητα με ρυθμό 55 kJ/s. Η ροή θεωρείται με αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh).
- Να προσδιοριστούν Ma, T στην έξοδο του αγωγού.



The maximum value of stagnation temperature T_0^* occurs at Ma = 1, and its value can be determined from Table A-34 or from the appropriate relation. At $Ma_1 = 2$ we read $T_{01}/T_0^* = 0.7934$. Therefore,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.7934} = \frac{539.9\,\text{K}}{0.7934} = 680.5\,\text{K}$$

The stagnation temperature ratio at the exit and the Mach number corresponding to it are, from Table A-34,

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{594.6\,\text{K}}{680.5\,\text{K}} = 0.8738 \quad \rightarrow \quad Ma_2 = 1.642 \cong \mathbf{1.64}$$

Also,

$$Ma_1 = 2 \quad \rightarrow \quad T_1/T^* = 0.5289$$

$$Ma_2 = 1.642 \quad \rightarrow \quad T_2/T^* = 0.6812$$

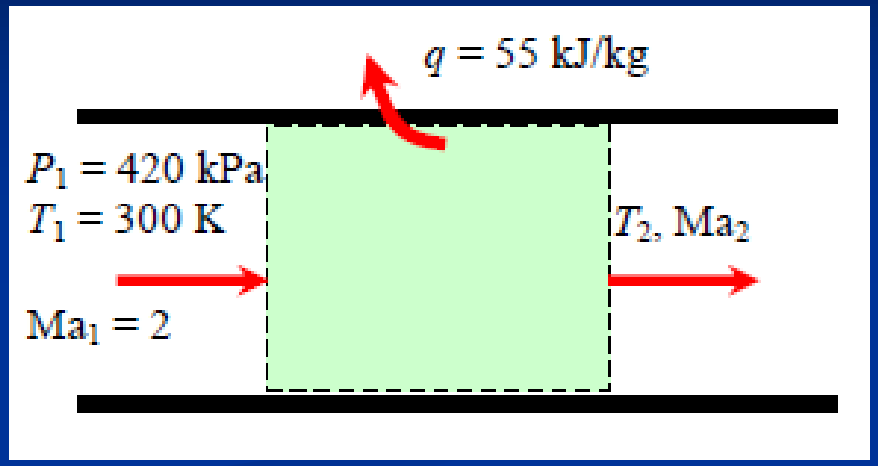
Then the exit temperature becomes

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.6812}{0.5289} = 1.288 \quad \rightarrow \quad T_2 = 1.288T_1 = 1.288(300\,\text{K}) = \mathbf{386\,K}$$

Discussion Note that the temperature increases during this supersonic Rayleigh flow with heating. This problem can also be solved using appropriate relations instead of tabulated values, which can likewise be coded for convenient computer solutions.

9.14 Άσκηση 17.106 CBK / 17.112s/ 12.89 CC / 12.94s. *(1)*

- Αέρας εισέρχεται σε τετραγωνικής διατομής αγωγό με T_1 = 300 K, P_1 = 420 kPa, Ma_1 = 2.0. Καθώς ο αέρας διαπερνά τον αγωγό ψύχεται κατά ρυθμό 55 kJ/s. Η ροή θεωρείται με αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh).
- Να προσδιοριστούν Ma, T στην έξοδο του αγωγού.



Assumptions The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

Analysis The stagnation temperature and Mach number at the inlet are

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K})(300\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 347.2\ \text{m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 2(347.2\ \text{m/s}) = 694.4\ \text{m/s}$$

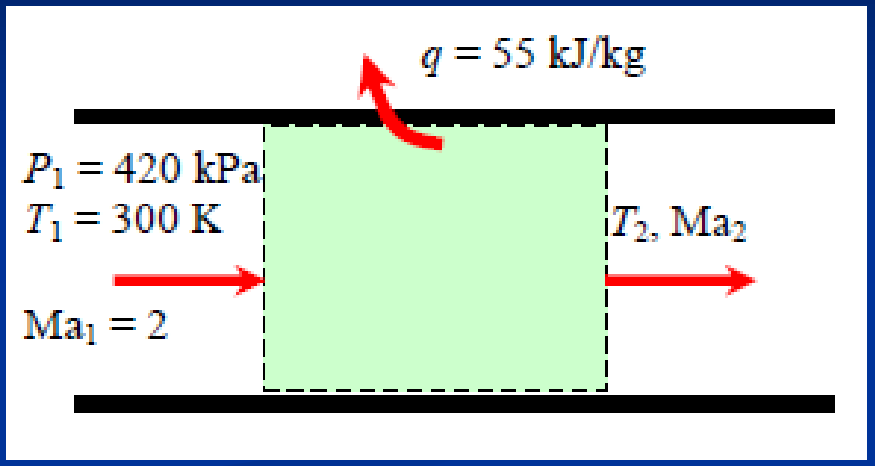
$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 300\ \text{K} + \frac{(694.4\ \text{m/s})^2}{2\times 1.005\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}}\left(\frac{1\ \text{kJ/kg}}{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}\right) = 539.9\ \text{K}$$

The exit stagnation temperature is, from the energy equation $q = c_p(T_{02} - T_{01})$,

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 539.9\ \text{K} + \frac{-55\ \text{kJ/kg}}{1.005\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}} = 485.2\ \text{K}$$

9.14 Άσκηση 17.106 CBK / 17.112s/ 12.89 CC / 12.94s. *(2)*

- Αέρας εισέρχεται σε τετραγωνικής διατομής αγωγό με T_1 = 300 K, P_1 = 420 kPa, Ma_1 = 2.0. Καθώς ο αέρας διαπερνά τον αγωγό ψύχεται κατά ρυθμό 55 kJ/s. Η ροή θεωρείται με αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh).
- Να προσδιοριστούν Ma, T στην έξοδο του αγωγού.



The maximum value of stagnation temperature T_0^* occurs at Ma = 1, and its value can be determined from Table A-34 or from the appropriate relation. At $Ma_1 = 2$ we read $T_{01}/T_0^* = 0.7934$. Therefore,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.7934} = \frac{539.9\,\text{K}}{0.7934} = 680.5\,\text{K}$$

The stagnation temperature ratio at the exit and the Mach number corresponding to it are, from Table A-34,

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{485.2\,\text{K}}{680.5\,\text{K}} = 0.7130 \quad \rightarrow \quad Ma_2 = 2.479 \cong \mathbf{2.48}$$

Also,

$$Ma_1 = 2 \quad \rightarrow \quad T_1/T^* = 0.5289$$

$$Ma_2 = 2.479 \quad \rightarrow \quad T_2/T^* = 0.3838$$

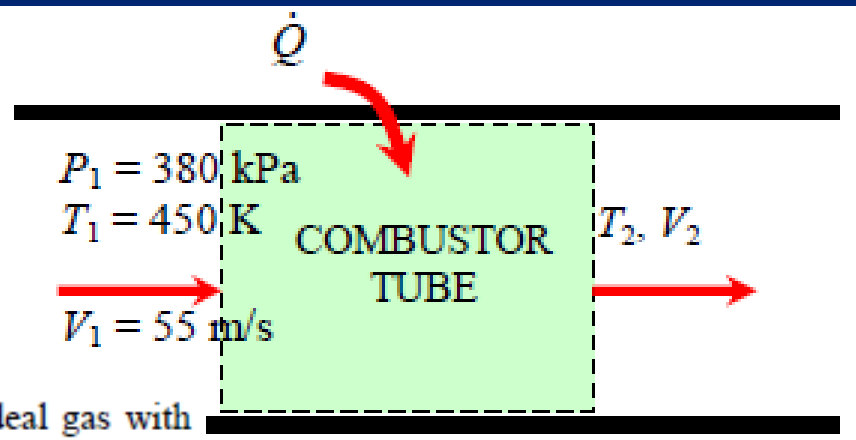
Then the exit temperature becomes

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.3838}{0.5289} = 0.7257 \quad \rightarrow \quad T_2 = 0.7257T_1 = 0.7257(300\,\text{K}) = \mathbf{218\,K}$$

Discussion Note that the temperature decreases and Mach number increases during this supersonic Rayleigh flow with cooling. This problem can also be solved using appropriate relations instead of tabulated values, which can likewise be coded for convenient computer solutions.

9.15 Άσκηση 12.90 CC / 17.113s / 12.95s. *(1)*

- Θεωρείται σωληνοειδής θάλαμος καύσης διαμέτρου 16cm. Αέρας εισέρχεται στο θάλαμο με T_1 = 450 K, P_1 = 380 kPa, V_1 = 55m/s. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 39,000 kJ/kg καίγεται αφού πρώτα ψεκαστεί στη ροή του αέρα. Εάν στην έξοδο του θαλάμου Ma_2 = 0.8 να προσδιορίσετε το ρυθμό με τον οποίο καίγεται το καύσιμο και τη θερμοκρασία εξόδου (T_2). Να υποτεθεί τέλεια καύση και να αγνοηθεί η αύξηση της παροχής μάζας λόγω της προσθήκης καυσίμου στο θάλαμο.



Assumptions **1** The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid. **2** Combustion is complete, and it is treated as a heat addition process, with no change in the chemical composition of flow. **3** The increase in mass flow rate due to fuel injection is disregarded.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

Analysis The inlet density and mass flow rate of air are

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{380\ \text{kPa}}{(0.287\ \text{kJ/kgK})(450\ \text{K})} = 2.942\ \text{kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{air} = \rho_1 A_{c1} V_1 = (2.942\ \text{kg/m}^3)[\pi(0.16\ \text{m})^2/4](55\ \text{m/s}) = 3.254\ \text{kg/s}$$

The stagnation temperature and Mach number at the inlet are

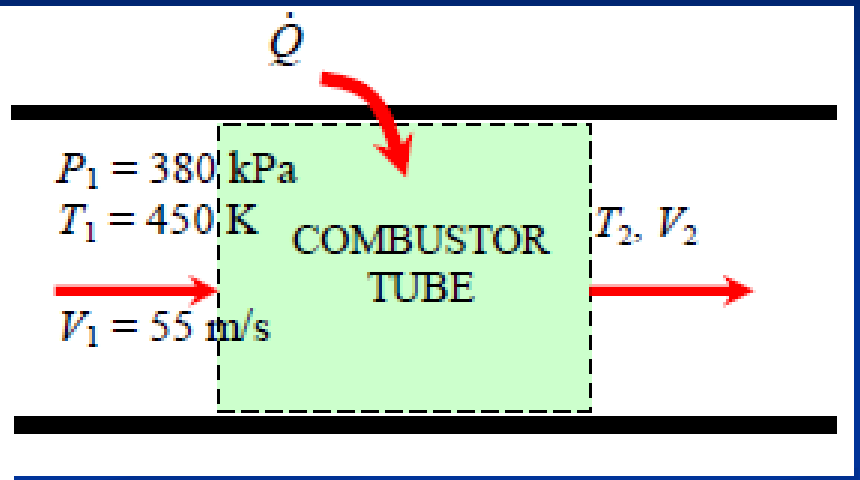
$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 450\ \text{K} + \frac{(55\ \text{m/s})^2}{2\times 1.005\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}}\left(\frac{1\ \text{kJ/kg}}{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}\right) = 451.5\ \text{K}$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K})(450\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 425.2\ \text{m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{55\ \text{m/s}}{425.2\ \text{m/s}} = 0.1293$$

9.15 Άσκηση 12.90 CC / 17.113s / 12.95s. *(2)*

- Θεωρείται σωληνοειδής θάλαμος καύσης διαμέτρου 16cm. Αέρας εισέρχεται στο θάλαμο με T_1 = 450 K, P_1 = 380 kPa, 55m/s. Καύσιμο θερμογόνου ισχύος 39,000 kJ/kg καίγεται αφού πρώτα ψεκαστεί στη ροή του αέρα. Εάν στην έξοδο του θαλάμου Ma_2 = 0.8 να προσδιορίσετε το ρυθμό με τον οποίο καίγεται το καύσιμο και τη θερμοκρασία εξόδου (T_2). Να υποτεθεί τέλεια καύση και να αγνοηθεί η αύξηση της παροχής μάζας λόγω της προσθήκης καυσίμου στο θάλαμο.



The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are (Table A-34) (We used analytical functions):

$Ma_1 = 0.1293$: $T_1/T^* = 0.09201$, $T_{01}/T^* = 0.07693$, $V_1/V^* = 0.03923$

$Ma_2 = 0.8$: $T_2/T^* = 1.0255$, $T_{02}/T^* = 0.9639$, $V_2/V^* = 0.8101$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{1.0255}{0.09201} = 11.146 \rightarrow T_2 = 11.146 T_1 = 11.146(450\,\text{K}) = \mathbf{5016K}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}/T^*}{T_{01}/T^*} = \frac{0.9639}{0.07693} = 12.530 \rightarrow T_{02} = 12.530 T_{01} = 12.530(451.5\,\text{K}) = 5658\,\text{K}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{0.8101}{0.03923} = 20.650 \rightarrow V_2 = 20.650 V_1 = 20.650(55\,\text{m/s}) = 1136\,\text{m/s}$$

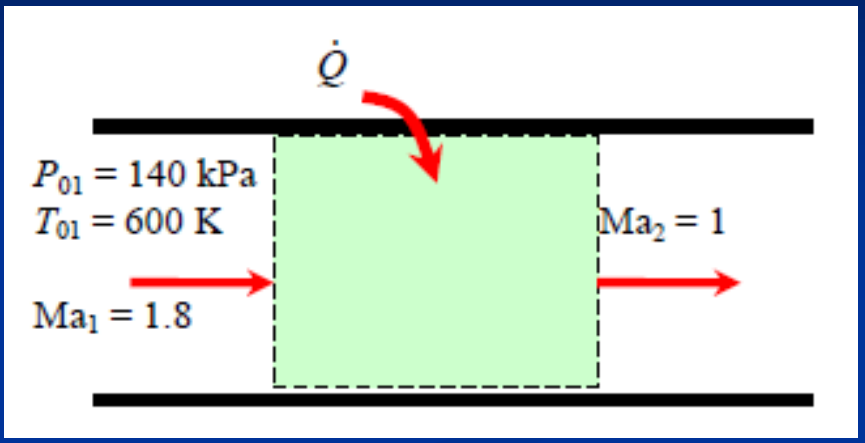
$$q = c_p(T_{02} - T_{01}) = (1.005\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(5658 - 451.5)\,\text{K} = 5232\,\text{kJ/kg}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{air}} q = (3.254\ \text{kg/s})(5232\,\text{kJ/kg}) = 17{,}024\,\text{kW}$$

$$\dot{m}_{\text{fuel}} = \frac{\dot{Q}}{HV} = \frac{17{,}024\,\text{kJ/s}}{39{,}000\,\text{kJ/kg}} = \mathbf{0.4365kg/s}$$

9.16 Άσκηση 17.107 CC / 17.114s / 12.91 CC / 12.96s. (1)

- Θεωρείται υπερηχητική ροή αέρα αμελητέας τριβής διαμέσου αγωγού διαμέτρου 7cm. Ο αέρας εισέρχεται στον αγωγό με $Ma_1 = 1.8$, $P_{01} = 140kPa$, $T_{01} = 600K$ και επιβραδύνεται θερμαινόμενος. Να προσδιοριστεί η μέγιστη θερμοκρασία που μπορεί να θερμανθεί ο αέρας με την προσθήκη θερμότητας ενώ η παροχή μάζας παραμένει σταθερή. (Ζητείται δηλ. η συνθήκη ώστε να επιτευχθεί choked flow).



$$T_1 = T_{01}\left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)^{-1} = (600\,\text{K})\left(1+\frac{1.4-1}{2}1.8^2\right)^{-1} = 364.1\,\text{K}$$

$$P_1 = P_{01}\left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)^{-k/(k-1)} = (140\,\text{K})\left(1+\frac{1.4-1}{2}1.8^2\right)^{-1.4/0.4}$$

$$= 24.37\,\text{kPa}$$

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{24.37\,\text{kPa}}{(0.287\,\text{kJ/kgK})(364.1\,\text{K})} = 0.2332\,\text{kg/m}^3$$

Then the inlet velocity and the mass flow rate become

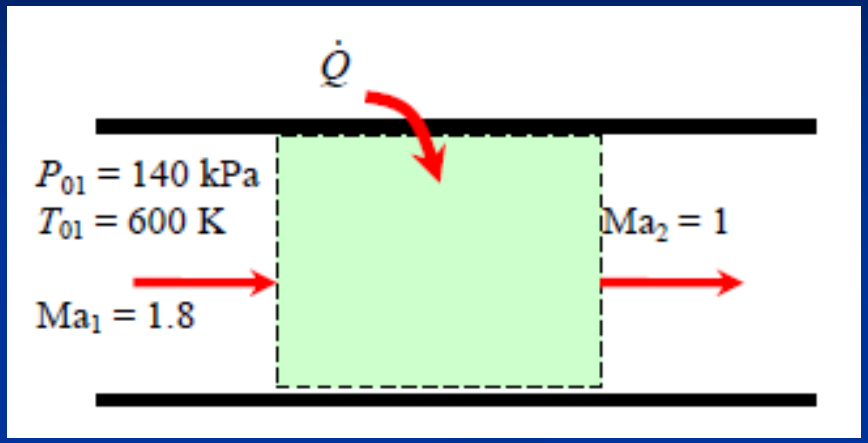
$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(364.1\,\text{K})\left(\frac{1000\,\text{m}^2/\text{s}^2}{1\,\text{kJ/kg}}\right)} = 382.5\,\text{m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 1.8(382.5\,\text{m/s}) = 688.5\,\text{m/s}$$

$$\dot{m}_{air} = \rho_1 A_{c1} V_1 = (0.2332\,\text{kg/m}^3)[\pi(0.07\,\text{m})^2/4](688.5\,\text{m/s}) = 0.6179\,\text{kg/s}$$

9.16 Άσκηση 17.107 CC / 17.114s / 12.91 CC / 12.96s. *(2)*

- Θεωρείται υπερηχητική ροή αέρα αμελητέας τριβής διαμέσου αγωγού διαμέτρου 7cm. Ο αέρας εισέρχεται στον αγωγό με $Ma_1 = 1.8$, $P_{01} = 140kPa$, $T_{01} = 600K$ και επιβραδύνεται θερμαινόμενος. Να προσδιοριστεί η μέγιστη θερμοκρασία που μπορεί να θερμανθεί ο αέρας με την προσθήκη θερμότητας ενώ η παροχή μάζας παραμένει σταθερή.



The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are (Table A-34):

$Ma_1 = 1.8$: $T_1/T^* = 0.6089$, $T_{01}/T_0^* = 0.8363$

$Ma_2 = 1$: $T_2/T^* = 1$, $T_{02}/T_0^* = 1$

Then the exit temperature and stagnation temperature are determined to be

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{1}{0.6089} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1/0.6089 = (364.1\,\text{K})/0.6089 = \mathbf{598\,K}$$

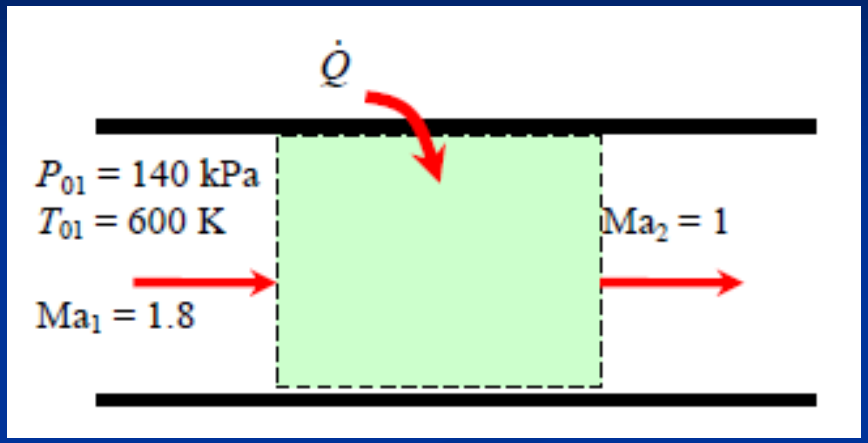
$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}/T_0^*}{T_{01}/T_0^*} = \frac{1}{0.8363} \quad \rightarrow \quad T_{02} = T_{01}/0.8363 = (600\,\text{K})/0.8363 = 717.4\,\text{K} \cong \mathbf{717\ K}$$

Finally, the rate of heat transfer is

$$\dot{Q} = \dot{m}_{air} c_p (T_{02} - T_{01}) = (0.6179\,\text{kg/s})(1.005\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(717.4 - 600)\,\text{K} = \mathbf{72.9\,kW}$$

9.16 Άσκηση 17.107 CC / 17.114s / 12.91 CC / 12.96s. (3)

- Θεωρείται υπερηχητική ροή αέρα αμελητέας τριβής διαμέσου αγωγού διαμέτρου 7cm. Ο αέρας εισέρχεται στον αγωγό με $Ma_1 = 1.8$, $P_{01} = 140kPa$, $T_{01} = 600K$ και επιβραδύνεται θερμαινόμενος. Να προσδιοριστεί η μέγιστη θερμοκρασία που μπορεί να θερμανθεί ο αέρας με την προσθήκη θερμότητας ενώ η παροχή μάζας παραμένει σταθερή.



The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are (Table A-34):

$Ma_1 = 1.8$: $T_1/T^* = 0.6089$, $T_{01}/T_0^* = 0.8363$

$Ma_2 = 1$: $T_2/T^* = 1$, $T_{02}/T_0^* = 1$

Then the exit temperature and stagnation temperature are determined to be

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{1}{0.6089} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1/0.6089 = (364.1\,\text{K})/0.6089 = \mathbf{598\,K}$$

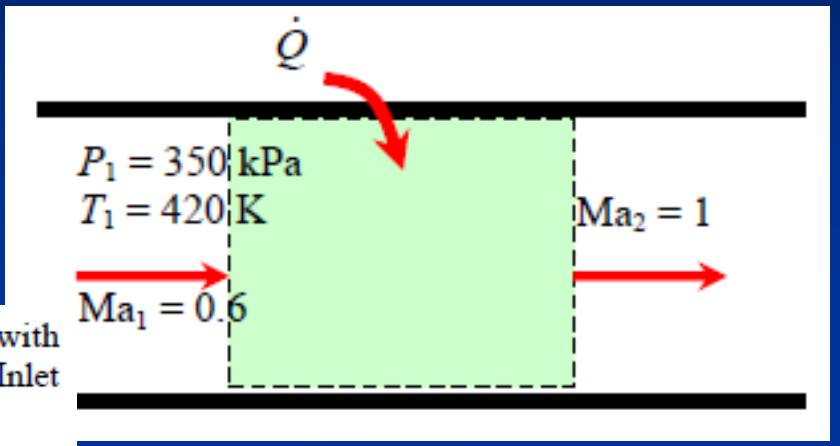
$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}/T_0^*}{T_{01}/T_0^*} = \frac{1}{0.8363} \quad \rightarrow \quad T_{02} = T_{01}/0.8363 = (600\,\text{K})/0.8363 = 717.4\,\text{K} \cong \mathbf{717\ K}$$

Finally, the rate of heat transfer is

$$\dot{Q} = \dot{m}_{air} c_p (T_{02} - T_{01}) = (0.6179\,\text{kg/s})(1.005\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(717.4 - 600)\,\text{K} = \mathbf{72.9\,kW}$$

9.17 Άσκηση 12.136 CC / 12.143s. *(1)*

- Αέρας που οδηγείται με υποηχητική ταχύτητα σε αγωγό τετραγωνικής διατομής 10x10 cm^2, θερμαίνεται. Οι ιδιότητες του αέρα στην είσοδο είναι $Ma_1 = 0.6$, $P_1 = 350kPa$, $T_1 = 420K$. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστεί ο υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας προς τον αέρα του αγωγού χωρίς να επηρεάζονται οι συνθήκες εισόδου.



Assumptions 1 The assumptions associated with Rayleigh flow (i.e., steady one-dimensional flow of an ideal gas with constant properties through a constant cross-sectional area duct with negligible frictional effects) are valid. 2 Inlet conditions (and thus the mass flow rate) remain constant.

Properties We take the properties of air to be $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, and $R = 0.287$ kJ/kg·K.

Analysis Heat transfer will stop when the flow is choked, and thus $Ma_2 = V_2/c_2 = 1$. The inlet density and stagnation temperature are

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{350\,\text{kPa}}{(0.287\,\text{kJ/kgK})(420\,\text{K})} = 2.904\,\text{kg/m}^3$$

$$T_{01} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right) = (420\,\text{K})\left(1 + \frac{1.4-1}{2}0.6^2\right) = 450.2\,\text{K}$$

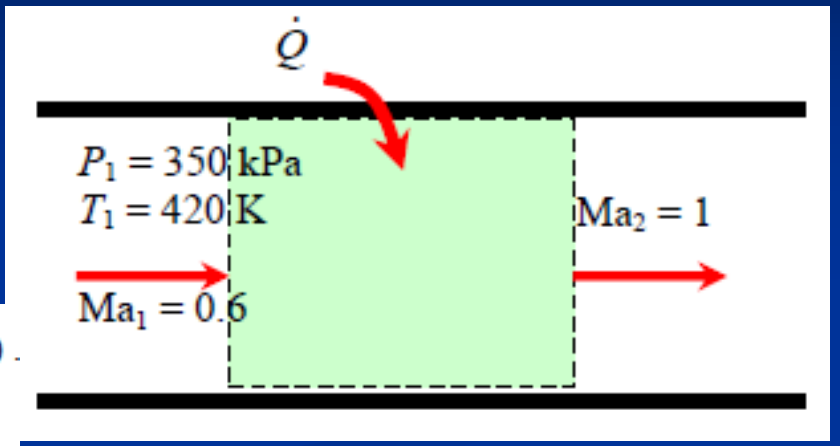
$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(420\,\text{K})\left(\frac{1000\,\text{m}^2/\text{s}^2}{1\,\text{kJ/kg}}\right)} = 410.8\,\text{m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 0.6(410.8\,\text{m/s}) = 246.5\,\text{m/s}$$

$$\dot{m}_{air} = \rho_1 A_{c1} V_1 = (2.904\,\text{kg/m}^3)(0.1\times 0.1\,\text{m}^2)(246.5\,\text{m/s}) = 7.157\,\text{kg/s}$$

9.17 Άσκηση 12.136 CC / 12.143s. *(2)*

- Αέρας που οδηγείται με υποηχητική ταχύτητα σε αγωγό τετραγωνικής διατομής 10x10 cm^2, θερμαίνεται. Οι ιδιότητες του αέρα στην είσοδο είναι $Ma_1 = 0.6$, $P_1 = 350kPa$, $T_1 = 420K$. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστεί ο υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας προς τον αέρα του αγωγού χωρίς να επηρεάζονται οι συνθήκες εισόδου.



The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are $T_{02}/T_0^* = 1$ (since $Ma_2 = 1$).

$$\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}_1^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2]}{(1+k\mathrm{Ma}_1^2)^2} = \frac{(1.4+1)0.6^2[2+(1.4-1)0.6^2]}{(1+1.4\times 0.6^2)^2} = 0.8189$$

Therefore,

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}/T_0^*}{T_{01}/T_0^*} = \frac{1}{0.8189} \quad \rightarrow \quad T_{02} = T_{01}/0.8189 = (450.2\,\mathrm{K})/0.8189 = 549.8\,\mathrm{K}$$

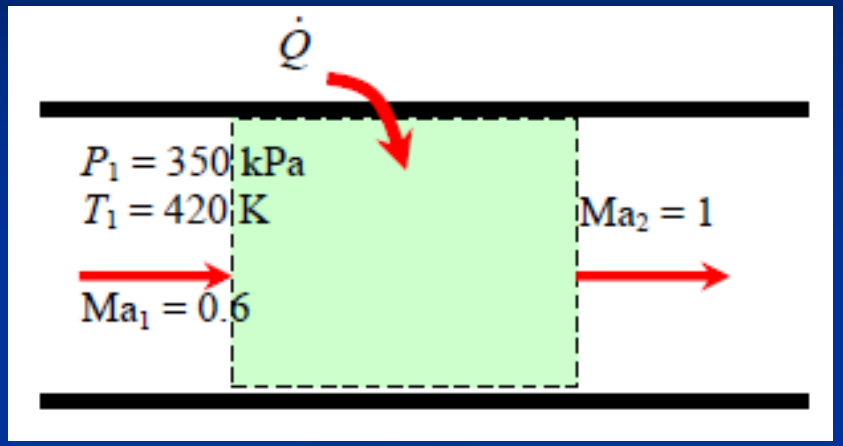
Then the rate of heat transfer becomes

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\mathrm{air}} c_p (T_{02} - T_{01}) = (7.157\,\mathrm{kg/s})(1.005\,\mathrm{kJ/kg\cdot K})(549.8 - 450.2)\,\mathrm{K} = \mathbf{716kW}$$

Discussion It can also be shown that $T_2 = 458$ K, which is the highest thermodynamic temperature that can be attained under stated conditions. If more heat is transferred, the additional temperature rise will cause the mass flow rate to decrease. We can also solve this problem using the Rayleigh function values listed in Table A-15.

9.18 Άσκηση 12.137 CC / 12.144s. *(2)*

- Ήλιο που οδηγείται με υποηχητική ταχύτητα σε αγωγό τετραγωνικής διατομής 10x10 cm^2, θερμαίνεται. Οι ιδιότητες του αέρα στην είσοδο είναι $Ma_1 = 0.6$, $P_1 = 350kPa$, $T_1 = 420K$. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστεί ο υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας προς τον αέρα του αγωγού χωρίς να επηρεάζονται οι συνθήκες εισόδου.



$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{350\,\text{kPa}}{(2.077\,\text{kJ/kgK})(420\,\text{K})} = 0.4012\,\text{kg/m}^3$$

$$T_{01} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right) = (420\,\text{K})\left(1 + \frac{1.667-1}{2}0.6^2\right) = 470.4\,\text{K}$$

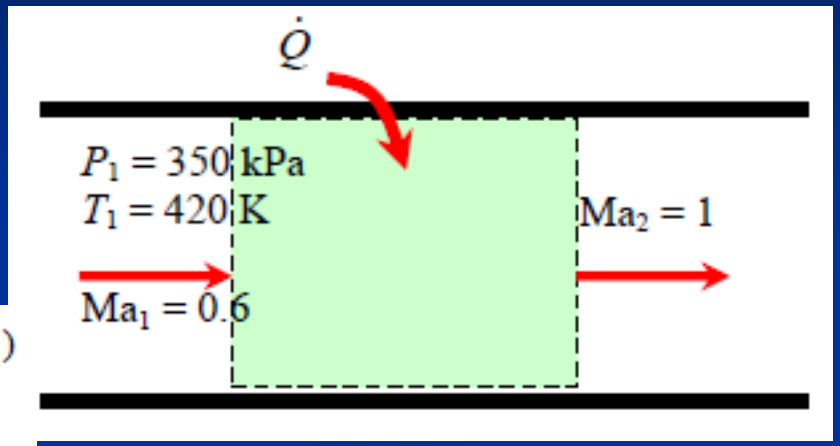
$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.667)(2.077\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(420\,\text{K})\left(\frac{1000\,\text{m}^2/\text{s}^2}{1\,\text{kJ/kg}}\right)} = 1206\,\text{m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 0.6(1206\,\text{m/s}) = 723.5\,\text{m/s}$$

$$\dot{m}_{air} = \rho_1 A_{c1} V_1 = (0.4012\,\text{kg/m}^3)(0.1\times 0.1\,\text{m}^2)(723.5\,\text{m/s}) = 2.903\,\text{kg/s}$$

9.18 Άσκηση 12.137 CC / 12.144s. *(2)*

- Ήλιο που οδηγείται με υποηχητική ταχύτητα σε αγωγό τετραγωνικής διατομής 10x10 cm^2, θερμαίνεται. Οι ιδιότητες του αέρα στην είσοδο είναι $Ma_1 = 0.6$, $P_1 = 350kPa$, $T_1 = 420K$. Αγνοώντας τις απώλειες λόγω τριβής να προσδιοριστεί ο υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας προς τον αέρα του αγωγού χωρίς να επηρεάζονται οι συνθήκες εισόδου.



The Rayleigh flow functions corresponding to the inlet and exit Mach numbers are $T_{02}/T_0^* = 1$ (since $Ma_2 = 1$)

$$\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}_1^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2]}{(1+k\mathrm{Ma}_1^2)^2} = \frac{(1.667+1)0.6^2[2+(1.667-1)0.6^2]}{(1+1.667\times 0.6^2)^2} = 0.8400$$

Therefore,

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}/T_0^*}{T_{01}/T_0^*} = \frac{1}{0.8400} \quad \rightarrow \quad T_{02} = T_{01}/0.8400 = (470.4\,\mathrm{K})/0.8400 = 560.0\ \mathrm{K}$$

Then the rate of heat transfer becomes

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_{02}-T_{01}) = (2.903\,\mathrm{kg/s})(5.193\,\mathrm{kJ/kg\cdot K})(560.0-470.4)\,\mathrm{K} = \mathbf{1350\ kW}$$

9.19 Εκφώνιση - Άssignment_04 Ροή σε αγωγό με Μεταφορά Θερμότητας -Ροή Rayleigh. (1)

Περιγραφή:

- ✓ **Α.** Αέρας εισέρχεται σε αγωγό αμελητέας τριβής με V_1 = 70m/s, T_1 = 600K, P_1 = 350kPa. Αν η θερμοκρασία εξόδου T_2 μεταβάλλεται στο εύρος (600 - 5000)K,
  1. Να εκτιμηθεί η μεταβολή της εντροπίας Δs σε διαστήματα των 200K. Ειδικότερα τα αποτελέσματα να δοθούν πινακοποιημένα για τις ιδιότητες T_2, P_2, V_2, Ma_2, s_2.
  2. Να επαναληφθεί η μελέτη για την περίπτωση που ως εργαζόμενα μέσα χρησιμοποιηθούν Αργό και Ήλιο.
  3. Να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα (T_2-s) οι γραμμές Rayleigh για τα 3 αέρια., όσο και τα υπόλοιπα μεγέθη που υπολογίστηκαν ομαδοποιημένα.

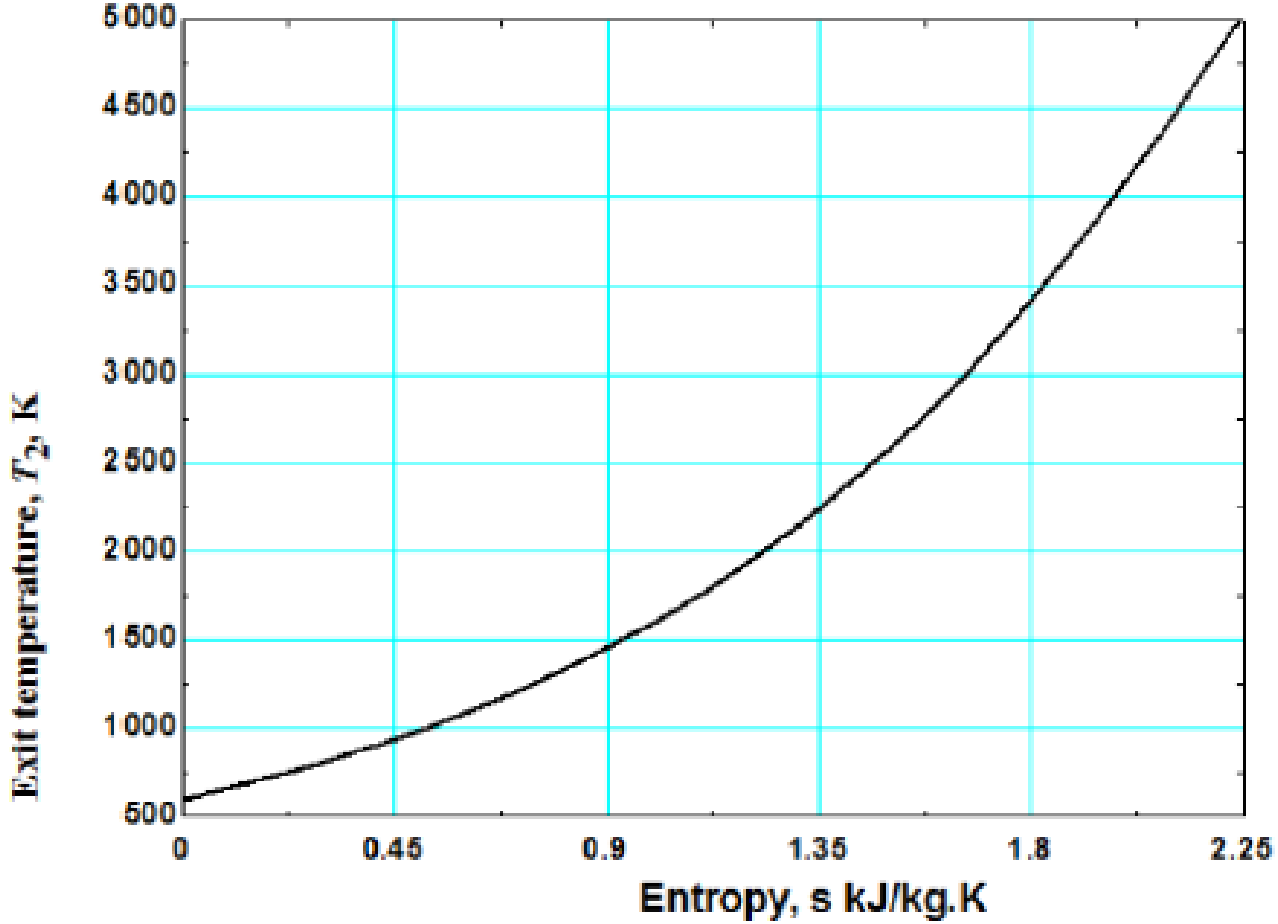
- ✓ **Β.** Η εργασία θα κατατεθεί ως αρχείο excel ή matlab όπου θα συμπεριλαμβάνονται οι μαθηματικές εκφράσεις προσδιορισμού όλων των μεγεθών ενδιαφέροντος (με snip για τις εξισώσεις). Στα υπολογιζόμενα κελιά θα φαίνεται η εφαρμογή των τύπων.

- ✓ **Γ.** Το αρχείο κατάθεσης θα έχει τίτλο **Επώνυμο_Όνομα_ΑΜ_Ροή Rayleigh** .

9.19 Εκφώνιση - Άssignment_04 Ροή σε αγωγό με Μεταφορά Θερμότητας -Ροή Rayleigh. (2)

Ενδεικτική Λύση:

Exit temperature T_2, K	Exit Mach number, Ma_2	Exit entropy relative to inlet, s_2, kJ/kg·K
600	0.143	0.000
800	0.166	0.292
1000	0.188	0.519
1200	0.208	0.705
1400	0.227	0.863
1600	0.245	1.001
1800	0.263	1.123
2000	0.281	1.232
2200	0.299	1.331
2400	0.316	1.423
2600	0.333	1.507
2800	0.351	1.586
3000	0.369	1.660
3200	0.387	1.729
3400	0.406	1.795
3600	0.426	1.858
3800	0.446	1.918
4000	0.467	1.975
4200	0.490	2.031
4400	0.515	2.085
4600	0.541	2.138



9.20 Βιβλιογραφία.

- **Καλλιντέρης Ι. (2025) Βασική ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ – ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Εκδόσεις Gotsis**
- **Y.A Cengel, M.A Boles, M.Kanoglu, Thermodynamics An Engineering Approach 9th ed. (chapter 17)**
- **Y.A Cengel, J.M. Cimbala, Fluid Mechanics Fundamentals and Applications 3rd ed. (chapter 12)**
- **J.D. Anderson Modern Compressible Flow McGraw – Hill Series in Aeronautical & Aerospace Engineering**
- **Frank M. White University of Rhode Island, Fluid Mechanics 8th ed. McGraw Hill (chapter 9)**

9.19 Περιεχόμενα Παρουσίασης.

9.1 Ροή σε αγωγούς με μεταφορά θερμότητας και αμελητέα τριβή (Ροή Rayleigh)..	9.11 Άσκηση 17.100 CBK / 17.105s/ 12.82 CC / 12.87s.
9.1.1 Διάγραμμα Ενθαλπίας – Εντροπίας σε Ροή Rayleigh.	9.12 Άσκηση 17.101 CBK / 17.106s/ 12.83 CC / 12.88s.
9.2 Παράδειγμα 17.13 – Ακρότατα Γραμμής Rayleigh.	9.13 Άσκηση 17.105 CBK / 17.111s/ 12.88 CC / 12.93s.
9.3 Παράδειγμα 17.14 – Επίδραση της Μεταφοράς Θερμότητας στην Ταχύτητα της Ροής.	9.14 Άσκηση 17.106 CBK / 17.112s/ 12.89 CC / 12.94s.
9.4 Σχέσεις Ιδιοτήτων της ροής Rayleigh.	9.15 Άσκηση 12.90 CC/ 17.113s / 12.95s.
9.5 Σχέσεις Ιδιοτήτων Ανακοπής της ροής Rayleigh.	9.16 Άσκηση 17.107 CBK / 17.114s/ 12.91 CC / 12.96s.
9.6 Σχέσεις Ιδιοτήτων της ροής Rayleigh μεταξύ 2 θέσεων του αγωγού.	9.17 Άσκηση 12.136 CC / 12.143s.
9.7 Στραγγαλισμένη Ροή Rayleigh.	9.18 Άσκηση 12.137 CC / 12.144s.
9.8 Παράδειγμα 17.15 Ροή Rayleigh σε σωληνοειδή καυστήρα.	9.19 Εκφώνιση - Assignment_04 Ροή σε αγωγό με Μεταφορά Θερμότητας -Ροή Rayleigh.
9.9 Πίνακας Ιδιοτήρων Ροής Rayleigh. (A-34)	9.20 Βιβλιογραφία.
9.10 Άσκηση 17.99 CBK / 17.104s/ 12.81 CC / 12.86s.	Παράρτημα Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0.

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (1)

- Η συμπεριφορά των αερίων σε μια ροή Rayleigh συμπυκνώνονται στον ακόλουθο πίνακα σε συνδυασμό και με τις καμπύλες που διέπουν μια ροή Rayleigh (Fig.17-54).

The effects of heating and cooling on the properties of Rayleigh flow

	Heating		*Cooling*	
Property	Subsonic	Supersonic	Subsonic	Supersonic
Velocity, V	Increase	Decrease	Decrease	Increase
Mach number, Ma	Increase	Decrease	Decrease	Increase
Stagnation temperature, T_0	Increase	Increase	Decrease	Decrease
Temperature, T	Increase for Ma < $1/k^{1/2}$ Decrease for Ma > $1/k^{1/2}$	Increase	Decrease for Ma < $1/k^{1/2}$ Increase for Ma > $1/k^{1/2}$	Decrease
Density, ρ	Decrease	Increase	Increase	Decrease
Stagnation pressure, P_0	Decrease	Decrease	Increase	Increase
Pressure, P	Decrease	Increase	Increase	Decrease
Entropy, s	Increase	Increase	Decrease	Decrease

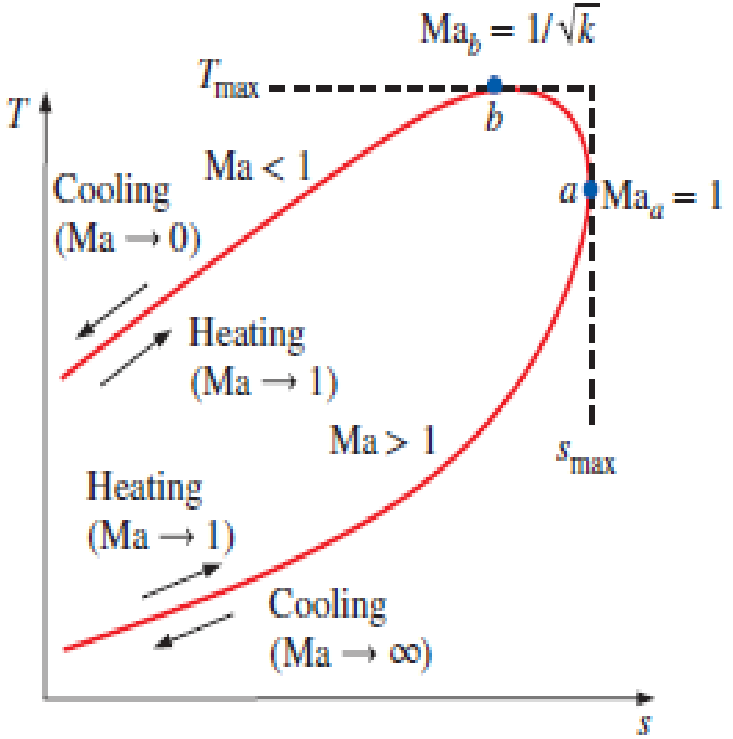


FIGURE 17–54 *T-s* diagram for flow in a constant-area duct with heat transfer and negligible friction (Rayleigh flow). (Cengel , Bowles, Kanonglou).

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow \boxed{T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}}$$

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (2)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???

- Γιατί ακόμα και αν από ΑΔΟ καταλαβαίνει κανείς ότι η πίεση και η ταχύτητα θα μεταβάλλονται αντίθετα (αυξάνεται η P – μειώνεται η V) πως προκύπτει συμπέρασμα για τη συμπεριφορά της P_0. !!!

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- Είναι μια από τις πιο "ύπουλες" ερωτήσεις γιατί το ένστικτο σκέφτεται : «Αφού προσθέτω ενέργεια (θερμότητα), γιατί χάνω ολική πίεση;». Και γιατί η λογική του ενστίκτου είναι ορθή και άρα θα έπρεπε να κερδίζω ολική πίεση ???

- **ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (ενεργειακό ισοζύγιο).**
- Καθαρά με όρους **μηχανικής**, το ένστικτό ότι η θέρμανση "θα έπρεπε" να αυξάνει την πίεση βασίζεται στην εικόνα που έχουμε για τα αέρια σε κλειστά δοχεία (στατικός όγκος ελέγχου ή σύστημα σταθερής μάζας – κλειστό σύστημα).

- Π.χ σε κλειστό δοχείο (κατσαρόλα ή λάστιχο αυτοκινήτου) προσθέτοντας θερμότητα,
  => τα μόρια κινούνται πιο γρήγορα => περισσότερες οι αποτελεσματικές συγκρούσεις μεταξύ τους ή και με τα τοιχώματα
  => αύξηση της πίεσης τελικά, (σε συμφωνία και με το ν. Ιδανικών αερίων P = ρRT).

- Δηλ αν ο όγκος άρα και η πυκνότητα παραμένουν σταθερές ποσότητες, τότε καθώς η T αυξάνει, αυξάνεται και η P (ισόχωρη θέρμανση – ΘΔΝ από τα παλιά…).

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (3)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???

- **ΑΝΟΙΚΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (υπάρχει και ταχύτητα ρέοντος ρευστού…)**
- Σε μια Ροή (Rayleigh) το αέριο δεν είναι εγκλωβισμένο (ανοικτό σύστημα), έχει την ελευθερία να κινηθεί προς την έξοδο.

- Τι συμβαίνει όταν το αέριο ζεσταίνεται μέσα στο σωλήνα?

- 1. Το αέριο θέλει να διασταλλεί - Η θερμότητα προσπαθεί να αυξήσει τον όγκο του αερίου.
- 2. Περιορισμός χώρου – Επειδή τα τοιχώματα του σωλήνα είναι σταθερά, ο μόνος τρόπος να διασταλλεί είναι να καταλάβει περισσότερο μήκος στο σωλήνα ανά μονάδα χρόνου.

- 3. Αναγκαστική επιτάχυνση - Για να αδειάσει ο χώρος για το αέριο που ακολουθεί και ζεσταίνεται και αυτό, το προπορευόμενο πρέπει να τρέξει πιο γρήγορα.

- **Το ερώτημα παραμένει… Γιατί η ολική πίεση μειώνεται αντί να αυξάνεται?**
- Για να επιταχυνθεί μια μάζα απαιτείται μια δύναμη. Η μόνη που μπορεί να επιταχύνει το αέριο μέσα στο σωλήνα (και αφού δεν υπάρχουν έμβολα ή ανεμιστήρες) είναι η Διαφορά Πίεσης !!! (Ρευστά-Ι από τα παλιά χρόνια ακόμα…)

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (4)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???

- Για να αυξηθεί η ταχύτητα από την είσοδο στην έξοδο πρέπει καταρχήν η $P_{inlet} > P_{exit}$.
- Οπότε το αέριο καθώς προχωρά και ζεσταίνεται η πίεσή του πρέπει να μειώνεται για να δημιουργήσει την κλίση πίεσης που απαιτείται για την επιτάχυνσή του (ακόμα Ρευστά –Ι).

- Τι συμβαίνει όμως με την P_0 – ολική πίεση (άθροισμα στατικής και δυναμικής πίεσης!),

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- Προσθέτοντας θερμότητα, η ταχύτητα αυξάνεται (το αέριο κερδίζει κινητική ενέργεια – Κ).
- Η Στατική πίεση (Ρ) πέφτει τόσο πολύ για να προκαλέσει αυτή την επιτάχυνση που η αύξηση της Κ δεν προλαβαίνει να την αναπληρώσει.

- Δηλ αν το αέριο ήταν ακίνητο η πίεση θα αυξανόταν. Επειδή όμως το αέριο είναι σε κίνηση, η παρεχόμενη θερμότητα μετατρέπεται σε ταχύτητα. Και επειδή η ταχύτητα απαιτεί υποβοήθηση για να αυξηθεί, το ρευστό καταναλώνει τη δική του πίεση ως καύσιμο για να πετύχει την επιτάχυνση. Κατά αυτό τον τρόπο προκύπτει μείωση της P_0. !!!

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (5)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???

- Με τη φράση «κατανάλωση πίεσης» περιγράφεται η μετατροπή της πίεσης (στατικής) σε δυναμική (πίεση ταχύτητας), όταν αυτή η διαδικασία συμβαίνει βίαια ή όχι αντιστρεπτά. Δηλ το ρευστό καταναλώνει τη στατική του πίεση για να καταφέρει να κερδίσει την ταχύτητα που του επιβάλλει η προσφερόμενη θέρμανση.

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- Γιατί χάνεται η P_0…τελικά. Κατά την ΑΔΟ μεταξύ 2 θέσεων θα πρέπει να διατηρείται ένα balance μεταξύ P και V ώστε το άθροισμα να παραμένει πάντα σταθερό. Αυτό δεν ισχύει στη ροή Rayleigh ??? Η P_0 μειώνεται γιατί η επιτάχυνση μέσω θέρμανσης σε σταθερή διατομή είναι εξαιρετικά βίαιη (μη αποδοτική – όχι αντιστρεπτή).

- Κατά την επιτάχυνση ρευστού μέσω ακροφυσίου (nozzle) η πίεση μετατρέπεται σε ταχύτητα «με κομψό τρόπο» (αντιστρεπτά).

- Κατά την επιτάχυνση ρευστού σε ροή Rayleigh η διαστολή των μορίων γίνεται προς όλες τις κατευθύνσεις οδηγώντας σε μεγαλύτερη αταξία (εντροπία) η οποία καταναλώνει μέρος της P_0. Έτσι η αύξηση της K δεν προλαβαίνει να αναπληρώσει τη μεγάλη πτώση της P.

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (6)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???
- Υποερώτημα: Τι σημαίνει ότι η αύξηση της K δεν προλαβαίνει να αναπληρώσει της μεγάλη πτώση της P.
- Ο πυρήνας της διαφοράς αντιστρεπτής ροής και ροής Rayleigh…Μοιάζει η K να χάνει τη μάχη έναντι της P (με την έννοια ότι δεν προλαβαίνει να την αναπληρώνει).
- **1. Πως θα «προλάβαινε» η K την αναπλήρωση της P (Ισεντροπική)…**

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- Σε ένα συγκλίνον ακροφύσιο χωρίς θέρμανση (θεωρείται ισεντροπική εκτόνωση) η ΔP μετατρέπεται ολοκληρωτικά σε K. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ισοζύγιο μεταξύ h και V (ΑΔΕ).
- Η ΔP στην προκειμένη περίπτωση θεωρείται «παραγωγική» και συμβαίνει επειδή ακριβώς το ρευστό επιταχύνεται με την P_0 να παραμένει σταθερή.

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = \text{const}$$

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (7)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???
- Υποερώτημα: Τι σημαίνει ότι η αύξηση της K δεν προλαβαίνει να αναπληρώσει της μεγάλη πτώση της P.

- **2. Γιατί στη ροή Rayleigh η K χάνει την P (δεν προλαβαίνει να την αναπληρώσει).**
- Δύο οι αιτίες ταυτόχρονα με την K να κερδίζει μόνο από τη μία.

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- **Α. Θερμική Διαστολή (το πρόβλημα).**
- Θερμαίνοντας ένα υποηχητικό ρευστό κινούμενο εντός σωλήνα σταθερής διατομής, η ρ μειώνεται δραματικά. Λόγω ΑΔΜ τότε η V θα πρέπει να αυξηθεί.

- **Β. Η ΔΡ (διπλή κατεύθυνση)**.
- 1. Πρέπει να επιταχυνθεί το ρευστό όπως στην ισεντροπική (εκτός πλαισίου το μαθήματος – ακροφύσιο Rayleigh με εφαρμογή σε Ramjet / Scramjet)).
- 2. Πρέπει να νικηθεί η αντίσταση που προβάλλει η ίδια η θέρμανση (η προσθήκη ενέργειας αυξάνει την τυρβώδη κίνηση και την εντροπία).

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (8)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???
- Υποερώτημα: Τι σημαίνει ότι η αύξηση της K δεν προλαβαίνει να αναπληρώσει της μεγάλη πτώση της P.
- Το αποτέλεσμα είναι ότι η P θα μειώνεται πολύ πιο γρήγορα από όσο αυξάνεται η V. Μεγάλο μέρος από την ενέργεια που «αφαιρείται» από την πίεση ΔΕΝ γίνεται ταχύτητα, αλλά χρησιμοποιείται για να αυξήσει την εσωτερική ενέργεια (θερμοκρασία) και την εντροπία του ρευστού.

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

- **3. Η Αναπλήρωση που δεν συμβαίνει ποτέ…**
- Για να «αναπλήρωνε» η K την P θα έπρεπε η συνολική πίεση P_0, να παραμένει σταθερή. Όμως σε μια ροή Rayleigh αυτό δεν συμβαίνει. Το ότι η P_0 μειώνεται είναι η απόδειξη για μια ροή ότι είναι Rayleigh (δηλ υπάρχει θέρμανση π.χ), διαφορετικά θα ήταν ισεντροπική. Η θέρμανση δηλ λειτουργεί ως «εμπόδιο» που πρέπει να υπερκεράσει το ρευστό με επιπλέον επιτάχυνση, κάτι που επιφέρει πλήγμα και πολύ βαρύ τίμημα στην P.

- P **(στατική)** ↓↓ (ραγδαία πτώση)
- $V^2/2$ **(κινητική)** ↑ (αύξηση)
- P_0 **(συνολική)** ↓ (απώλεια)

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (9)

- Ερώτημα: Γιατί σε μια ροή Rayleigh π.χ με την θέρμανση μιας υποηχητικής ροής, η ολική πίεση P_0 ή πίεση ανακοπής μειώνεται (όπως δείχνει ο πίνακας). Ερμηνεία ???

- Συνοψίζοντας η Κ θα αναπλήρωνε την Ρ μόνο αν η διαδικασία ήταν αδιαβατική και αντιστρεπτή. Στη Rayleigh η προσθήκη θερμότητας είναι μη αντιστρεπτή διαδικασία που οδηγεί σε αύξηση της εντροπίας.

- Διαφορετικά, η Κ αυξάνεται εκβιαστικά λόγω της διαστολής (μείωση της ρ) και όχι επειδή η Ρ μετατρέπεται «αποτελεσματικά» σε ταχύτητα. Για το λόγο αυτό η Ρ του ρευστού καταρρέει πολύ ταχύτερα σε σχέση με την αύξηση της ταχύτητάς του.

- P **(στατική)** ↓↓ (ραγδαία πτώση)
- $V^2/2$ **(κινητική)** ↑ (αύξηση)
- P_0 **(συνολική)** ↓ (απώλεια)

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (10)

- Νέο ερώτημα ανακύπτει πλέον…
- Θα μπορούσε να πει κανείς ότι ενώ η μελέτη της ροής Rayleigh ξεκινά με ένα σετ εξισώσεων στο οποίο λέμε ότι ισχύει η αρχή διατήρησης ορμής τελικά αυτή δεν ισχύει ? (Δεν θα πρέπει να προκύψει σίγουρα κάτι τέτοιο!!!)

- Η ΑΔΟ ισχύει απόλυτα, είναι ο μοναδικός λόγος που εξηγεί γιατί η στατική πίεση πέφτει τόσο πολύ.

- Στη μηχανική στερεών θεωρούμε την "ορμή" απλώς ως J = mV.
- Στη μηχανική των ρευστών, όμως, η εξίσωση ορμής για έναν αγωγό σταθερής διατομής (όπως στη ροή Rayleigh) έχει δύο όρους:
-
- P => Η δύναμη (P A) που ασκεί η στατική πίεση ανά μονάδα επιφάνειας
- ρV^2 => Η ροή ορμής του ίδιου ου ρευστού (πόση μάζα ρευστού περνάει από μια διατομή και με τι ταχύτητα)

- Προσθέτοντας θερμότητα το ρευστό διαστέλλεται και αναγκάζεται να επιταχυνθεί άρα και ο όρος ρV^2 μεγαλώνει.
- Για να παραμείνει το άθροισμα σταθερό η εξίσωση απαιτεί τη μείωση της P. Η τεράστια μείωση της P αποδεικνύει ότι η ΑΔΟ ισχύει. Η P μειώνεται ως τίμημα της αύξησης της κινηματικής ορμής του ρευστού. Το σύστημα πιέζει τον εαυτό του για να σπρώξει το διαστελλόμενο αέριο μέσα από τον ίδιο σωλήνα.

$$P + \rho V^2 = \text{σταθερό}$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (11)

- Η λύση …**Η Ολική πίεση (P_0) δεν είναι ορμή αλλά μέτρο της διαθέσιμης ενέργειας της ροής**…Και στη συγκεκριμένη ροή λειτουργεί ως δείκτης απωλειών ενέργειας…

- Σε μια ροή Rayleigh (μη αντιστρεπτή διαδικασία) η προσφορά θερμότητας αυξάνει την s.
- Αν και η ορμή παραμένει σταθερή η ποιότητα της ενέργειας υποβαθμίζεται.

$$P + \rho V^2 = \text{σταθερό}$$

- Φαίνεται αντιφατικό: Προσθέτουμε θερμότητα (ενέργεια), αλλά η ολική πίεση (ενέργεια ροής) πέφτει.

- Η εξήγηση είναι ότι η ολική πίεση μειώνεται λόγω **θερμικής τριβής (thermal choking tendency)**. Η προσθήκη θερμότητας σε μια ροή που κινείται, λειτουργεί σαν ένα "εικονικό εμπόδιο". Η θερμότητα "σπρώχνει" το ρευστό να φτάσει σε Ma = 1 (ιδανικά).
- Αυτή η βίαιη απαίτηση (όχι αντιστρεπτή) για επιτάχυνση δημιουργεί εσωτερικές απώλειες που καταναλώνουν την ολική πίεση.

- **Overall… !!!**
- **Η Ολική Πίεση μειώνεται:** Γιατί η διαδικασία θέρμανσης αυξάνει την εντροπία. Η αύξηση της κινητικής ενέργειας είναι "πανάκριβη" σε όρους πίεσης: για να κερδίσεις λίγη ταχύτητα, πρέπει να θυσιάσεις πάρα πολλή στατική πίεση.

Φαντάσου το σαν μια συναλλαγή: Η **Ορμή** είναι ο λογιστής που προσέχει να βγαίνει το ταμείο ($P + \rho V^2$). Η **Ολική Πίεση** είναι το πορτοφόλι σου που αδειάζει γιατί η "αγορά" ταχύτητας μέσω θέρμανσης έχει πολύ υψηλό "φόρο" (εντροπία).

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. *(12)*

Επομένως που είναι η διαφορά κατά την εφαρμογή της ΑΔΟ (εξ. Ορμής) και ΑΔΕ

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

Γιατί το ένα άθροισμα αλλάζει και το άλλο όχι;

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν θερμαίνουμε το ρευστό (υποηχητική ροή):

1. Το ρευστό επιταχύνεται ($V \uparrow$).
2. Η **Ροή Ορμής** (ρV^2) αυξάνεται.
3. Η **Κινητική Ενέργεια** ($\frac{1}{2}\rho V^2$) επίσης αυξάνεται.

Η διαφορά: Στην εξίσωση της **Ορμής**, η πτώση της στατικής πίεσης ($P \downarrow$) είναι **ακριβώς ίση** με την αύξηση του ρV^2. Το ταμείο βγαίνει "μηδέν" (διατήρηση).

Στην εξίσωση της **Ενέργειας (Ολική Πίεση)**, η ίδια πτώση της πίεσης ($P \downarrow$) είναι **πολύ μεγαλύτερη** από την αύξηση του $\frac{1}{2}\rho V^2$.

- Γιατί; Επειδή το $1/2$ "φρενάρει" την αύξηση της δυναμικής πίεσης στον τύπο της P_0 .
- Η πίεση P πέφτει "γενναία" για να ικανοποιήσει την ορμή, αλλά η κινητική ενέργεια κερδίζει μόνο τα "μισά" (λόγω του $1/2$).

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (12)

1. Η Εξίσωση Ορμής (Integral Momentum Equation)

Για μια ροή σε σωλήνα σταθερής διατομής A, χωρίς τριβές (όπως ορίζεται η ιδανική ροή Rayleigh), ο νόμος του Νεύτωνα λέει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της ορμής:

$$\sum F = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1$$

Οι δυνάμεις εδώ είναι μόνο οι δυνάμεις πίεσης:

$$P_1A - P_2A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1$$

Διαιρώντας με το A και θυμούμενοι ότι $\dot{m}/A = \rho V$:

$$P_1 - P_2 = \rho_2V_2^2 - \rho_1V_1^2$$

ή αναδιατάσσοντας:

$$P_1 + \rho_1V_1^2 = P_2 + \rho_2V_2^2$$

Αυτή η εξίσωση **ισχύει πάντα** στη ροή Rayleigh. Αν ξέρεις τις συνθήκες στην είσοδο (1) και την ταχύτητα στην έξοδο (2), η παραπάνω εξίσωση θα σου δώσει **ακριβώς** τη στατική πίεση P_2.

2. Γιατί η Ολική Πίεση (P_0) δεν διατηρείται;

Εδώ είναι το κρίσιμο σημείο. Η ολική πίεση P_0 ορίζεται (για συμπιεστή ροή) ως:

$$P_0 = P\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ενώ το άθροισμα $(P + \rho V^2)$ παραμένει σταθερό, οι επιμέρους τιμές των P, ρ, V αλλάζουν λόγω της θέρμανσης και της διαστολής.

- Στην υποηχητική ροή, η V αυξάνεται και η P πέφτει.
- Αν βάλεις τις νέες τιμές P_2 και Ma_2 στον τύπο της ολικής πίεσης, θα βρεις ότι $P_{02} < P_{01}$.

Εφαρμογή της εξίσωσης ορμής για δύο θέσεις πριν και μετά τη θέρμανση σε μια ροή Rayleigh θα ισχύει ΠΑΝΤΑ !!!

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (13)

3. Το "παράδοξο": Ορμή vs Ενέργεια

Η εξίσωση ορμής $P + \rho V^2 = \text{const}$ ονομάζεται μερικές φορές και **Impulse Function** (F).

- Η **Ορμή** διατηρείται γιατί η δύναμη πίεσης που "χάνεται" ($P_1 - P_2$) μετατρέπεται **ακριβώς** σε αύξηση της κινητικής ορμής του ρευστού.
- Η **Ολική Πίεση** μειώνεται γιατί η διαδικασία προσθήκης θερμότητας είναι **εγγενώς μη αντιστρεπτή** για μια ροή που κινείται.

Φαντάσου το εξής: Η εξίσωση ορμής είναι ένας "ισολογισμός δυνάμεων". Οι δυνάμεις ισορροπούν τέλεια. Αλλά η "ικανότητα" του ρευστού να παράγει έργο (που εκφράζεται από την P_0) μειώνεται, γιατί η θερμότητα "ανακατεύει" τα μόρια και αυξάνει την εντροπία, κάνοντας την επιτάχυνση "ενεργειακά ασύμφορη".

Συμπέρασμα

Αν εφαρμόσεις την εξίσωση ορμής $P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$ στην άσκησή σου, θα βρεις τα σωστά αποτελέσματα. **Δεν υπάρχει καμία παραβίαση**. Η μείωση της ολικής πίεσης P_0 είναι απλώς το αποτέλεσμα της αύξησης της εντροπίας και δεν αναιρεί τη διατήρηση της ορμής.

Το πιο κρίσιμο ερώτημα…
Η ολική πίεση τελικά είναι το άθροισμα στατικής και δυναμικής πίεσης ???

και αν είναι…
Η ολική πίεση διατηρείται σε μια ροή Rayleigh???

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (14)

Το πιο κρίσιμο ερώτημα…Η ολική πίεση τελικά είναι το άθροισμα στατικής και δυναμικής πίεσης ?

Η παρεξήγηση συμβαίνει γιατί το **άθροισμα στην Ορμή** και το **άθροισμα στην Ολική Πίεση** δεν είναι το ίδιο πράγμα, παρόλο που μοιάζουν οπτικά.

Ας τα βάλουμε δίπλα-δίπλα:

1. Το άθροισμα της Ορμής (Impulse Function)

Αυτό το άθροισμα **διατηρείται** σταθερό:

$$F = P + \rho V^2 = \text{const}$$

Εδώ ο όρος της ταχύτητας είναι ρV^2. Αυτός ο όρος προκύπτει από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα (μάζα επί επιτάχυνση).

2. Το άθροισμα της Ολικής Πίεσης (Bernoulli-ish)

Αυτό το άθροισμα **ΔΕΝ διατηρείται** στη Rayleigh:

$$P_0 \approx P + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (\text{για χαμηλά Mach})$$

Εδώ ο όρος της ταχύτητας έχει το κλάσμα $1/2$. Αυτό το $1/2$ προέρχεται από την **Κινητική Ενέργεια**.

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (15)

Το πιο κρίσιμο ερώτημα…Η ολική πίεση τελικά είναι το άθροισμα στατικής και δυναμικής πίεσης ?

Ένα αριθμητικό παράδειγμα (για να το "δεις")

Έστω ότι σε μια υποθετική ροή Rayleigh:

- Η στατική πίεση P πέφτει κατά **10 μονάδες**.
- Η ροή ορμής ρV^2 αυξάνεται κατά **10 μονάδες**.
  - **Ορμή:** $-10 + 10 = 0$ (ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ).

Τι γίνεται στην Ολική Πίεση ($P + \frac{1}{2}\rho V^2$);

- Η P πέφτει κατά **10 μονάδες**.
- Η $\frac{1}{2}\rho V^2$ αυξάνεται μόνο κατά **5 μονάδες** (λόγω του $1/2$).
  - **Ολική Πίεση:** $-10 + 5 = -5$ (ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ).

Συμπέρασμα

Το "άθροισμα" που λες δίνει όντως διαφορετικές τιμές, **αλλά μόνο αν μιλάμε για την ολική πίεση (ενέργεια)**. Το άθροισμα που αφορά την ορμή ($P + \rho V^2$) παραμένει το ίδιο.

Η φύση "επιλέγει" να διατηρήσει την ορμή (δυνάμεις) και να "θυσιάσει" την ολική πίεση (διαθέσιμη ενέργεια) λόγω της θερμότητας που προσθέτεις.

Είναι πιο ξεκάθαρο τώρα ότι το $1/2$ στην ενέργεια είναι ο "ένοχος" που κάνει τα δύο αθροίσματα να συμπεριφέρονται διαφορετικά;

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (16)

Μια ίσως καλύτερη ερμηνεία με χρήση 2ου νόμου Newton στην έκφραση της μεταβολής της ορμής (θ.ώθησης – ορμής)?

Ακριβώς! Η ερμηνεία μέσω του **2ου Νόμου του Newton** στην αρχική του μορφή ($F = \frac{dp}{dt}$) είναι ο πιο «τίμιος» επιστημονικά τρόπος για να καταλάβεις τι συμβαίνει, χωρίς να μπερδεύεσαι από τους ορισμούς της ολικής πίεσης.

Ας το δούμε μέσα από τη σχέση **Ώθησης (Impulse) - Ορμής**:

1. Ο Νόμος του Newton στον αγωγό

Ο 2ος Νόμος λέει ότι η συνολική Ώθηση που δέχεται ένα σύστημα ισούται με τη μεταβολή της ορμής του. Για τη ροή Rayleigh σε έναν αγωγό σταθερής διατομής A, έχουμε:

$$\underbrace{(P_1 - P_2) \cdot A}_{\text{Συνολική Δύναμη (Ώθηση)}} = \underbrace{\dot{m}V_2 - \dot{m}V_1}_{\text{Ρυθμός μεταβολής Ορμής}}$$

Αν διαιρέσουμε με το A, η εξίσωση γίνεται:

$$P_1 - P_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

2. Η Φυσική Ερμηνεία (Γιατί η P "πρέπει" να πέσει)

Σκέψου το σαν μια **ζυγαριά**:

- **Δεξί μέρος (ΔΟρμή):** Λόγω της θέρμανσης, το ρευστό διαστέλλεται. Για να περάσει η ίδια μάζα από την ίδια τρύπα, το ρευστό **πρέπει** να βγει πιο γρήγορα ($V_2 > V_1$). Άρα, έχουμε μια **καθαρή αύξηση της ορμής** στο δεξί μέλος της εξίσωσης.
- **Αριστερό μέρος (Δυνάμεις):** Για να προκληθεί αυτή η αύξηση της ορμής, ο Newton απαιτεί μια **δύναμη**. Η μόνη διαθέσιμη δύναμη είναι η διαφορά πίεσης.
- **Το συμπέρασμα:** Η πίεση στην είσοδο (P_1) **πρέπει** να είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην έξοδο (P_2), ώστε η δύναμη $(P_1 - P_2)A$ να "σπρώξει" το ρευστό και να του δώσει την επιπλέον ορμή που απαιτεί η θέρμανση.

➢ **(Το κλειδί από τον Newton για άλλη μια φορά…)**

Παράρτημα – Η Σχέση της Ροής Rayleigh με την P_0. (17)

Μια ίσως καλύτερη ερμηνεία με χρήση 2ου νόμου Newton στην έκφραση της μεταβολής της ορμής (θ.ώθησης – ορμής)?

3. Πού "χάνεται" η Ολική Πίεση (P_0);

Εδώ είναι η λεπτομέρεια που αναζητάς. Η **Ώθηση** (δύναμη επί χρόνο) αφορά μόνο το πώς αλλάζει η ταχύτητα. Η **Ολική Πίεση**, όμως, συνδέεται με το **Έργο** (δύναμη επί απόσταση) και την **Ενέργεια**.

Στη ροή Rayleigh:

1. Η δύναμη πίεσης που καταναλώνεται ($P_1 - P_2$) πηγαίνει **όλη** στο να αυξήσει την ορμή (Newton).
2. Όμως, η ενέργεια που "κερδίζει" το ρευστό ως κίνηση ($\frac{1}{2}\rho V^2$) είναι **μικρότερη** από την ενέργεια που "έχασε" η στατική πίεση.
3. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα μέρος της "προσπάθειας" που κάνει η πίεση για να σπρώξει το ρευστό, "σπαταλιέται" για να υπερνικήσει τη **θερμική αντίσταση**. Η θέρμανση κάνει τα μόρια να κινούνται άτακτα (αύξηση εντροπίας), μειώνοντας την ικανότητα της ροής να μετατρέπει τη στατική πίεση σε ωφέλιμη κινητική ενέργεια.

Σύνοψη με όρους Newton:

- **Διατήρηση Ορμής:** Ισχύει, γιατί η διαφορά πίεσης $P_1 - P_2$ παράγει ακριβώς την απαιτούμενη ώθηση για να επιταχυνθεί το ρευστό.
- **Πτώση P_0:** Συμβαίνει γιατί, ενώ η ορμή ισορροπεί, το ενεργειακό "κόστος" αυτής της επιτάχυνσης μέσω θέρμανσης είναι πολύ μεγάλο. Η στατική πίεση καταρρέει για να ικανοποιήσει τον Newton, αλλά η ολική πίεση (που είναι "λογαριασμός ενέργειας") δείχνει έλλειμμα.

Είναι πράγματι πολύ πιο ξεκάθαρο αν σκεφτείς ότι η **πτώση της πίεσης είναι η "πηγή" της δύναμης** που επιταχύνει το ρευστό. Αν η P δεν έπεφτε, το ρευστό δεν θα είχε "λόγο" (δύναμη) να επιταχυνθεί!

9.2 Σχέση Ροής Rayleigh και P_0. (17)

- **Η ερμηνεία με μαθηματικές εξισώσεις..** μπορεί να γίνει με ανάλυση της **Εξίσωσης Ενέργειας** σε συνδυασμό με το **2ο Θερμοδυναμικό Αξίωμα**.

1. Η Εξίσωση Ενέργειας (1ος Νόμος)

Για ένα ιδανικό αέριο, η προσθήκη θερμότητας q ανά μονάδα μάζας ισούται με τη μεταβολή της ολικής ενθαλπίας:

$$q = \Delta h_0 = c_p(T_{02} - T_{01})$$

Αυτό μας λέει ότι η **ολική θερμοκρασία (T_0) αυξάνεται** πάντα όταν προσθέτουμε θερμότητα.

2. Η σχέση Ολικής Πίεσης και Εντροπίας

Η κρίσιμη μαθηματική σχέση που συνδέει την ολική πίεση (P_0) με την ενέργεια και την εντροπία (s) είναι:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) - R\ln\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)$$

Αν λύσουμε ως προς το λόγο των ολικών πιέσεων:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{-\frac{\Delta s}{R}}$$

3. Η Μαθηματική Ερμηνεία της "Απώλειας"

Στη ροή Rayleigh, η προσθήκη θερμότητας προκαλεί δύο αντίρροπες τάσεις στην ολική πίεση:

1. **Ο όρος $\frac{T_{02}}{T_{01}}$:** Επειδή θερμαίνουμε, αυτός ο όρος είναι > 1, κάτι που τείνει να **αυξήσει** την P_0.
2. **Ο όρος $e^{-\frac{\Delta s}{R}}$:** Επειδή η εντροπία αυξάνεται λόγω της θέρμανσης μιας κινούμενης ροής, αυτός ο όρος είναι < 1, κάτι που τείνει να **μειώσει** δραματικά την P_0.

Το αποτέλεσμα: Στη συμπιεστή ροή, η αύξηση της εντροπίας (Δs) "κερδίζει" πάντα. Η μαθηματική απόδειξη έρχεται από τη σχέση της ολικής πίεσης με τον αριθμό Mach:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M a^2}{2}\frac{dT_0}{T_0}$$

Αυτή η εξίσωση είναι το "κλειδί":

- Αν $dT_0 > 0$ (προσθήκη θερμότητας), τότε **αναγκαστικά** $dP_0 < 0$.
- Όσο μεγαλύτερο είναι το Mach (Ma), τόσο πιο γρήγορα "γκρεμίζεται" η ολική πίεση για την ίδια ποσότητα θερμότητας.