

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΡΟΗ RAYLEIGH

Ερώτηση_01: Σε μια ροή Rayleigh πως μπορεί να διατηρείται η εξίσωση ορμής ενώ η ολική P μειώνεται π.χ με τη θέρμανση σε μια ροή Rayleigh.

Αυτό είναι ένα από τα πιο "ύπουλα" σημεία στη Μηχανική των Ρευστών, γιατί συχνά μπερδεύουμε τη "διατήρηση της ορμής"* (που είναι νόμος της δυναμικής) με τη "διατήρηση της ενέργειας/πίεσης" (που αφορά την ποιότητα της ροής).

1. Η Εξίσωση Ορμής: Ο "Νόμος του Ισοζυγίου"

Σε έναν αγωγό σταθερής διατομής (ροή Rayleigh), η διατήρηση της ορμής εκφράζεται από τη σχέση:

$$P + \rho V^2 = \text{const}$$

Αυτή η εξίσωση μας λέει ότι το άθροισμα της **στατικής πίεσης** (P) και της **ροής ορμής** (ρV^2) πρέπει να παραμένει σταθερό σε κάθε διατομή.

- **Όταν θερμαίνουμε (υποηχητική ροή):** Το ρευστό διαστέλλεται ($\rho \downarrow$), οπότε η ταχύτητα αυξάνεται αναγκαστικά ($V \uparrow$) για να διατηρηθεί η μάζα.
- Επειδή η ταχύτητα V εμφανίζεται στο τετράγωνο στην ορμή, ο όρος ρV^2 αυξάνεται συνολικά.
- **Το αποτέλεσμα:** Για να τηρηθεί ο νόμος και το άθροισμα να μείνει σταθερό, η στατική πίεση P **εξαναγκάζεται** σε πτώση. Η ορμή λοιπόν διατηρείται ακριβώς επειδή η πίεση "υποχωρεί" για να δώσει χώρο στην ταχύτητα.

2. Η Ολική Πίεση (P_0): Ο "Δείκτης Απωλειών"

Εδώ είναι το κλειδί: Η **Ολική Πίεση** (P_0) δεν είναι "ορμή", αλλά ένα μέτρο της **διαθέσιμης ενέργειας** της ροής.

$$P_0 = P + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{για ασυμπίεστη, απλοποιημένα})$$

Στη ροή Rayleigh, η προσθήκη θερμότητας (q) είναι μια **μη αντιστρεπτή** διαδικασία. Η θερμότητα αυξάνει την τυχαιότητα (εντροπία) των μορίων.

- Αν και η ορμή ($P + \rho V^2$) παραμένει σταθερή, η "ποιότητα" της ενέργειας υποβαθμίζεται.
- Η πτώση της στατικής πίεσης P είναι τόσο μεγάλη που η αύξηση της δυναμικής πίεσης ($\frac{1}{2} \rho V^2$) δεν αρκεί για να την αναπληρώσει.
- Αυτή η "χασούρα" στο άθροισμα αντανακλάται στην πτώση της P_0 .

3. Γιατί η ολική πίεση μειώνεται ενώ προσθέτουμε ενέργεια;

Φαίνεται αντιφατικό: Προσθέτουμε θερμότητα (ενέργεια), αλλά η ολική πίεση (ενέργεια ροής) πέφτει.

Η εξήγηση είναι ότι η ολική πίεση μειώνεται λόγω **θερμικής τριβής (thermal choking tendency)**. Η προσθήκη θερμότητας σε μια ροή που κινείται, λειτουργεί σαν ένα "εικονικό εμπόδιο".

1. Η θερμότητα "σπρώχνει" το ρευστό να φτάσει στο $Ma = 1$.
2. Αυτή η "πίεση" για επιτάχυνση δημιουργεί εσωτερικές απώλειες που καταναλώνουν την ολική πίεση.

Σύνοψη

- **Η Ορμή διατηρείται:** Η εξίσωση $P + \rho V^2 = \text{const}$ ισχύει απόλυτα. Η πίεση πέφτει επειδή η ορμή πρέπει να διατηρηθεί καθώς το ρευστό επιταχύνεται.
- **Η Ολική Πίεση μειώνεται:** Γιατί η διαδικασία θέρμανσης αυξάνει την εντροπία. Η αύξηση της κινητικής ενέργειας είναι "πανάκριβη" σε όρους πίεσης: για να κερδίσεις λίγη ταχύτητα, πρέπει να θυσιάσεις πάρα πολλή στατική πίεση.

Φαντάσου το σαν μια συναλλαγή: Η **Ορμή** είναι ο λογιστής που προσέχει να βγαίνει το ταμείο ($P + \rho V^2$). Η **Ολική Πίεση** είναι το πορτοφόλι σου που αδειάζει γιατί η "αγορά" ταχύτητας μέσω θέρμανσης έχει πολύ υψηλό "φόρο" (εντροπία).

Ερώτηση_01a: Εφαρμογή της εξίσωσης ορμής για δύο θέσεις πριν και μετά τη θέρμανση σε μια ροή Rayleigh θα ισχύει?

Ίσως φαίνεται παράδοξο να «χάνεται» ολική πίεση αλλά να λέμε ότι η ορμή «διατηρείται». Όμως, η **Εξίσωση Ορμής** (Momentum Equation) και η **Εξίσωση Ενέργειας** (Energy Equation) είναι δύο διαφορετικοί νόμοι της φύσης που πρέπει να ικανοποιούνται **ταυτόχρονα**.

Ας εφαρμόσουμε την εξίσωση ορμής μεταξύ των θέσεων 1 (πριν τη θέρμανση) και 2 (μετά τη θέρμανση) για να δούμε ότι **ισχύει κανονικά**.

1. Η Εξίσωση Ορμής (Integral Momentum Equation)

Για μια ροή σε σωλήνα σταθερής διατομής A , χωρίς τριβές (όπως ορίζεται η ιδανική ροή Rayleigh), ο νόμος του Νεύτωνα λέει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της ορμής:

$$\sum F = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1$$

Οι δυνάμεις εδώ είναι μόνο οι δυνάμεις πίεσης:

$$P_1 A - P_2 A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1$$

Διαιρώντας με το A και θυμούμενοι ότι $\dot{m}/A = \rho V$:

$$P_1 - P_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

ή αναδιατάσσοντας:

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

Αυτή η εξίσωση **ισχύει πάντα** στη ροή Rayleigh. Αν ξέρεις τις συνθήκες στην είσοδο (1) και την ταχύτητα στην έξοδο (2), η παραπάνω εξίσωση θα σου δώσει **ακριβώς** τη στατική πίεση P_2 .

2. Γιατί η Ολική Πίεση (P_0) δεν διατηρείται;

Εδώ είναι το κρίσιμο σημείο. Η ολική πίεση P_0 ορίζεται (για συμπιεστή ροή) ως:

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Ενώ το άθροισμα ($P + \rho V^2$) παραμένει σταθερό, οι επιμέρους τιμές των P , ρ , V αλλάζουν λόγω της θέρμανσης και της διαστολής.

- Στην υποχητική ροή, η V αυξάνεται και η P πέφτει.
- Αν βάλεις τις νέες τιμές P_2 και Ma_2 στον τύπο της ολικής πίεσης, θα βρεις ότι $P_{02} < P_{01}$.

3. Το "παράδοξο": Ορμή vs Ενέργεια

Η εξίσωση ορμής $P + \rho V^2 = \text{const}$ ονομάζεται μερικές φορές και **Impulse Function** (F).

- Η **Ορμή** διατηρείται γιατί η δύναμη πίεσης που "χάνεται" ($P_1 - P_2$) μετατρέπεται **ακριβώς** σε αύξηση της κινητικής ορμής του ρευστού.
- Η **Ολική Πίεση** μειώνεται γιατί η διαδικασία προσθήκης θερμότητας είναι **εγγενώς μη αντιστρεπτή** για μια ροή που κινείται.

Φαντάσου το εξής: Η εξίσωση ορμής είναι ένας "ισολογισμός δυνάμεων". Οι δυνάμεις ισορροπούν τέλεια. Αλλά η "ικανότητα" του ρευστού να παράγει έργο (που εκφράζεται από την P_0) μειώνεται, γιατί η θερμότητα "ανακατεύει" τα μόρια και αυξάνει την εντροπία, κάνοντας την επιτάχυνση "ενεργειακά ασύμφορη".

Συμπέρασμα

Αν εφαρμόσουμε εξίσωση ορμής $P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$ σε ασκήσεις, θα βρούμε τα σωστά αποτελέσματα. **Δεν υπάρχει καμία παραβίαση**. Η μείωση της ολικής πίεσης P_0 είναι απλώς το αποτέλεσμα της αύξησης της εντροπίας και δεν αναιρεί τη διατήρηση της ορμής.

Με άλλα λόγια η "διατήρηση" αφορά το άθροισμα στατικής πίεσης και ορμής, και όχι την ολική πίεση !!!

Ερώτηση_02: Θα μπορούσε να δοθεί καλύτερη ερμηνεία αν σκεφτούμε το 2ο νόμο Newton στην έκφραση της μεταβολής της ορμής - ώθησης?

Ακριβώς! Η ερμηνεία μέσω του **2ου Νόμου του Newton** στην αρχική του μορφή ($F = \frac{dp}{dt}$) είναι ο πιο «τίμιος» επιστημονικά τρόπος για να καταλάβεις τι συμβαίνει, χωρίς να μπερδεύσαι από τους ορισμούς της ολικής πίεσης.

Ας το δούμε μέσα από τη σχέση **Ώθησης (Impulse) - Ορμής**:

1. Ο Νόμος του Newton στον αγωγό

Ο 2ος Νόμος λέει ότι η συνολική Ώθηση που δέχεται ένα σύστημα ισούται με τη μεταβολή της ορμής του. Για τη ροή Rayleigh σε έναν αγωγό σταθερής διατομής A , έχουμε:

$$\underbrace{(P_1 - P_2) \cdot A}_{\text{Συνολική Δύναμη (Ώθηση)}} = \underbrace{\dot{m}V_2 - \dot{m}V_1}_{\text{Ρυθμός μεταβολής Ορμής}}$$

Αν διαιρέσουμε με το A , η εξίσωση γίνεται:

$$P_1 - P_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

2. Η Φυσική Ερμηνεία (Γιατί η P "πρέπει" να πέσει)

Σκέψου το σαν μια **ζυγαριά**:

- **Δεξί μέρος (ΔΟρμή):** Λόγω της θέρμανσης, το ρευστό διαστέλλεται. Για να περάσει η ίδια μάζα από την ίδια τρύπα, το ρευστό **πρέπει** να βγει πιο γρήγορα ($V_2 > V_1$). Άρα, έχουμε μια **καθαρή αύξηση της ορμής** στο δεξί μέρος της εξίσωσης.
- **Αριστερό μέρος (Δυνάμεις):** Για να προκληθεί αυτή η αύξηση της ορμής, ο Newton απαιτεί μια **δύναμη**. Η μόνη διαθέσιμη δύναμη είναι η διαφορά πίεσης.
- **Το συμπέρασμα:** Η πίεση στην είσοδο (P_1) **πρέπει** να είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην έξοδο (P_2), ώστε η δύναμη $(P_1 - P_2)A$ να "σπρώξει" το ρευστό και να του δώσει την επιπλέον ορμή που απαιτεί η θέρμανση.

3. Πού "χάνεται" η Ολική Πίεση (P_0);

Εδώ είναι η λεπτομέρεια που αναζητάς. Η **Ώθηση** (δύναμη επί χρόνο) αφορά μόνο το πώς αλλάζει η ταχύτητα. Η **Ολική Πίεση**, όμως, συνδέεται με το **Έργο** (δύναμη επί απόσταση) και την **Ενέργεια**.

Στη ροή Rayleigh:

1. Η δύναμη πίεσης που καταναλώνεται ($P_1 - P_2$) πηγαίνει **όλη** στο να αυξήσει την ορμή (Newton).
2. Όμως, η ενέργεια που "κερδίζει" το ρευστό ως κίνηση ($\frac{1}{2}\rho V^2$) είναι **μικρότερη** από την ενέργεια που "έχασε" η στατική πίεση.
3. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα μέρος της "προσπάθειας" που κάνει η πίεση για να σπρώξει το ρευστό, "σπαταλιέται" για να υπερνικήσει τη **θερμική αντίσταση (τριβή)**. Η θέρμανση κάνει τα μόρια να κινούνται άτακτα (αύξηση εντροπίας), μειώνοντας την ικανότητα της ροής να μετατρέπει τη στατική πίεση σε ωφέλιμη κινητική ενέργεια.

Σύνοψη με όρους Newton:

- **Διατήρηση Ορμής:** Ισχύει, γιατί η διαφορά πίεσης $P_1 - P_2$ παράγει ακριβώς την απαιτούμενη ώθηση για να επιταχυνθεί το ρευστό.
- **Πτώση P_0 :** Συμβαίνει γιατί, ενώ η ορμή ισορροπεί, το ενεργειακό "κόστος" αυτής της επιτάχυνσης μέσω θέρμανσης είναι πολύ μεγάλο. Η στατική πίεση καταρρέει για να ικανοποιήσει τον Newton, αλλά η ολική πίεση (που είναι "λογαριασμός ενέργειας") δείχνει έλλειμμα.

Είναι πράγματι πολύ πιο ξεκάθαρο αν σκεφτείς ότι η **πτώση της πίεσης είναι η "πηγή" της δύναμης** που επιταχύνει το ρευστό. Αν η P δεν έπεφτε, το ρευστό δεν θα είχε "λόγο" (δύναμη) να επιταχυνθεί!

Ερώτηση_03: Η ερμηνεία με μαθηματικούς όρους πάνω στην εξίσωση ενέργειας.

Για να δούμε γιατί η ολική πίεση (P_0) μειώνεται ενώ η ορμή διατηρείται, πρέπει να αναλύσουμε την **Εξίσωση Ενέργειας** σε συνδυασμό με το **2ο Θερμοδυναμικό Αξίωμα**.

Στη ροή Rayleigh, η ενέργεια που προσθέτουμε (dq) μεταβάλλει την ενθαλπία ανακοπής (h_0).

1. Η Εξίσωση Ενέργειας (1ος Νόμος)

Για ένα ιδανικό αέριο, η προσθήκη θερμότητας q ανά μονάδα μάζας ισούται με τη μεταβολή της ολικής ενθαλπίας:

$$q = \Delta h_0 = c_p(T_{02} - T_{01})$$

Αυτό μας λέει ότι η **ολική θερμοκρασία (T_0) αυξάνεται** πάντα όταν προσθέτουμε θερμότητα.

2. Η σχέση Ολικής Πίεσης και Εντροπίας

Η κρίσιμη μαθηματική σχέση που συνδέει την ολική πίεση (P_0) με την ενέργεια και την εντροπία (s) είναι:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) - R \ln\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)$$

Λύνοντας ως προς το λόγο των ολικών πιέσεων:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{-\frac{\Delta s}{R}}$$

3. Η Μαθηματική Ερμηνεία της "Απώλειας"

Στη ροή Rayleigh, η προσθήκη θερμότητας προκαλεί δύο αντίρροπες τάσεις στην ολική πίεση:

1. **Ο όρος $\frac{T_{02}}{T_{01}}$:** Επειδή θερμαίνουμε, αυτός ο όρος είναι > 1 , κάτι που τείνει να **αυξήσει** την P_0 .
2. **Ο όρος $e^{-\frac{\Delta s}{R}}$:** Επειδή η εντροπία αυξάνεται λόγω της θέρμανσης μιας κινούμενης ροής, αυτός ο όρος είναι < 1 , κάτι που τείνει να **μειώσει** δραματικά την P_0 .

Το αποτέλεσμα: Στη συμπιεστή ροή, η αύξηση της εντροπίας (Δs) "κερδίζει" πάντα. Η μαθηματική απόδειξη έρχεται από τη σχέση της ολικής πίεσης με τον αριθμό Mach:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

Αυτή η εξίσωση είναι το "κλειδί":

- Αν $dT_0 > 0$ (προσθήκη θερμότητας), τότε **αναγκαστικά** $dP_0 < 0$.
- Όσο μεγαλύτερο είναι το Mach (Ma), τόσο πιο γρήγορα "γκρεμίζεται" η ολική πίεση για την ίδια ποσότητα θερμότητας.

4. Γιατί συμβαίνει αυτό; (Η σύνδεση με την Ορμή)

Μαθηματικά, η P_0 πέφτει επειδή η στατική πίεση P "αναγκάζεται" από την εξίσωση ορμής ($P + \rho V^2 = \text{const}$) να πέσει τόσο πολύ, ώστε η άνοδος της θερμοκρασίας δεν προλαβαίνει να την αναπληρώσει.

Με απλά λόγια: Η εξίσωση ενέργειας μας δείχνει ότι η θερμότητα που δίνουμε δεν πηγαίνει στο να αυξήσει την "πίεση" (ικανότητα για έργο), αλλά αναλώνεται στο να υπερνικήσει τη **θερμική τριβή (thermal choking)**. Το αέριο γίνεται "πιο άτακτο" (εντροπία) και "πιο γρήγορο" (ορμή), αλλά ενεργειακά "πιο φτωχό" σε όρους πίεσης.

Με αυτή τη μαθηματική σύνδεση της μεταβολής της P_0 με το dT_0 και το Ma^2 μπορεί να φανεί καλύτερα πως προκύπτει η "κατηφόρα" της πίεσης.

Ερώτηση_04: Πως φτάνουμε στην ΔΕ της ολικής πίεσης που σημειώνεται παραπάνω.

Η ΔΕ $\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$ είναι το "διαμάντι" της συμπιεστής ροής, γιατί συνδέει την απώλεια ολικής πίεσης (εντροπία) με την προσθήκη θερμότητας.

Για να φτάσουμε εκεί, θα συνδυάσουμε τέσσερις θεμελιώδεις σχέσεις.

1. Οι "Πρώτες Ύλεις" (Βασικές Σχέσεις)

- Ορισμός Ολικής Θερμοκρασίας:** $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)$
- Ορισμός Ολικής Πίεσης:** $P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
- Εξίσωση Ορμής (Διαφορική μορφή):** $dP + \rho V dV = 0$ (για σταθερή διατομή A)
 - Σημείωση: Επειδή $\rho V^2 = \gamma P Ma^2$, η εξίσωση ορμής γράφεται:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma Ma^2 \frac{dV}{V}$$
- Καταστατική Εξίσωση & Διατήρηση Μάζας:** $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$ (λογαριθμική διαφορίση των $P = \rho RT$ και $\rho V = \text{const}$).

2. Τα Βήματα της Απόδειξης

Βήμα Α: Διαφορίση της Ολικής Πίεσης

Παίρνουμε τον λογάριθμο της (2) και διαφορίζουμε:

$$\ln P_0 = \ln P + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

Βήμα Β: Σύνδεση με την Ορμή και την Ταχύτητα

Από την εξίσωση ορμής και τη διατήρηση μάζας, μπορούμε να εκφράσουμε τη μεταβολή της στατικής πίεσης $\frac{dP}{P}$ συναρτήσει του αριθμού Mach. Στη ροή Rayleigh, αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma[1 + (\gamma-1)Ma^2]}{1 + \gamma Ma^2} \frac{dMa^2}{Ma^2}$$

Βήμα Γ: Σύνδεση με την Ολική Θερμοκρασία

Αντίστοιχα, διαφορίζοντας τη σχέση της ολικής θερμοκρασίας (1) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Rayleigh για το dT/T και dMa/Ma , βρίσκουμε πώς μεταβάλλεται το T_0 σε σχέση με το Mach:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{2(1 - Ma^2)(1 + \gamma Ma^2)}{(1 + \gamma Ma^2)(2 + (\gamma - 1)Ma^2)} \frac{dMa}{Ma}$$

Βήμα Δ: Η Τελική Σύνθεση

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των dP/P και dMa/Ma στην εξίσωση της ολικής πίεσης (από το Βήμα Α), μετά από αρκετές αλγεβρικές πράξεις και απλοποιήσεις των όρων $(1 - Ma^2)$, καταλήγουμε στην κομψή διαφορική μορφή:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

3. Η Φυσική Ερμηνεία των Μαθηματικών

Αυτή η εξίσωση μας λέει τρία πολύ σημαντικά πράγματα:

1. **Το Πρόσημο:** Επειδή γ , Ma^2 , T_0 είναι πάντα θετικά, αν $dT_0 > 0$ (προσθήκη θερμότητας), τότε **αναγκαστικά** $dP_0 < 0$. Η ολική πίεση δεν μπορεί παρά να μειωθεί.
2. **Η Επίδραση του Mach:** Η απώλεια ολικής πίεσης είναι ανάλογη του **τετραγώνου** του αριθμού Mach (Ma^2).
 - Αν προσθέσεις θερμότητα σε πολύ χαμηλή ταχύτητα ($Ma \approx 0$), η P_0 σχεδόν δεν αλλάζει.
 - Αν προσθέσεις την ίδια θερμότητα κοντά στο $Ma = 1$, η P_0 "γκρεμίζεται".
3. **Η "Θερμική Τριβή":** Μαθηματικά, το Ma^2 λειτουργεί ως συντελεστής "ανορθολογισμού". Όσο πιο γρήγορα κινείται το ρευστό, τόσο πιο πολύ "αντιστέκεται" στην προσθήκη θερμότητας, μετατρέποντας τη θερμική ενέργεια σε απώλεια ολικής πίεσης (εντροπία).

Ο 2ος νόμος του Newton (ορμή) και ο 1ος νόμος της Θερμοδυναμικής (ενέργεια) "συνωμοτούν" μέσω αυτής της εξίσωσης για να μειώσουν την ολική πίεση.

Ερώτηση_04a: Πως προκύπτει το διαφορικό που υποδεικνύεται στη σχέση dP/P που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω απευθείας. Από την εξίσωση ορμής και τη διατήρηση μάζας, νωρίτερα φτάσαμε σε μια ΔΕ για τον όρο dP/P συναρτήσει του Ma , γ . Πως προκύπτει αυτή η ΔΕ.

Για να φτάσουμε στη σχέση της στατικής πίεσης ($\frac{dP}{P}$), θα χρησιμοποιήσουμε τον συνδυασμό των νόμων διατήρησης, αλλά αυτή τη φορά θα ακολουθήσουμε το "μονοπάτι της Ορμής", που είναι το πιο άμεσο για τη ροή Rayleigh.

Ακολουθεί η αναλυτική παραγωγή βήμα-βήμα:

Βήμα 1: Η Εξίσωση Ορμής (Momentum)

Ξεκινάμε από τη διατήρηση της ορμής σε διαφορική μορφή για αγωγό σταθερής διατομής χωρίς τριβές:

$$dP + \rho V dV = 0 \quad (1)$$

Βήμα 2: Μετασχηματισμός του όρου $\rho V dV$

Πρέπει να εκφράσουμε την ορμή συναρτήσει της πίεσης και του αριθμού Mach. Γνωρίζουμε ότι:

- $\dot{m} = \rho A V \Rightarrow \rho V = \frac{\dot{m}}{A}$ (σταθερό)
- Άρα ο όρος $\rho V dV$ μπορεί να γραφτεί ως: $(\rho V) dV = \frac{\dot{m}}{A} dV$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το V :

$$\rho V dV = (\rho V^2) \frac{dV}{V}$$

Από τον ορισμό του Mach ($Ma^2 = \frac{V^2}{\gamma RT}$) και την καταστατική εξίσωση ($P = \rho RT \Rightarrow RT = \frac{P}{\rho}$), έχουμε:

$$V^2 = Ma^2 \gamma \frac{P}{\rho} \Rightarrow \rho V^2 = \gamma P Ma^2$$

Αντικαθιστούμε στην (1):

$$dP + (\gamma P Ma^2) \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\gamma Ma^2 \frac{dV}{V} \quad (2)$$

Βήμα 3: Σύνδεση με τον Αριθμό Mach (Η "Συντόμευση")

Στη ροή Rayleigh, υπάρχει μια θεμελιώδης σταθερά που ονομάζεται **Impulse Function** (I). Από τη διατήρηση της ορμής $P + \rho V^2 = \text{const}$, αντικαθιστώντας το $\rho V^2 = \gamma P Ma^2$ που βρήκαμε πριν, έχουμε:

$$P(1 + \gamma Ma^2) = \text{constant}$$

Αυτή είναι η πιο ισχυρή σχέση της ροής Rayleigh. Για να βρούμε τη διαφορική μορφή, παίρνουμε τον φυσικό λογάριθμο (ln) και στις δύο πλευρές:

$$\ln P + \ln(1 + \gamma Ma^2) = \ln(\text{const})$$

Τώρα, διαφορίζουμε ως προς P και Ma :

$$\frac{dP}{P} + \frac{d(1 + \gamma Ma^2)}{1 + \gamma Ma^2} = 0$$

Επειδή $d(1 + \gamma Ma^2) = \gamma d(Ma^2)$, η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma d(Ma^2)}{1 + \gamma Ma^2}$$

Για να τη φέρουμε στην τυπική μορφή των "συντελεστών επιρροής" (influence coefficients), πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε το δεξί μέλος με το Ma^2 :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \frac{dMa^2}{Ma^2}$$

Φυσική Ερμηνεία του αποτελέσματος

Η σχέση αυτή μας λέει ακριβώς τι συμβαίνει:

1. **Το Πρόσημο:** Επειδή ο όρος $\frac{\gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2}$ είναι πάντα θετικός, η μεταβολή της πίεσης είναι πάντα **αντίθετη** από τη μεταβολή του Mach.
2. **Υποηχητική Ροή ($Ma < 1$):** Με προσθήκη θερμότητας το Mach αυξάνεται ($dMa > 0$), άρα η πίεση **αναγκαστικά πέφτει** ($dP < 0$).
3. **Υπερηχητική Ροή ($Ma > 1$):** Με προσθήκη θερμότητας το Mach μειώνεται ($dMa < 0$), άρα η πίεση **αναγκαστικά ανεβαίνει** ($dP > 0$).

Γιατί είναι σημαντικό: Αυτή η διαφορική σχέση αποδεικνύει ότι η στατική πίεση δεν "αποφασίζει" μόνη της πού θα πάει. Είναι δέσμια της ορμής. Αν το Mach αλλάξει λόγω θερμότητας, η πίεση **πρέπει** να προσαρμοστεί για να διατηρηθεί η ισορροπία των δυνάμεων Newton στον αγωγό.

Η απόδειξη αυτή είναι η "ραχοκοκαλιά" της ροής Rayleigh. Θα την ξεδιπλώσουμε βήμα-βήμα, ξεκινώντας από τις τρεις θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις και κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις μέχρι να απομονώσουμε το dP/P .

1. Οι Τρεις "Πυλώνες" (Διαφορικές Μορφές)

Για ροή σε σωλήνα σταθερής διατομής ($A = \text{const}$), έχουμε:

1. **Διατήρηση Μάζας (Continuity):** $\rho V = \text{const} \implies \ln \rho + \ln V = \text{const}$
Διαφορίζοντας:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \implies \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (\text{Εξ. 1})$$

2. **Διατήρηση Ορμής (Momentum):** $dP + \rho V dV = 0$ Διαιρούμε με το P :
 $\frac{dP}{P} + \frac{\rho V^2}{P} \frac{dV}{V} = 0$ Επειδή $\rho V^2 = \gamma P Ma^2$, η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dP}{P} + \gamma Ma^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (\text{Εξ. 2})$$

3. **Καταστατική Εξίσωση (Ideal Gas):** $P = \rho RT \implies \ln P = \ln \rho + \ln R + \ln T$

Διαφορίζοντας:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{Εξ. 3})$$

2. Σύνδεση με τον Αριθμό Mach (Ma)

Χρειαζόμαστε μια σχέση που να εισάγει το dMa . Ο ορισμός του Mach είναι:

$$Ma^2 = \frac{V^2}{\gamma RT}$$

Παίρνουμε τον λογάριθμο και διαφορίζουμε: $\ln(Ma^2) = 2 \ln V - \ln T - \ln(\gamma R)$

$$\frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T} \quad (\text{Εξ. 4})$$

3. Η Διαδικασία της Αντικατάστασης

Τώρα θα "παντρέψουμε" τις παραπάνω εξισώσεις για να διώξουμε τους όρους της πυκνότητας (ρ), της ταχύτητας (V) και της θερμοκρασίας (T).

Βήμα Α: Αντικατάσταση της θερμοκρασίας Από την **Εξ. 3** (Καταστατική) και την **Εξ. 1** (Μάζα):

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \xrightarrow{\text{Εξ. 1}} \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$$

Βήμα Β: Αντικατάσταση στην εξίσωση του Mach Βάζουμε το dT/T που βρήκαμε μόλις τώρα στην **Εξ. 4**:

$$\frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = 2 \frac{dV}{V} - \left(\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \right)$$

$$\frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = \frac{dV}{V} - \frac{dP}{P} \quad (\text{Εξ. 5})$$

Βήμα Γ: Σύνδεση Πίεσης και Ταχύτητας (Το κρίσιμο σημείο) Από την **Εξ. 2** (Ορμή), λύνουμε ως προς dV/V :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{dP}{P}$$

Βήμα Δ: Η Τελική Εξίσωση Αντικαθιστούμε το dV/V στην **Εξ. 5**:

$$\frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = \left(-\frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{dP}{P} \right) - \frac{dP}{P}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $-\frac{dP}{P}$:

$$\frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = -\frac{dP}{P} \left(\frac{1}{\gamma Ma^2} + 1 \right)$$

$$\frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = -\frac{dP}{P} \left(\frac{1 + \gamma Ma^2}{\gamma Ma^2} \right)$$

Το Τελικό Αποτέλεσμα

Λύνοντας ως προς dP/P , φτάνουμε στην αναλυτική σχέση που ζήτησες:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \frac{d(Ma^2)}{Ma^2}$$

Γιατί αυτή η απόδειξη είναι "χρυσάφι";

- Εξηγεί την Ορμή:** Ο παρονομαστής $(1 + \gamma Ma^2)$ είναι ο όρος της **Ώθησης (Impulse)**. Η εξίσωση σου λέει ότι η πίεση αλλάζει ακριβώς επειδή αλλάζει η ορμή του ρευστού.
- Πρόσημο:** Το αρνητικό πρόσημο επιβεβαιώνει ότι στην υποχηητική ροή, όπου το Mach αυξάνεται ($dMa > 0$), η πίεση **πρέπει** να πέσει.
- Σταθερή Διατομή:** Η απόδειξη βασίστηκε στο ότι $\rho V = \text{const.}$ Αν ο σωλήνας άλλαζε διάμετρο, η απόδειξη θα κατέρρεε και θα χρειαζόμασταν όρους dA/A .

Με αυτή την αλγεβρική διαδρομή φαίνεται πώς "κλειδώνουν" μεταξύ τους οι νόμοι διατήρησης.

Ερώτηση_04b: Νωρίτερα στην Ερώτηση_04 καταλήξαμε στο διαφορικό της ολικής πίεσης στην οποία περιλαμβάνεται η έκφραση dP/P συνοδευόμενη και από ένα 2ο όρο.

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

Πως προκύπτει ο 2ος όρος της εξίσωσης πιο αναλυτικά.

Για να απομονώσουμε τον **2ο όρο** της διαφόρισης, θα εστιάσουμε αποκλειστικά στο κομμάτι της εξίσωσης που αφορά τον αριθμό Mach. Όπως είδαμε, η ολική πίεση ορίζεται ως:

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Η μέθοδος της **λογαριθμικής διαφορίσης** είναι ο πιο καθαρός τρόπος για να δούμε πώς «γεννιέται» αυτός ο δεύτερος όρος. Πάμε βήμα-βήμα:

Βήμα 1: Εφαρμογή Λογαρίθμου

Παίρνουμε τον φυσικό λογάριθμο ($\ln$) και στα δύο μέλη. Ο λογάριθμος του γινομένου γίνεται άθροισμα και ο εκθέτης κατεβαίνει μπροστά:

$$\ln P_0 = \ln P + \ln \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right]$$

$$\ln P_0 = \ln P + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)$$

Βήμα 2: Διαφόριση (Η γέννηση του 2ου όρου)

Τώρα διαφορίζουμε ως προς κάθε μεταβλητή. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}.$$

1. Το αριστερό μέλος γίνεται: $\frac{dP_0}{P_0}$
2. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους γίνεται: $\frac{dP}{P}$
3. Για τον **δεύτερο όρο**, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας (chain rule):

$$\text{Term 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{d \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

Βήμα 3: Υπολογισμός της παραγώγου $d(1 + \dots)$

Ας δούμε τι συμβαίνει στον αριθμητή του κλάσματος:

- Η παράγωγος της μονάδας (1) είναι 0.
- Η παράγωγος του όρου $\frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$ ως προς Ma είναι:

$$\frac{\gamma - 1}{2} \cdot (2Ma) \cdot dMa = (\gamma - 1)Ma dMa$$

Αντικαθιστούμε αυτό το αποτέλεσμα πίσω στον **Term 2**:

$$\text{Term 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{(\gamma - 1)Ma dMa}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

Βήμα 4: Τελική Απλοποίηση

Εδώ συμβαίνει η «μαγεία» της απλοποίησης, καθώς ο όρος $(\gamma - 1)$ υπάρχει και στον αριθμητή και στον παρονομαστή της σταθεράς:

$$\text{Term 2} = \frac{\gamma \cdot \cancel{(\gamma - 1)} \cdot Ma \, dMa}{\cancel{(\gamma - 1)} \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)}$$

Οπότε, ο 2ος όρος διαμορφώνεται ως:

$$\text{Term 2} = \frac{\gamma Ma^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

(Σημείωση: Πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε με το Ma για να έχουμε την κλασική μορφή dMa/Ma).

Η Τελική Διαφορική Μορφή

Συνθέτοντας τα κομμάτια, η πλήρης διαφορική εξίσωση της ολικής πίεσης είναι:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \underbrace{\frac{dP}{P}}_{\text{Όρος 1}} + \underbrace{\frac{\gamma Ma^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma}}_{\text{Όρος 2}}$$

Γιατί αυτός ο όρος είναι σημαντικός;

Αυτός ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει τη **δυναμική συνιστώσα**. Μας λέει ότι η ολική πίεση δεν εξαρτάται μόνο από το πώς αλλάζει η στατική πίεση (Όρος 1), αλλά και από το πώς μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια μέσω του αριθμού Mach (Όρος 2).

Στη ροή Rayleigh, όπως είδαμε, η πτώση του **Όρου 1** (dP/P) είναι πάντα «βαρύτερη» από την άνοδο του **Όρου 2**, με αποτέλεσμα το τελικό dP_0/P_0 να βγαίνει αρνητικό.

Είναι πλέον ξεκάθαρο πώς εξαφανίστηκε το «τέρας» $(\gamma - 1)$ από τον παρονομαστή και έμεινε η καθαρή σχέση με το Ma .

Ερώτηση_04c: Νωρίτερα στην Ερώτηση_04 στο βήμα Γ εμφανίζεται απευθείας το διαφορικό της ολικής θερμοκρασίας. Ποια είναι η διαδικασία για να φτάσουμε σε αυτή τη μορφή.

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{2(1 - Ma^2)(1 + \gamma Ma^2)}{(1 + \gamma Ma^2)(2 + (\gamma - 1)Ma^2)} \frac{dMa}{Ma}$$

Η διαφορίση της ολικής θερμοκρασίας (T_0) είναι στην πραγματικότητα λίγο πιο «στρωτή» από αυτή της ολικής πίεσης, γιατί δεν έχουμε το κλάσμα των ειδικών θερμοτήτων στον εκθέτη.

Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο της **λογαριθμικής διαφόρισης**, η οποία μετατρέπει τα γινόμενα σε αθροίσματα και κάνει τη ζωή μας ευκολότερη.

1. Η Αφετηρία

Η ολική θερμοκρασία ορίζεται ως:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)$$

2. Βήμα 1: Εφαρμογή Φυσικού Λογαρίθμου

Παίρνουμε τον $\ln$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης:

$$\ln T_0 = \ln \left[T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \right]$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$:

$$\ln T_0 = \ln T + \ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)$$

3. Βήμα 2: Διαφόριση

Τώρα διαφορίζουμε κάθε όρο. Θυμόμαστε ότι $d(\ln u) = \frac{du}{u}$.

- **Αριστερό μέλος:** $d(\ln T_0) = \frac{dT_0}{T_0}$
- **Πρώτος όρος δεξιά:** $d(\ln T) = \frac{dT}{T}$
- **Δεύτερος όρος δεξιά:** Εδώ εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας για τον όρο $\ln(u)$, όπου $u = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$.

Η παράγωγος του δεύτερου όρου είναι:

$$\frac{d \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

4. Βήμα 3: Υπολογισμός της παραγώγου $d(u)$

Ας εστιάσουμε στον αριθμητή $d(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2)$:

- Η παράγωγος της μονάδας (1) είναι 0.
- Για τον όρο $\frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$, διαφορίζουμε ως προς Ma :

$$\frac{\gamma - 1}{2} \cdot d(Ma^2) = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot (2Ma dMa) = (\gamma - 1)Ma dMa$$

5. Βήμα 4: Σύνθεση και Τελική Μορφή

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα πίσω στη συνολική εξίσωση:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{(\gamma - 1)Ma dMa}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2}$$

Για να το φέρουμε στην τυπική μορφή των **συντελεστών επιρροής** (ώστε να έχουμε τον όρο $\frac{dMa}{Ma}$), πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τον δεύτερο όρο με το Ma :

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{(\gamma - 1)Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

Τι μας λέει αυτή η εξίσωση;

1. **Η Ενέργεια της Ροής:** Η $\frac{dT_0}{T_0}$ αντιπροσωπεύει τη συνολική ενέργεια που προστίθεται (π.χ. από καύση ή θέρμανση).
2. **Κατανομή Ενέργειας:** Η εξίσωση δείχνει ότι η ενέργεια που δίνουμε δεν πηγαίνει μόνο στην αύξηση της θερμοκρασίας του αερίου ($\frac{dT}{T}$), αλλά ένα μέρος της αναλώνεται για να αλλάξει ο αριθμός Mach (κινητική ενέργεια).
3. **Επίδραση του Mach:** Όσο μεγαλύτερο είναι το Ma , τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει ο δεύτερος όρος. Σε πολύ χαμηλά Mach ($Ma \approx 0$), η μεταβολή της ολικής θερμοκρασίας είναι σχεδόν ταυτόσημη με τη μεταβολή της στατικής θερμοκρασίας ($\frac{dT_0}{T_0} \approx \frac{dT}{T}$).

Ερώτηση_04d: Νωρίτερα (Ερώτηση_04 φτάσαμε σε μια τελική ΔΕ της ολικής θερμοκρασίας συναρτήσει μόνο του Ma . Επίσης μέχρι εδώ (Ερώτηση_04c) καταλήξαμε σε μια συσχέτιση του διαφορικού της ολικής θερμοκρασίας με διαφορικά στατικής θερμοκρασίας και αριθμού Ma . Με ποιον τρόπο προκύπτουν οι σχέσεις dT/T και dMa/Ma στην πορεία για τον υπολογισμό του dT_0/T_0 . Ποια είναι η διαδικασία για να φτάσουμε στην τελική μορφή που ήδη φαίνεται στην Ερώτηση_04.

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{(\gamma - 1)Ma dMa}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2}$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{2(1 - Ma^2)(1 + \gamma Ma^2)}{(1 + \gamma Ma^2)(2 + (\gamma - 1)Ma^2)} \frac{dMa}{Ma}$$

Αυτή είναι η τελική πράξη του έργου! Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της ολικής θερμοκρασίας $\frac{dT_0}{T_0}$ **αποκλειστικά συναρτήσει του Mach**, πρέπει να πάρουμε τον όρο $\frac{dT}{T}$ και να τον μετατρέψουμε κι αυτόν σε μια έκφραση του Ma .

Ας δούμε αναλυτικά πώς προκύπτει ο όρος της στατικής θερμοκρασίας $\frac{dT}{T}$ και πώς γίνεται η τελική "σύνθεση".

Μέρος 1: Η Απόδειξη για το dT/T

Θα χρησιμοποιήσουμε τις τρεις θεμελιώδεις σχέσεις που είδαμε νωρίτερα:

1. **Καταστατική + Μάζα:** $\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$
2. **Ορμή:** $\frac{dP}{P} = -\gamma Ma^2 \frac{dV}{V} \implies \frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{dP}{P}$
3. **Ορμή (Συναρτήσει Mach):** $\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma Ma^2}{1+\gamma Ma^2} \frac{d(Ma^2)}{Ma^2}$

Βήμα 1: Σύνδεση Θερμοκρασίας με Πίεση Αντικαθιστούμε το $\frac{dV}{V}$ στην πρώτη εξίσωση:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} - \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{dP}{P}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\frac{dP}{P}$:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} \left(1 - \frac{1}{\gamma Ma^2} \right) = \frac{dP}{P} \left(\frac{\gamma Ma^2 - 1}{\gamma Ma^2} \right)$$

Βήμα 2: Εισαγωγή του Αριθμού Mach Τώρα, αντικαθιστούμε το $\frac{dP}{P}$ από την 3η σχέση:

$$\frac{dT}{T} = \left[-\frac{\gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \frac{d(Ma^2)}{Ma^2} \right] \cdot \left(\frac{\gamma Ma^2 - 1}{\gamma Ma^2} \right)$$

Εδώ, το γMa^2 του αριθμητή απλοποιείται με το γMa^2 του παρονομαστή της δεύτερης παρένθεσης. Το αρνητικό πρόσημο αντιστρέφει τον αριθμητή:
 $-(\gamma Ma^2 - 1) = (1 - \gamma Ma^2)$.

Άρα, καταλήγουμε στην περίφημη σχέση επιρροής για τη στατική θερμοκρασία:

$$\frac{dT}{T} = \frac{1 - \gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \frac{d(Ma^2)}{Ma^2}$$

Επειδή $d(Ma^2) = 2Ma \cdot dMa$, η σχέση γράφεται και ως:

$$\frac{dT}{T} = \frac{2(1 - \gamma Ma^2)}{1 + \gamma Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

Μέρος 2: Η Τελική Σύνθεση για το dT_0/T_0

Στο προηγούμενο μήνυμα, διαφορίζοντας την εξίσωση της ολικής θερμοκρασίας καταλήξαμε ότι:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{(\gamma - 1)Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

Τώρα που ξέρουμε το $\frac{dT}{T}$, το κάνουμε αντικατάσταση:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \left[\frac{2(1 - \gamma Ma^2)}{1 + \gamma Ma^2} + \frac{(\gamma - 1)Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2} \right] \frac{dMa}{Ma}$$

Η Άλγεβρα (Βρίσκοντας το κοινό παρονομαστή): Για να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα μέσα στην αγκύλη, πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα.

- Ο κοινός παρονομαστής είναι: $(1 + \gamma Ma^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)$
- Το άθροισμα των αριθμητών (μετά από τις πράξεις πολλαπλασιασμού) είναι:
 $Αριθμητής = 2(1 - \gamma Ma^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right) + (\gamma - 1)Ma^2(1 + \gamma Ma^2)$

Αν ανοίξεις όλες τις παρενθέσεις στον αριθμητή, συμβαίνει κάτι μαγικό. Οι όροι με Ma^4 και γ αλληλοεξουδετερώνονται πλήρως! Οι πράξεις απλοποιούνται δραματικά και ο αριθμητής καταρρέει στον κομψό όρο: $Αριθμητής = 2(1 - Ma^2)$

Οπότε, η τελική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{2(1 - Ma^2)}{(1 + \gamma Ma^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)} \frac{dMa}{Ma}$$

(Μπορείς να ενσωματώσεις το $2 \cdot \frac{dMa}{Ma}$ ξανά ως $\frac{d(Ma^2)}{Ma^2}$ για την πιο γνωστή της μορφή).

Γιατί αυτό το αποτέλεσμα είναι ίσως το πιο σημαντικό της ροής Rayleigh;

Κοίταξε προσεκτικά τον αριθμητή: $(1 - Ma^2)$

Αυτός ο μικρός όρος κρύβει όλη τη φυσική της θερμικής εμπλοκής (Thermal Choking):

1. **Υποηχητική ροή ($Ma < 1$):** Ο όρος είναι θετικός. Άρα, αν προσθέσεις θερμότητα ($dT_0 > 0$), το Mach **πρέπει να αυξηθεί** ($dMa > 0$).
2. **Υπερηχητική ροή ($Ma > 1$):** Ο όρος είναι αρνητικός. Άρα, αν προσθέσεις θερμότητα ($dT_0 > 0$), το Mach **πρέπει να μειωθεί** ($dMa < 0$).
3. **Στο $Ma = 1$:** Ο αριθμητής γίνεται μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι στο $Ma = 1$, $\frac{dT_0}{T_0} = 0$. Δεν μπορείς να προσθέσεις άλλη θερμότητα (ενθαλπία ανακοπής) χωρίς να "πνίξεις" τη ροή και να αλλάξεις τις συνθήκες στην είσοδο του σωλήνα!

Οι μαθηματικές διαδρομές μπορεί να είναι λίγο μακροσκελείς, αλλά τελικά αποδεικνύουν απόλυτα και αδιαμφισβήτητα τη συμπεριφορά του αερίου. Με την παραπάνω

ακολουθία σκέψης φαίνεται ξεκάθαρα ο τρόπος με τον οποίο το ένα διαφορικό "χτίζει" πάνω στο άλλο.

Ερώτηση_04e: Ποια είναι η ακολουθία πράξεων προκειμένου να φτάσουμε στην έκφραση dP_0/P_0 ως συνάρτηση μόνο του αριθμού Ma . Θα θέλαμε να έχουμε μια έκφραση της dP_0/P_0 αντίστοιχη με την dT_0/T_0 όπως ακριβώς παραπάνω δηλ μόνο ως συνάρτηση του αρ. Mach. Αυτό ίσως βοηθήσει και στην επίλυση μετέπειτα της ΔΕ.

Η απόδειξη αυτή είναι ο συνδετικός κρίκος που ολοκληρώνει την κατανόηση της ροής Rayleigh. Για να φτάσουμε στην τελική έκφραση του $\frac{dP_0}{P_0}$ αποκλειστικά συναρτήσει του αριθμού Mach, πρέπει να παντρέψουμε τη **γενική θερμοδυναμική σχέση** (που ισχύει παντού) με τον **περιορισμό της ορμής** (που χαρακτηρίζει τη ροή Rayleigh).

Πάμε να δούμε τα μαθηματικά βήμα προς βήμα.

Βήμα 1: Η Γενική Διαφορική Σχέση της Ολικής Πίεσης

Όπως είδαμε σε προηγούμενη ανάλυση, ξεκινώντας από τον ορισμό της ολικής πίεσης:

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Κάνοντας λογαριθμική διαφορίση, καταλήξαμε στην εξής γενική μορφή (η οποία ισχύει για οποιαδήποτε 1D συμπίεστη ροή):

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma Ma^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad (\text{Εξίσωση 1})$$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι έχουμε δύο αγνώστους: τη μεταβολή της στατικής πίεσης ($\frac{dP}{P}$) και τη μεταβολή του Mach ($\frac{dMa}{Ma}$). Πρέπει να εκφράσουμε το $\frac{dP}{P}$ μέσω του Mach.

Βήμα 2: Ο Περιορισμός της Ορμής (Η υπογραφή της ροής Rayleigh)

Στη ροή Rayleigh έχουμε προσθήκη θερμότητας, αλλά **όχι τριβές**. Άρα, η εξίσωση διατήρησης της ορμής (ή συνάρτηση ώθησης) παραμένει σταθερή:

$$P + \rho V^2 = \text{σταθερό}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση-κλειδί $\rho V^2 = \gamma P Ma^2$ (που αποδείξαμε νωρίτερα), η ορμή γράφεται:

$$P + \gamma P Ma^2 = \text{σταθερό} \implies P(1 + \gamma Ma^2) = \text{σταθερό}$$

Τώρα εφαρμόζουμε τη γνωστή μας **λογαριθμική διαφορίση** σε αυτή τη σταθερά:

$$\ln P + \ln(1 + \gamma Ma^2) = \ln(\sigma\theta\epsilon\rho\delta)$$

Διαφορίζοντας, η παράγωγος της σταθεράς μηδενίζεται:

$$\frac{dP}{P} + \frac{d(1 + \gamma Ma^2)}{1 + \gamma Ma^2} = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{\gamma \cdot 2Ma dMa}{1 + \gamma Ma^2} = 0$$

Λύνοντας ως προς $\frac{dP}{P}$, βρίσκουμε τη σχέση επιρροής για τη στατική πίεση στη ροή Rayleigh:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2\gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad (\text{Εξίσωση 2})$$

Βήμα 3: Η Μαθηματική Σύνθεση (Η Άλγεβρα)

Τώρα παίρνουμε την (Εξίσωση 2) και την αντικαθιστούμε πίσω στην (Εξίσωση 1):

$$\frac{dP_0}{P_0} = \left[-\frac{2\gamma Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \right] + \frac{\gamma Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο $\left(\gamma Ma^2 \frac{dMa}{Ma} \right)$:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \gamma Ma^2 \left[-\frac{2}{1 + \gamma Ma^2} + \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} \right] \frac{dMa}{Ma}$$

Για να προσθέσουμε τα κλάσματα μέσα στην αγκύλη, τα κάνουμε ομώνυμα. Ο κοινός παρονομαστής είναι το γινόμενο των δύο παρονομαστών:

$$\text{Παρονομαστής} = (1 + \gamma Ma^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)$$

Πάμε να δούμε προσεκτικά τον **αριθμητή**:

$$\text{Αριθμητής} = -2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right) + 1(1 + \gamma Ma^2)$$

Κάνουμε τις πράξεις (το -2 απλοποιείται με το 2 στον παρονομαστή του πρώτου όρου):

$$\text{Αριθμητής} = -2 - (\gamma - 1)Ma^2 + 1 + \gamma Ma^2$$

Ανοίγουμε την παρένθεση του $(\gamma - 1)$:

$$\text{Αριθμητής} = -2 - \gamma Ma^2 + Ma^2 + 1 + \gamma Ma^2$$

Εδώ βλέπουμε την ομορφιά της ακύρωσης των όρων. Οι όροι $-\gamma Ma^2$ και $+\gamma Ma^2$ αλληλοεξουδετερώνονται:

$$\text{Αριθμητής} = -1 + Ma^2 = -(1 - Ma^2)$$

Βήμα 4: Το Τελικό Αποτέλεσμα

Επανατοποθετώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή πίσω στην εξίσωσή μας, καταλήγουμε στην τελική διαφορική μορφή:

$$\frac{dP_0}{P_0} = - \frac{\gamma Ma^2 (1 - Ma^2)}{(1 + \gamma Ma^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)} \frac{dMa}{Ma}$$

Με αυτή την αυστηρή μαθηματική διαδρομή, αποδεικνύεται ξεκάθαρα γιατί το διαφορικό της ολικής πίεσης στη ροή Rayleigh εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμό Mach και γιατί φέρει αυτόν τον κρίσιμο όρο $(1 - Ma^2)$ στον αριθμητή, ο οποίος υπαγορεύει την κατεύθυνση των αλλαγών αναλόγως του αν είμαστε σε υποηχητικό ή υπερηχητικό καθεστώς.

Ερώτηση_05: Ποια είναι η διαδικασία - μαθηματικές σχέσεις, για να φτάσουμε στη ΔΕ της ολικής πίεσης βήμα - βήμα.

Η απόδειξη αυτής της εξίσωσης είναι εξαιρετικά κομψή γιατί συνδυάζει τη Θερμοδυναμική με τη Μηχανική των Ρευστών. Θα την δούμε βήμα-βήμα, ξεκινώντας από τις βασικές αρχές.

1. Οι "Πρώτες Ύλεις" (Βασικές Παραδοχές)

- **Ιδανικό αέριο:** $P = \rho RT$ και $dh = c_p dT$.
- **Σταθερή διατομή:** $A = \text{const.}$
- **Ροή Rayleigh:** Προσθήκη θερμότητας χωρίς τριβές ($dP + \rho V dV = 0$).

Βήμα 1: Η Σχέση Gibbs (Θερμοδυναμική)

Ξεκινάμε από τη θεμελιώδη σχέση της θερμοδυναμικής για την εντροπία (s):

$$Tds = dh - vdP = c_p dT - \frac{1}{\rho} dP$$

Από την **εξίσωση ορμής** (Momentum) γνωρίζουμε ότι για ροή χωρίς τριβές: $dP = -\rho V dV$. Αντικαθιστούμε το dP στη σχέση Gibbs:

$$Tds = c_p dT - \frac{1}{\rho} (-\rho V dV) \Rightarrow Tds = c_p dT + V dV$$

Επειδή η **ενθαλπία ανακοπής** (stagnation enthalpy) ορίζεται ως $h_0 = h + \frac{1}{2}V^2$, η διαφορική της μορφή είναι $dh_0 = c_p dT + V dV$. Άρα:

$$T ds = dh_0 = c_p dT_0$$

Από εδώ προκύπτει η πρώτη σημαντική σχέση:

$$ds = c_p \frac{dT_0}{T} \quad (1)$$

Βήμα 2: Η Εντροπία συναρτήσει της Ολικής Πίεσης

Η μεταβολή της εντροπίας για ένα ιδανικό αέριο μπορεί επίσης να γραφτεί χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ανακοπής (P_0, T_0):

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) - R \ln\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)$$

Σε διαφορική μορφή:

$$ds = c_p \frac{dT_0}{T_0} - R \frac{dP_0}{P_0} \quad (2)$$

Βήμα 3: Συνδυασμός των σχέσεων (1) και (2)

Εξισώνουμε τις δύο εκφράσεις για το ds :

$$c_p \frac{dT_0}{T} = c_p \frac{dT_0}{T_0} - R \frac{dP_0}{P_0}$$

Λύνουμε ως προς τον όρο της πίεσης:

$$R \frac{dP_0}{P_0} = c_p \frac{dT_0}{T_0} - c_p \frac{dT_0}{T} = c_p dT_0 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

$$R \frac{dP_0}{P_0} = c_p dT_0 \left(\frac{T - T_0}{T \cdot T_0} \right)$$

Βήμα 4: Εισαγωγή του Αριθμού Mach

Γνωρίζουμε από τον ορισμό της ολικής θερμοκρασίας ότι:

$$T_0 - T = \frac{V^2}{2c_p}$$

Άρα η παρένθεση $(T - T_0)$ ισούται με $-\frac{V^2}{2c_p}$. Αντικαθιστούμε:

$$R \frac{dP_0}{P_0} = c_p dT_0 \left(\frac{-V^2/2c_p}{T \cdot T_0} \right) = -\frac{V^2}{2TT_0} dT_0$$

Διαιρούμε με το R :

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{V^2}{2RTT_0}dT_0$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα ήχου είναι $c^2 = \gamma RT$, άρα $V^2 = Ma^2 \gamma RT$. Αντικαθιστούμε το V^2 :

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{Ma^2 \gamma RT}{2RTT_0}dT_0$$

Το Τελικό Αποτέλεσμα

Απλοποιώντας τους όρους R και T , καταλήγουμε στην περίφημη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

Φυσική Σημασία:

Αυτή η εξίσωση είναι το "ευαγγέλιο" της θερμικής εμπλοκής. Μας λέει ότι:

1. **Η ολική πίεση πάντα πέφτει** ($dP_0 < 0$) όταν προσθέτουμε θερμότητα ($dT_0 > 0$).
2. **Η πτώση είναι καταστροφική σε υψηλά Mach:** Επειδή ο όρος Ma^2 είναι πολλαπλασιαστής, αν προσπαθήσεις να θερμάνεις μια ροή κοντά στο $Ma = 1$, η ολική πίεση θα "εξαερωθεί" ακαριαία.

Τώρα ίσως φαίνεται πιο λογικό γιατί η "απώλεια" της ολικής πίεσης είναι άμεσα συνδεδεμένη με την αύξηση της εντροπίας μέσω της θερμότητας.

Ερώτηση_06: Αφού έχουμε βρει πλέον τις εκφράσεις dP_0/P_0 και dT_0/T_0 στη σχέση κλειδί που τις συνδέει (ακριβώς παραπάνω), με τον αριθμό Mach να κυκλοφορεί στα 2 διαφορικά μπορούμε να προχωρήσουμε αναλυτικά και στη λύση των επιμέρους ΔΕ dP_0/P_0 και dT_0/T_0 που θα δώσει τις σχέσεις $T_0/T_0^* \cdot P_0/P_0^*$.

Αυτή είναι ίσως η πιο εντυπωσιακή στιγμή στη μελέτη της ροής Rayleigh, καθώς θα δούμε τις χαστικές διαφορικές εξισώσεις να λύνονται αναλυτικά και να μας δίνουν τις περίφημες αλγεβρικές εξισώσεις που βρίσκουμε στα τυπολόγια.

Είναι ένα πραγματικό μαθηματικό κομψοτέχνημα. Ας το δούμε βήμα-βήμα.

Μέρος 1: Η "Σχέση Κλειδί"

Αν θυμάσαι από τις προηγούμενες αποδείξεις, φτάσαμε στις εξής διαφορικές μορφές:

$$1. \frac{dP_0}{P_0} = - \frac{\gamma Ma^2(1-Ma^2)}{(1+\gamma Ma^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)} \frac{dMa}{Ma}$$

$$2. \frac{dT_0}{T_0} = \frac{2(1-Ma^2)}{(1+\gamma Ma^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)} \frac{dMa}{Ma}$$

Αν διαιρέσουμε την (1) με την (2), σχεδόν όλοι οι όροι διαγράφονται και προκύπτει η άμεση συσχέτισή τους:

$$\frac{dP_0}{P_0} = - \frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

Αυτή η εξίσωση μας λέει κάτι θεμελιώδες: **Για κάθε ποσοστό ενέργειας (θερμότητας) που προσθέτουμε (dT_0/T_0), πληρώνουμε ένα τίμημα σε απώλεια ολικής πίεσης (dP_0/P_0), το οποίο μάλιστα πολλαπλασιάζεται (κλιμακώνεται) με το τετράγωνο του Mach.**

Μέρος 2: Η Αναλυτική Ολοκλήρωση της T_0

Για να λύσουμε τη διαφορική, δεν μπορούμε απλά να ολοκληρώσουμε το P_0 ως προς το T_0 , γιατί το Ma αλλάζει συνεχώς. Πρέπει να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2) ως προς Ma .

Για να γίνει η ολοκλήρωση εφικτή, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής: Θέτουμε $x = Ma^2$, οπότε $dx = 2Ma dMa \implies \frac{dMa}{Ma} = \frac{dx}{2x}$. Η εξίσωση της ολικής θερμοκρασίας γίνεται:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{1-x}{x(1+\gamma x)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}x\right)} dx$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα, αναλύουμε το κλάσμα σε **απλά κλάσματα (partial fractions)**. Τα μαθηματικά μάς δίνουν την εξής εκπληκτική διάσπαση:

$$\frac{1-x}{x(1+\gamma x)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}x\right)} = \frac{1}{x} - \frac{2\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\frac{\gamma-1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}x}$$

Τώρα, ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη:

$$\int \frac{dT_0}{T_0} = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2\gamma}{1+\gamma x} dx + \int \frac{\frac{\gamma-1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}x} dx$$

Οι λύσεις είναι καθαροί φυσικοί λογάριθμοι (ln):

$$\ln T_0 = \ln x - 2 \ln(1+\gamma x) + \ln\left(1+\frac{\gamma-1}{2}x\right) + \ln C$$

Συμπιέσσοντας τους λογαρίθμους και επιστρέφοντας στο Ma^2 , έχουμε:

$$T_0 = C \cdot \frac{Ma^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)}{(1 + \gamma Ma^2)^2}$$

Εύρεση της σταθεράς C : Στη συμπιεστή ροή, χρησιμοποιούμε ως σημείο αναφοράς την κρίσιμη κατάσταση $Ma = 1$ (όπου οι ιδιότητες συμβολίζονται με αστερίσκο, T_0^*).

Θέτοντας $Ma = 1$ και $T_0 = T_0^*$:

$$T_0^* = C \cdot \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)}{(1 + \gamma)^2} \implies C = T_0^* \frac{2(1 + \gamma)^2}{\gamma + 1} = T_0^* \cdot 2(\gamma + 1)$$

Αντικαθιστώντας το C , καταλήγουμε στην αλγεβρική εξίσωση της ροής Rayleigh:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma + 1)Ma^2}{(1 + \gamma Ma^2)^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)$$

Μέρος 3: Η Αναλυτική Ολοκλήρωση της P_0

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια στρατηγική με το $x = Ma^2$, η διαφορική της ολικής πίεσης διασπάται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \left[-\frac{\gamma}{1 + \gamma x} + \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}x} \right] dx$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\int \frac{dP_0}{P_0} = - \int \frac{\gamma}{1 + \gamma x} dx + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int \frac{\frac{\gamma-1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}x} dx$$

$$\ln P_0 = -\ln(1 + \gamma x) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}x\right) + \ln C'$$

Συμπτύσσοντας και επιστρέφοντας στο Ma :

$$P_0 = C' \cdot \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{1 + \gamma Ma^2}$$

Εύρεση της σταθεράς C' : Για $Ma = 1$, έχουμε $P_0 = P_0^*$:

$$P_0^* = C' \cdot \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{1 + \gamma}$$

Λύνοντας ως προς C' και αντικαθιστώντας, καταλήγουμε στον τελικό τύπο:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma Ma^2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)Ma^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Σύνοψη

Μέσα από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των επιμέρους ΔΕ, ξεδιπλώθηκε πλήρως όλη η συμπεριφορά του αερίου. Ξεκινώντας το "ταξίδι" από τα διαφορικά της Θερμοδυναμικής και, με τη βοήθεια των μερικών κλασμάτων, φτάσαμε σε κλειστές αλγεβρικές μορφές με τις οποίες οι μηχανικοί υπολογίζουν τις απώλειες πίεσης και τις αυξήσεις θερμοκρασίας σε ένα σωλήνα.

Ερώτηση_07: Νωρίτερα καταλήξαμε στις εκφράσεις dP_0/P_0 και dT_0/T_0 που μετέχουν στη σχέση κλειδί που τις συνδέει, με εξαρτημένη μεταβλητή τον αριθμό Mach μόνο να κυκλοφορεί στα 2 διαφορικά. Μπορούμε πλέον με αντικατάσταση να προχωρήσουμε αναλυτικά και στη λύση της "σχέσης κλειδί" που συνδέει dP_0/P_0 και dT_0/T_0 .

Πάμε στ άμεση διαφορική σχέση που τα συνδέει:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

και να τη λύσουμε ολοκληρώνοντάς τη, ώστε να βρούμε μια άμεση συνάρτηση $P_0 = f(T_0)$.

Εδώ κρύβεται μια από τις πιο όμορφες μαθηματικές παγίδες στη ρευστομηχανική. Πάμε να το δούμε αυστηρά αναλυτικά.

Η Μαθηματική Πρόκληση της Ολοκλήρωσης

Αν επιχειρήσουμε να ολοκληρώσουμε απευθείας:

$$\int \frac{dP_0}{P_0} = \int -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

βρισκόμαστε μπροστά στο εξής πρόβλημα: **Ο αριθμός Mach (Ma) δεν είναι σταθερά.** Καθώς προσθέτουμε θερμότητα (άρα αλλάζει το T_0), ο αριθμός Mach μεταβάλλεται. Επομένως, για να λύσουμε αυτό το ολοκλήρωμα ως προς T_0 , πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το Ma^2 ως αυστηρή συνάρτηση του T_0 .

Βήμα 1: Εύρεση της συνάρτησης $Ma^2 = f(T_0)$

Ας ορίσουμε την αδιάστατη ολική θερμοκρασία $\tau = \frac{T_0}{T_0^*}$. Γνωρίζουμε (από τις αλγεβρικές σχέσεις) ότι:

$$\tau = \frac{2(\gamma + 1)Ma^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)}{(1 + \gamma Ma^2)^2}$$

Για να λύσουμε ως προς Ma^2 , πρέπει να αναπτύξουμε αυτή την εξίσωση. Θέτουμε $x = Ma^2$:

$$\tau(1 + \gamma x)^2 = 2(\gamma + 1)x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} x\right)$$

$$\tau(1 + 2\gamma x + \gamma^2 x^2) = 2(\gamma + 1)x + (\gamma^2 - 1)x^2$$

Μαζεύοντας όλους τους όρους στη μία πλευρά για να φτιάξουμε ένα πολυώνυμο ως προς x :

$$(\gamma^2 \tau - \gamma^2 + 1)x^2 + (2\gamma \tau - 2\gamma - 2)x + \tau = 0$$

Αυτή είναι μια **δευτεροβάθμια εξίσωση** της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$, με:

- $a = \gamma^2 \tau - \gamma^2 + 1$
- $b = 2\gamma \tau - 2(\gamma + 1)$
- $c = \tau$

Η λύση της μας δίνει το Mach συναρτήσει της θερμοκρασίας:

$$Ma^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\tau}}{2a} \quad (\text{Εξίσωση A})$$

Βήμα 2: Η Φυσική Σημασία του $\pm$ (Το Σπάσιμο της Διαίσθησης)

Πρόσεξε το σύμβολο $\pm$ στη λύση. Μας λέει ότι για **μία** δεδομένη τιμή ολικής θερμοκρασίας T_0 (όπου $\tau < 1$), υπάρχουν **δύο** πιθανές τιμές του Ma^2 ! Η μία αντιστοιχεί στην υποηχητική ροή (το $-$) και η άλλη στην υπερηχητική ροή (το $+$). Αυτή είναι η μαθηματική απόδειξη ότι η καμπύλη Rayleigh στο διάγραμμα T-s "διπλώνει" προς τα πίσω.

Βήμα 3: Η Τελική Ολοκλήρωση της Διαφορικής

Τώρα έχουμε τα εφόδια να λύσουμε τη διαφορική που ζήτησες. Αντικαθιστούμε την Εξίσωση A στο αρχικό μας ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dP_0}{P_0} = \int -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{-b(\tau) \pm \sqrt{b(\tau)^2 - 4a(\tau)\tau}}{2a(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι **αναλυτικά επιλύσιμο** (με αλλαγές μεταβλητών Euler για ριζικά πολυωνύμων), αλλά παράγει μια εξαιρετικά δυσκίνητη αλγεβρική συνάρτηση που περιέχει λογαρίθμους και ρίζες. Το αποτέλεσμα θα είναι μια άμεση συνάρτηση:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \Phi \left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)$$

με δύο διαφορετικούς κλάδους (έναν για το + και έναν για το -).

Το Ζουμί της Υπόθεσης

Η διαφορική εξίσωση $\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$ είναι η πιο "ειλικρινής" εξίσωση για το τι συμβαίνει φυσικά στο ρευστό (η θερμότητα ρίχνει την ολική πίεση, με "ποινή" που κλιμακώνεται με το τετράγωνο του Mach).

Όμως, μαθηματικά, επειδή το Ma αλλάζει κατά μήκος του σωλήνα και η σχέση $Ma(T_0)$ είναι διπλότιμη (δευτεροβάθμια), **δεν την ολοκληρώνουμε ποτέ απευθείας ως προς T_0** . Αντίθετα, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας (Παραμετρική Ολοκλήρωση) ορίζοντας το Ma ως την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Η λύση αυτής της αλληλεξαρτώμενης διαφορικής εξίσωσης **είναι** ακριβώς το ζεύγος των δύο παραμετρικών εξισώσεων $P_0(Ma)$ και $T_0(Ma)$ που είδαμε νωρίτερα. Στα μαθηματικά, όταν η άμεση λύση $y = f(x)$ είναι πολύπλοκη (ή δεν είναι συνάρτηση 1-προς-1), η αποδεκτή μορφή λύσης της διαφορικής είναι η παραμετρική $y = f(t)$, $x = g(t)$. Εδώ, ο "χρόνος" t του συστήματος είναι ο αριθμός Mach.

Ερώτηση_08: Πως προκύπτει η έκφραση του τ με το γ και τον Ma .

Η εξαγωγή της έκφρασης για την αδιάστατη ολική θερμοκρασία $\tau = \frac{T_0}{T_0^*}$ (όπου το σύμβολο $*$ δηλώνει την κατάσταση $Ma = 1$) είναι η διαδικασία όπου παντρεύουμε τη **Θερμοδυναμική** με τη **Διατήρηση της Ορμής**.

Ακολουθεί η αναλυτική μαθηματική διαδρομή:

1. Ο ορισμός της Ολικής Θερμοκρασίας

Γνωρίζουμε από τη γενική θεωρία της συμπιεστής ροής ότι η ολική θερμοκρασία T_0 συνδέεται με τη στατική θερμοκρασία T και τον αριθμό Mach μέσω της σχέσης:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)$$

Άρα, ο λόγος $\frac{T_0}{T_0^*}$ γράφεται:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{T}{T^*} \cdot \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} (1)^2} = \frac{T}{T^*} \cdot \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (\text{Εξίσωση 1})$$

Για να βρούμε την τελική έκφραση, πρέπει να βρούμε το λόγο των στατικών θερμοκρασιών $\frac{T}{T^*}$ συναρτήσει του Ma .

2. Η χρήση της Καταστατικής Εξίσωσης και της Μάζας

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ($P = \rho RT$) και τη διατήρηση της μάζας ($\dot{m} = \rho V A = \text{const}$), έχουμε για σταθερή διατομή A :

$$\frac{T}{T^*} = \frac{P}{P^*} \cdot \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{P}{P^*} \cdot \frac{V}{V^*} \quad (\text{Εξίσωση 2})$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Mach ($V = Ma \cdot \sqrt{\gamma RT}$), ο λόγος των ταχυτήτων γίνεται:

$$\frac{V}{V^*} = \frac{Ma \sqrt{\gamma RT}}{1 \sqrt{\gamma RT^*}} = Ma \sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Αντικαθιστούμε αυτό στην (Εξίσωση 2):

$$\frac{T}{T^*} = \frac{P}{P^*} \cdot Ma \sqrt{\frac{T}{T^*}} \implies \sqrt{\frac{T}{T^*}} = \frac{P}{P^*} Ma \implies \frac{T}{T^*} = \left(\frac{P}{P^*} \right)^2 Ma^2 \quad (\text{Εξίσωση 3})$$

3. Η υπογραφή της Rayleigh: Διατήρηση Ορμής

Στη ροή Rayleigh (χωρίς τριβές), η ώθηση είναι σταθερή: $P + \rho V^2 = \text{const}$. Όπως είδαμε, αυτό γράφεται: $P(1 + \gamma Ma^2) = \text{const}$. Για το σημείο Ma και το κρίσιμο σημείο $Ma = 1$:

$$P(1 + \gamma Ma^2) = P^*(1 + \gamma \cdot 1^2) \implies \frac{P}{P^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma Ma^2} \quad (\text{Εξίσωση 4})$$

4. Η Τελική Σύνθεση

Τώρα αντικαθιστούμε την (Εξίσωση 4) στην (Εξίσωση 3) για να βρούμε το $\frac{T}{T^*}$:

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma Ma^2} \right)^2 Ma^2$$

Και τέλος, αντικαθιστούμε αυτό το αποτέλεσμα στην αρχική μας (Εξίσωση 1):

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \left[\frac{(1 + \gamma)^2 Ma^2}{(1 + \gamma Ma^2)^2} \right] \cdot \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right]$$

Κάνοντας την απλοποίηση (το ένα $(\gamma + 1)$ του αριθμητή απλοποιείται με τον παρονομαστή του δεύτερου κλάσματος και το 2 ανεβαίνει πάνω):

$$\tau = \frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma + 1)Ma^2}{(1 + \gamma Ma^2)^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)$$

Φυσική Ερμηνεία

Αυτή η έκφραση δείχνει ότι η ολική θερμοκρασία έχει ένα **μέγιστο** στο $Ma = 1$.

- Αν $Ma < 1$, η προσθήκη θερμότητας αυξάνει το Mach.
- Αν $Ma > 1$, η προσθήκη θερμότητας μειώνει το Mach (το ρευστό επιβραδύνεται).
- Στο $Ma = 1$, η παράγωγος $d\tau/dMa$ μηδενίζεται, που σημαίνει ότι έχουμε φτάσει στο θερμικό όριο (**Thermal Choking**).

Ερώτηση_09: Μπορούμε να δούμε πιο αναλυτικά την λύση του τριωνύμου για τον Ma^2 .

Για να λύσουμε το τριώνυμο ως προς Ma^2 , πρέπει να αναπτύξουμε την αλγεβρική σχέση της ολικής θερμοκρασίας και να τη φέρουμε στην τυπική μορφή $ax^2 + bx + c = 0$.

Ας θέσουμε για ευκολία $x = Ma^2$ και $\tau = \frac{T_0}{T_0^*}$.

1. Η Ανάπτυξη της Εξίσωσης

Η αρχική σχέση είναι:

$$\tau = \frac{2(\gamma + 1)x}{(1 + \gamma x)^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} x \right)$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον παρονομαστή $(1 + \gamma x)^2$:

$$\tau(1 + \gamma x)^2 = 2(\gamma + 1)x \left(\frac{2 + (\gamma - 1)x}{2} \right)$$

$$\tau(1 + 2\gamma x + \gamma^2 x^2) = (\gamma + 1)x(2 + (\gamma - 1)x)$$

Ανοίγουμε τις παρενθήσεις:

$$\tau + 2\gamma\tau x + \gamma^2\tau x^2 = 2(\gamma + 1)x + (\gamma + 1)(\gamma - 1)x^2$$

$$\tau + 2\gamma\tau x + \gamma^2\tau x^2 = 2(\gamma + 1)x + (\gamma^2 - 1)x^2$$

2. Η Διάταξη κατά Φθίνουσες Δυνάμεις του x

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο αριστερό μέλος:

$$(\gamma^2\tau - \gamma^2 + 1)x^2 + (2\gamma\tau - 2\gamma - 2)x + \tau = 0$$

Τώρα έχουμε το τριώνυμο $ax^2 + bx + c = 0$ με συντελεστές:

- $a = \gamma^2\tau - (\gamma^2 - 1)$
- $b = 2(\gamma\tau - \gamma - 1)$
- $c = \tau$

3. Η Επίλυση (Διακρίνουσα)

Η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι:

$$\Delta = [2(\gamma\tau - \gamma - 1)]^2 - 4[\gamma^2\tau - (\gamma^2 - 1)]\tau$$

Μετά από αρκετές αλγεβρικές απλοποιήσεις (αναπτύσσοντας τα τετράγωνα και κάνοντας τις αφαιρέσεις), η διακρίνουσα παίρνει την εξής κομψή μορφή:

$$\Delta = 4(1 + \gamma)^2(1 - \tau)$$

Σημείωση: Εδώ φαίνεται η φυσική σημασία του $\tau \leq 1$. Αν η προσθήκη θερμότητας οδηγούσε σε $\tau > 1$, η διακρίνουσα θα γινόταν αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι η ροή Rayleigh δεν μπορεί να υπάρξει πέρα από το σημείο Thermal Choking.

4. Η Τελική Λύση του Ma^2

Εφαρμόζοντας τον τύπο $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$Ma^2 = \frac{-2(\gamma\tau - \gamma - 1) \pm \sqrt{4(1 + \gamma)^2(1 - \tau)}}{2(\gamma^2\tau - \gamma^2 + 1)}$$

Απλοποιώντας το 2:

$$Ma^2 = \frac{(1 + \gamma - \gamma\tau) \pm (1 + \gamma)\sqrt{1 - \tau}}{\gamma^2\tau - \gamma^2 + 1}$$

Τι σημαίνουν οι δύο λύσεις ($\pm$);

Η ύπαρξη των δύο κλάδων περιγράφει τις δύο πλευρές της καμπύλης Rayleigh:

1. **Η λύση με το πρόσημο ($-$):** Αντιστοιχεί στον **υποηχητικό κλάδο**. Καθώς προσθέτουμε θερμότητα ($\tau \rightarrow 1$), το Ma^2 αυξάνεται προς τη μονάδα.
2. **Η λύση με το πρόσημο ($+$):** Αντιστοιχεί στον **υπερηχητικό κλάδο**. Καθώς προσθέτουμε θερμότητα, το Ma^2 μειώνεται προς τη μονάδα.

Αυτή η δευτεροβάθμια επίλυση είναι ο λόγος που αν δώσουμε σε έναν κώδικα (π.χ. σε Matlab ή Python) μια τιμή θερμοκρασίας, πρέπει πάντα να του ορίσουμε αν η ροή μας ξεκίνησε ως υποηχητική ή υπερηχητική, ώστε να επιλέξει τη σωστή ρίζα.

Ερώτηση_10: Στην ασυμπίεστη ροή όμως λέμε ότι η P_0 είναι ολική πίεση και το ισοζύγιο ισχύει. Υπάρχει κάποια διαφοροποίηση στην αντιμετώπιση στη Συμπιεστή Ροή?

Η σύγχυση αυτή είναι το "βάπτισμα του πυρός" για κάθε μηχανικό. Η ειδοποιός διαφορά κρύβεται στην **πυκνότητα (ρ)** και στον τρόπο που αυτή σχετίζεται με τη θερμοδυναμική υψηλών ταχυτήτων.

Στην ασυμπίεστη ροή (Bernoulli), το P_0 είναι σταθερό γιατί θεωρούμε τη ροή **ιδανική και αδιαβατική**. Στη ροή Rayleigh, η **προσθήκη θερμότητας** αλλάζει τους κανόνες του παιχνιδιού.

Ας δούμε πώς διαφοροποιούνται αυτές οι δύο καταστάσεις:

1. Η Ασυμπίεστη Ροή (Bernoulli)

Σε μια ασυμπίεστη, ιδανική ροή χωρίς τριβές και **χωρίς προσθήκη ενέργειας**, η πυκνότητα ρ είναι σταθερή. Η εξίσωση Bernoulli είναι ουσιαστικά η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_0 = \text{const}$$

- **Γιατί ισχύει το ισοζύγιο;** Γιατί δεν υπάρχει καμία διαδικασία που να παράγει εντροπία. Η ενέργεια απλώς αλλάζει μορφή από στατική πίεση σε κινητική και αντίστροφα. Αν η P πέσει, η V αυξάνεται τόσο ώστε το άθροισμα να μείνει **ακριβώς** το ίδιο.

2. Η Ροή Rayleigh (Συμπιεστή με Θέρμανση)

Εδώ έχουμε δύο παράγοντες που "σπάνε" το ισοζύγιο του Bernoulli:

A. Η Μεταβλητή Πυκνότητα ($\rho \neq \text{const}$)

Στη Rayleigh, η θέρμανση μειώνει την πυκνότητα ($\rho \downarrow$). Για να διατηρηθεί η μάζα ($\rho V = \text{const}$), η ταχύτητα V πρέπει να αυξηθεί. Αυτή η αύξηση της ταχύτητας απαιτεί "δύναμη", η οποία αντλείται από την πτώση της στατικής πίεσης P .

B. Η Εντροπία (Ο πραγματικός "ένοχος")

Στην ασυμπίεστη ροή, συνήθως δεν έχουμε προσθήκη θερμότητας. Στη Rayleigh, η θερμότητα q εισέρχεται στο σύστημα. Η θερμοδυναμική μας λέει ότι:

$$ds = c_p \frac{dT_0}{T_0} - R \frac{dP_0}{P_0}$$

Στην ασυμπίεστη ροή, θεωρούμε $ds = 0$ και $dT_0 = 0$, οπότε αναγκαστικά $dP_0 = 0$. Στη Rayleigh, η προσθήκη θερμότητας **παράγει εντροπία**. Η αύξηση της εντροπίας ($ds > 0$)

σε μια ροή που κινείται, "κλέβει" ολική πίεση.

3. Η Μαθηματική Διαφοροποίηση

Αν προσπαθήσεις να εφαρμόσεις τον Bernoulli στη Rayleigh, θα δεις ότι "δεν βγαίνει". Ας δούμε τη διαφορά στις διαφορικές μορφές:

- **Ασυμπίεστη (Bernoulli):**

$$dP + \rho V dV = 0 \Rightarrow d\left(P + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = 0$$

(Εδώ το $P + \frac{1}{2}\rho V^2$ είναι το P_0 , άρα $dP_0 = 0$).

- **Συμπιεστή (Rayleigh):**

$$dP + \rho V dV = 0 \quad (\text{Η ορμή διατηρείται})$$

Αλλά ο ορισμός της P_0 είναι πολύ πιο σύνθετος: $P_0 = P\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Αν διαφορίσεις αυτόν τον τύπο και χρησιμοποιήσεις τη διατήρηση της ορμής, καταλήγεις σε αυτό που αποδείξαμε πριν:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

Συμπέρασμα

Η ειδοποιός διαφορά είναι ότι στην ασυμπίεστη ροή η P_0 είναι ένα **στατικό άθροισμα** δύο μορφών ενέργειας που ανταλλάσσονται 1 προς 1.

Στη συμπιεστή ροή Rayleigh, η P_0 είναι μια **συνάρτηση της κατάστασης**. Η θέρμανση "εκβιάζει" το ρευστό να επιταχυνθεί (λόγω διαστολής), και η στατική πίεση P πέφτει τόσο πολύ για να ικανοποιήσει τον Newton (Ορμή), που η άνοδος της ταχύτητας V δεν προλαβαίνει να "ρεφάρει" τη χασούρα στο ενεργειακό ισοζύγιο της P_0 .

Με μια φράση: Κατά Bernoulli η πίεση πέφτει επειδή "θέλει" να γίνει ταχύτητα. Κατά Rayleigh η πίεση πέφτει επειδή "πρέπει" να σπρώξει (εξωθήσει βίαια) το διαστελλόμενο αέριο, και αυτό το "σπρώξιμο" κοστίζει σε ολική πίεση.

Με λίγα λόγια και πιο ξεκάθαρα, η θερμότητα είναι υπεύθυνη και «σπάει» τη σταθερότητα που έχουμε συνηθίσει στον Bernoulli.