Διοίκηση Ποιότητας
(Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας)

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2023–2024

Ώρες Μαθήματος

Εβδομαδιαίο Πρόγραμμα

Θεωρία	▶ Τρίτη	13:00 - 16:00 (ΑΠ5)
Ώρες γραφείου	▶ Τρίτη	11:00 - 13:00
	▶ Πέμπτη	11:00 - 13:00

Τρόποι Επικοινωνίας

☎: 2610 969486
🏭: Πολυώροφο κτήριο Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών, 1ος όροφος, ΜΗ/Π102
✉: smalefaki@upatras.gr

προσωπική σελίδα:

http://www.des.upatras.gr/amm/smalefaki/index.htm

σελίδα μαθήματος στο eclass:

https://eclass.upatras.gr/courses/MECH1396/

Ύλη Μαθήματος

- **Βασικές Έννοιες & Αρχές Ποιότητας**
  Βασικοί ορισμοί και η σημασία της ποιότητας, οι διαστάσεις & τα οφέλη της
- **Βασικά Εργαλεία της Διοίκησης Ποιότητας**
  ιστόγραμμα, φύλλα ελέγχου, διαγράμματα Παρετο, διαγράμματα διασποράς, διαγράμματα αιτίου/αποτελέσματος, διαγράμματα ροής, διαγράμματα ελέγχου και άλλα
- **Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας**
  Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών και Διαγράμματα Ελέγχου, διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων, διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών, Δειγματοληψία αποδοχής, χαρακτηριστική καμπύλη. Απλό πλάνο δειγματοληψίας, πολλαπλό πλάνο δειγματοληψίας Βασικοί πειραματικοί σχεδιασμοί Εφαρμογές με χρήση κατάλληλου λογισμικού.

Βιβλία Μαθήματος

Προτεινόμενα Βιβλία

- Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας
  Μπερσίμης Σωτήριος, Ρακιτζής Αθανάσιος, Σαχλάς Αθανάσιος (2021)
- Στατιστικός έλεγχος ποιότητας
  Ταγαράς Γιώργος Ν. (2001)
- Διαχείριση και Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας,
  Χρήστος Κίτσος (2003)

Προτεινόμενες σημειώσεις

- http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Statistical_Quality_Control.pdf

Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας

Η έννοια της ποιότητας είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την καθημερινότητα μας.

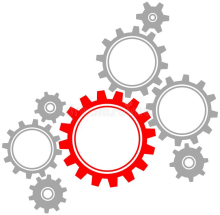
Κάθε άνθρωπος που αποφασίζει να αγοράσει ένα προϊόν (ή υπηρεσία) αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής ανάμεσα σε ομοειδή προϊόντα (ή υπηρεσίες). Η επιλογή του προϊόντος από τον καταναλωτή καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες, την ποιότητα και την τιμή του.

Στόχος: βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος

Σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες αυτές κατέχει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (Statistical Quality Control)

Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

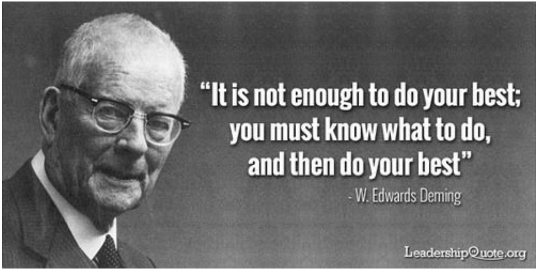
Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Ένας από τους βασικούς στόχους του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων



Η έννοια της ποιότητας

Edwards Deming (1900–1993)

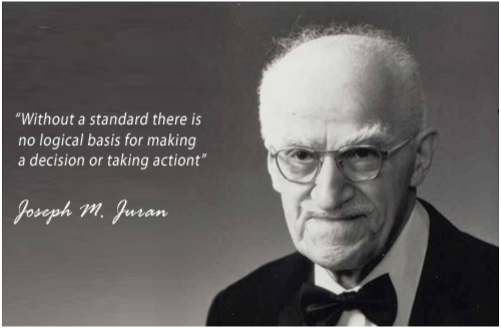
Ποιότητα είναι, με χαμηλό κόστος, προβλέψιμη τυποποίηση και αξιοπιστία ενός προϊόντος, καθώς και η καταλληλότητα του για την αγορά.



Η έννοια της ποιότητας

Joseph Juran (1904–2008)

Ποιότητα ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας είναι η καταλληλότητα του προς χρήση.
Ποιότητα είναι η προσαρμογή των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος ή υπηρεσίας στις απαιτήσεις /προσδοκίες του πελάτη/χρήστη καταναλωτή.

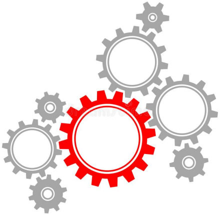


Η έννοια της ποιότητας

Έτσι η ποιότητα μπορεί να ’μετρηθεί‘ μέσω της ικανοποίησης που προσφέρει το προϊόν στον καταναλωτή.

Ένας νεότερος ορισμός ορίζει την ποιότητα ως αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών της παραγωγικής διαδικασίας που προσδιορίζουν την ποιότητα του προϊόντος.

Ο Deming, υποστήριξε τη μείωση της μεταβλητότητας στις διαδικασίες ως τον πιο ενδεδειγμένο τρόπο για τη βελτίωση της ποιότητας.



Οι διαστάσεις της ποιότητας

ΑΠΟΔΟΣΗ	Το προϊόν κάνει τη δουλειά για την οποία προορίζεται.
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ	Το προϊόν χρειάζεται συχνή επισκευή
ΔΙΑΡΚΕΙΑ	Η διάρκεια ζωής του προϊόντος
ΕΠΙΣΚΕΥΗ	Πόσο γρήγορη και οικονομική είναι η επισκευή του προϊόντος στην περίπτωση που εμφανιστεί βλάβη
ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	Πόσο ικανοποιητικό είναι από άποψη εμφάνισης (χρώμα, σχήμα, περιτύλιγμα, κτλ.) το προϊόν.
ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ	Ποιες είναι οι επιπρόσθετες δυνατότητες του προϊόντος
ΦΗΜΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ	Ποια είναι η φήμη της εταιρείας
ΣΥΜΜΟΡΦΩΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ	Το προϊόν κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έθεσε ο σχεδιαστής του

Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων. Το σύνολο αυτό μπορεί να χωριστεί σε τρία βασικά υποσύνολα που το καθένα περιέχει στατιστικές μεθόδους προσανατολισμένες σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας.

Τα τρία υποσύνολα είναι τα ακόλουθα:

- Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments)
- Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control)
- Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling)

Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας

- Ο Σχεδιασμός και η Ανάλυση Πειραμάτων περιέχει όλες εκείνες τις στατιστικές τεχνικές οι οποίες μας βοηθούν στην ανακάλυψη της επίδρασης που έχουν τα διάφορα επίπεδα των παραγόντων (μεταβλητών) που επηρεάζουν τις ποιοτικές παραμέτρους του τελικού προϊόντος και συνεπώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη βέλτιστη σχεδίαση της παραγωγικής διεργασίας.

- Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών περιέχει στατιστικές τεχνικές που είναι απαραίτητες για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας κατά τη διάρκεια της παραγωγής των προϊόντων.

- Η Δειγματοληψία Αποδοχής περιέχει στατιστικές τεχνικές (δειγματοληπτικές) που είναι απαραίτητες για να αποφασίσουμε αν μια συγκεκριμένη παρτίδα προϊόντων θα γίνει δεκτή ή θα απορριφθεί.

Στατιστικός έλεγχος Διεργασιών

Βασικός Σκοπός:

Η μέτρηση και η βελτίωση της ποιότητας των διεργασιών.
Η ανίχνευση τυχόν αλλαγών στη μέση τιμή και στην τυπική απόκλιση των χαρακτηριστικών μιας διεργασίας.

Ουσιαστικά, μας ενδιαφέρει να δούμε αν η διεργασία έχει αλλάξει από τη στιγμή που πιστοποιήθηκε.

Στην πραγματικότητα κάνουμε ένα διαρκή έλεγχο υπόθετων ως προς το αν το δείγμα που έχουμε λάβει ανήκει στον ίδιο πληθυσμό με τα δείγματα που χρησιμοποιούμε για να πιστοποιηθεί η συγκεκριμένη διεργασία.

Εφαρμογή στατιστικών μεθόδων για τη μέτρηση και την ανάλυση της μεταβλητότητας στις τιμές χαρακτηριστικών της διεργασίας (Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας).

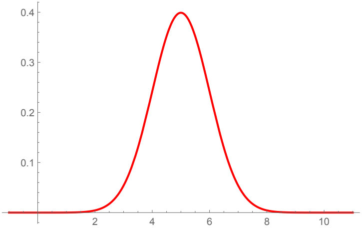
Παράδειγμα

Ένα κοπτικό μηχάνημα σε μία διεργασία κόβει δισκία χαλαζία διαμέτρου 8.00mm. Η κατανομή των τιμών της διαμέτρου είναι κανονική με τυπική απόκλιση 0.01mm. Έστω ΑΟΠ και ΚΟΠ το ανώτερο και το κατώτερο όριο προδιαγραφών αντιστοίχως. Επιθυμούμε να κόψουμε δισκία με μέση τιμή διαμέτρου 8.00mm, ποιες πρέπει να είναι οι προδιαγραφές του ελέγχου για τη διάμετρο του χαλαζία, ώστε να γίνεται αποδεκτό κατά μέσο όρο το 99.73% των δισκίων;

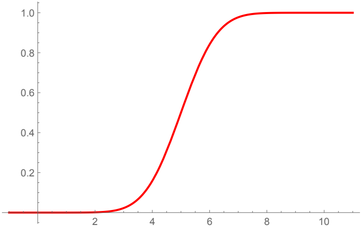
Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

σππ $f(x)$



ασκ $F(x)$



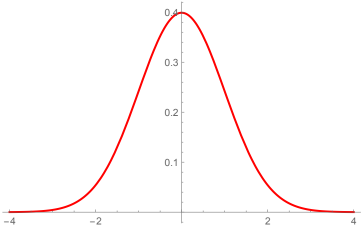
- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- $\alpha_3 = 0$ συμμετρική κατανομή
- $\alpha_4 = 3$ μεσόκυρτη κατανομή

Τυπική Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$

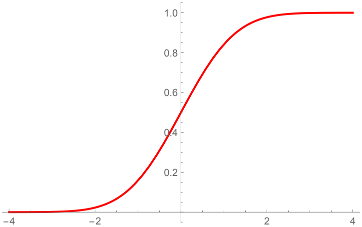
Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ τότε έχουμε την τυπική κανονική κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

σπп $f(x)$



ασκ $F(x)$



- $E(X) = 0$
- $Var(X) = 1$

Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2\right\} du$$

Δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικά!
Υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν την πιθανότητα $P(X \leq x)$ για $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ $(P(X \leq x) = \Phi(x))$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.5	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994
0.1	0.53983	0.5438	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6293	0.63307	0.63683
0.4	0.65542	0.6591	0.66276	0.6664	0.67003	0.67364
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7054	0.70884
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.7673	0.77035	0.77337
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435
1.3	0.9032	0.9049	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149
1.4	0.91924	0.92073	0.9222	0.92364	0.92507	0.92647
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943

Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Πώς όμως βρίσκουμε πιθανότητες για μία οποιαδήποτε τ. μ. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;;;

Θεώρημα

Αν Χ τ.μ. με $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε η τυποποιημένη τ. μ. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

'ρα να θέλουμε να βρούμε τη πιθανότητα $P(\alpha < X < \beta)$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ τυποποιούμε την Χ, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
P(\alpha < X < \beta) &= P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) \\
&= F\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Ο υπεύθυνος παραγωγής γνωρίζει ότι το βάρος των συσκευασιών που παράγονται ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 400 γραμμάρια και τυπική απόκλιση 5 γραμμάρια. Επίσης, γνωρίζει ότι οι ανοχές που επιτρέπουν οι προδιαγραφές που θέτει το τμήμα σχεδιασμού είναι ίσες με 385 και 415 αντίστοιχα. Ο υπεύθυνος παραγωγής θέλει να υπολογίσει ποια είναι η πιθανότητα ένα προϊόν που επιλέγει να είναι εντός προδιαγραφών.

Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τμ με $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός $c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n$ έχει επίσης κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$E(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$$

και διασπορά

$$Var(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2$$

’λλες συνεχείς κατανομές

- Ομοιόμορφη κατανομή
- Εκθετική κατανομή
- Κατανομή Γαμμά
- Weibull κατανομή
- X^2 κατανομή
- Κατανομή t

...συνέχεια παραδείγματος...

Πολλές φορές δεν ενδιαφερόμαστε μόνο για το ποια είναι η πιθανότητα κάποιο δισκίο χαλαζία να μην πληρεί τις προδιαγραφές, αλλά να μας ενδιαφέρει η πιθανότητα

- Το πρώτο δισκίο χαλαζία που θα είναι εκτός προδιαγραφών να είναι το δέκατο που θα εξετάσουμε.
- Από μια συσκευασία δέκα δισκίων χαλαζία τα δύο να είναι εκτός προδιαγραφών
- Πέντε διαδοχικά παραγόμενα δισκία κανένα να μην είναι εκτός προδιαγραφών

Κατανομή Bernoulli

- πειράματα που έχουν δύο δυνατά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία)
- $X \in \{0, 1\}$
- p: η πιθανότητα επιτυχίας
- $f(x) = p^x \, (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$
- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1-p)$

Διωνυμική Κατανομή $\mathcal{B}(n, p)$

Εκτελούμε n ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli

- X τμ η οποία δηλώνει πόσες επιτυχίες υπάρχουν στην ακολουθία των n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli.
- $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$
- $f(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x (1-p)^{n-x}$
- $E(X) = np$
- $Var(X) = np(1-p)$

Γεωμετρική Κατανομή $\mathcal{G}(p)$

Σε αυτή την περίπτωση εκτελούνται ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli μέχρι να πραγματοποιηθεί επιτυχία για πρώτη φορά

- X: τμ η οποία δηλώνει τον αριθμό των δοκιμών Bernoulli μέχρι να έχουμε για πρώτη φορά επιτυχία.
- $X \in 1, 2, \ldots$
- $f(x) = p(1-p)^{x-1}$
- $E(X) = p^{-1}$
  Περίοδος επαναφοράς
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Ιδιότητα Έλλειψης Μνήμης

Εάν το γεγονός A δεν συμβεί μέχρι τη δοκιμή k τότε η πιθανότητα ότι δε θα συμβεί στις επόμενες λ δοκιμές είναι ίδια με την πιθανότητα ότι το γεγονός A δεν θα συμβεί στις πρώτες λ δοκιμές, δηλαδή

$$P(X > k + \lambda | X > k) = P(X > \lambda)$$

Απόδειξη:

Είναι η μοναδική διακριτή κατανομή με αυτή την ιδιότητα.

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (Pascal) $\mathcal{NB}(r, p)$

Γενίκευση της Γεωμετρικής κατανομής

- X τμ η οποία παριστάνει τον αριθμό δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να συμπληρωθούν ακριβώς r επιτυχίες για πρώτη φορά.
- η X μπορεί να ερμηνευτεί σαν το άθροισμα r γεωμετρικών τμ.
- $X \in r, r+1, \ldots$
- $f(x) = \left(\begin{array}{c} r+x-1 \\ r-1 \end{array} \right) p^r (1-p)^x$
- $E(X) = \frac{rp}{1-p}$
- $Var(X) = \frac{rp}{(1-p)^2}$

Υπεργεωμετρική κατανομή $\mathcal{HG}(N, n, k)$

Όταν κάνουμε δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση από έναν πεπερασμένο πληθυσμό με έναν μέρος του να έχει κάποιο χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει

- X: τμ που μετράει τον αριθμό των επιτυχιών σε ένα δείγμα προκαθορισμένου μεγέθους
- N: το μέγεθος του πληθυσμού
- k: το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού που έχουν το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει
- n: το μέγεθος του δείγματος που παίρνω
- $X \in \{\max\{0, n + k - N\}, \ldots, \min\{k, n\}\}$
- $$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Κατανομή Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

X παριστάνει τον αριθμό πραγματοποίησης του A σε ένα ορισμένο χρονικό ή τοπικό διάστημα

- αριθμός ατυχημάτων σε ένα εργοστάσιο μέσα σε 6 μήνες
- αριθμός σεισμών σε μία χώρα μέσα σε ένα χρόνο
- αριθμός βλαβών σε ένα ηλεκτρικό σύστημα μέσα σε ένα μήνα λειτουργίας του.
- αριθμός κλίσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο μέσα σε 20 λεπτά.

ή εναλλακτικά

- αριθμός τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα
- αριθμός αυτοκινητιστικών ατυχημάτων σε ένα διάστημα 100 χιλιομέτρων
- αριθμός ραγισμάτων ανά τετραγωνικό μέτρο σε μία μεταλλική κατασκευή

Κατανομή Poisson λ

- $X \in \{0, 1, \ldots\}$
- $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$
- $E(X) = \lambda$ (μέσος αριθμός εμφάνισης του A στην στη μονάδα του χρόνου ή του χώρου, με άλλα λόγια η συχνότητα εμφάνισης του A)
- $Var(X) = \lambda$
- Η κατανομή Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μία προσέγγιση της Διωνυμική $\mathcal{B}(n, p)$ με $\lambda = np$, όταν το n είναι πολύ μεγάλο και το p πολύ μικρό. Στην πράξη χρησιμοποιούμε αυτή την προσέγγιση όταν $n > 30$ και $np < 5$.

Πολυωνυμική κατανομή

Έστω ένα πείραμα τύχης με k δυνατά αποτελέσματα (αμοιβαία αποκλειόμενα) $A_1, \ldots, A_k$. Έστω p_i, $i = 1, \ldots, k$ η πιθανότητα πραγματοποίησης του A_i η οποία είναι σταθερή σε κάθε εκτέλεση του πειράματος και $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.
$X_1, \ldots, X_k$ τμ που παριστάνουν τον αριθμό πραγματοποίησης των γεγονότων $A_1, \ldots, A_k$ αντίστοιχα στις n επαναλήψεις του πειράματος τύχης.
Οι $X_1, \ldots, X_k$ δεν είναι ανεξάρτητες αφού $X_1 + \ldots + X_k = n$.

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

$k = 2$ Διωνυμική κατανομή
Η κάθε μία μεταβλητή X_i μπορεί να θεωρηθεί σαν Διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p_i.

Συνοψίζοντας...

- **Διωνυμική**:
  - ’θροισμα n ανεξάρτητων κατανομών Bernoulli
  - Ειδική περίπτωση της Πολυωνυμικής για $k = 2$.
- **Γεωμετρική**: Ιδιότητα έλλειψης μνήμης.
- **Αρνητική Γεωμετρική**: ’θροισμα r ανεξάρτητων γεωμετρικών κατανομών.
- **Υπεργεωμετρική**: Όταν το N είναι πολύ μεγάλο και το n πολύ μικρό (στην πράξη το n είναι μικρό όταν $n < 0.05N$ προσεγγίζεται από τη Διωνυμική κατανομή.
- **Poisson**: Προσέγγιση της Διωνυμικής όταν το n είναι μεγάλο και το p μικρό.

Κατανομή του $\bar{X}$

Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 τότε

- $E(\bar{X}) = \mu$ και $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$
- $E(S^2) = \sigma^2$
- $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$

Τι γίνεται όμως όταν δεν έχουμε κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς;

Κατανομή του $\bar{X}$

Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 τότε

- $E(\bar{X}) = \mu$ και $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$
- $E(S^2) = \sigma^2$
- $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$

Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. μ. από κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, τότε

- $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Τι γίνεται όμως όταν δεν έχουμε κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς;

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

Κ.Ο.Θ.

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από μία κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο (για $n \to \infty$) τότε

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ προσεγγιστικά}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ προσεγγιστικά}$$

Με βάση το Κ.Ο.Θ έχουμε ότι η δειγματική μέση τιμή ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού που παίρνουμε το δείγμα.

Έλεγχοι Υποθέσεων

Ένα κοπτικό μηχάνημα σε μία διεργασία κόβει δισκία χαλαζία διαμέτρου 8.00mm. Η κατανομή των τιμών της διαμέτρου είναι κανονική με τυπική απόκλιση 0.01mm. Έστω ΑΟΠ και ΚΟΠ το ανώτερο και το κατώτερο όριο προδιαγραφών αντιστοίχως. Επιθυμούμε να κόψουμε δισκία με μέση τιμή διαμέτρου 8.00mm, ποιες πρέπει να είναι οι προδιαγραφές του ελέγχου για τη διάμετρο του χαλαζία, ώστε να γίνεται αποδεκτό κατά μέσο όρο το 99.73% των δισκίων;
Ελέγχουμε ένα τυχαίο δείγμα 100 δισκίων χαλαζία και παίρνουμε μέση τιμή 7.73mm. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να ισχυριστούμε οτι η μέση διάμετρός έχει αλλάξει σε επίπεδο σημαντικότητας 0.0027;

Έλεγχοι Υποθέσεων

Η διαδικασία του στατιστικού ελέγχου

1. Ορίζουμε τη μηδενική υπόθεση ($H_0 : \theta = \theta_0$)
2. Ορίζουμε την εναλλακτική υπόθεση ($H_1 : \theta \neq \theta_0$ ή $H_1 : \theta < \theta_0$ ή $H_1 : \theta > \theta_0$)
3. Υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης στο δείγμα μας
4. Ορίζουμε την περιοχή απόρριψης της H_0
5. Εξάγουμε τα συμπεράσματα μας.

Σφάλματα

1. **Σφάλμα τύπου I** (να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση ενώ είναι σωστή)

$$a = P(\text{απόρριψη } H_0 | H_0 \text{ σωστή})$$

   a : επίπεδο σημαντικότητας ή μέγεθος του ελέγχου

2. **Σφάλμα τύπου II** (να αποδεχτούμε τη μηδενική υπόθεση ενώ είναι λάθος)

$$\beta = P(\text{αποδοχή } H_0 | H_0 \text{ λάθος})$$

   Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II εξαρτάται από την ακριβή τιμή της παραμέτρου θ που ισχύει στην πραγματικότητα, άρα $\beta(\theta)$ με πέδίο ορισμού την περιοχή τιμών της θ που καθορίζει η H_1. Η συνάρτηση $\beta(\theta)$ λέγεται χαρακτηρίζουσα καμπύλη του ελέγχου.

3. **Ισχύς** ενός ελέγχου ονομάζεται η πιθανότητα απόρριψης της H_0 όταν η H_0 είναι πραγματικά λάθος.

$$\gamma = P(\text{απόρριψη } H_0 | H_0 \text{ λάθος}) = 1 - \beta$$

$$\gamma(\theta) = 1 - \beta(\theta)$$

Σφάλματα

1. Επιλέγουμε και καθορίζουμε το a και βάση αυτού ορίζεται η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Το a είναι συνήθως πολύ μικρό
2. Καθορίζοντας κατάλληλο μέγεθος δείγματος, εκτός της προκαθορισμένης τιμής του a, μπορούμε να προκαθορίσουμε και το $\beta(\theta)$
3. Παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας ή p τιμή (p–value) του ελέγχου ονομάζεται η πιθανότητα να παρατηρηθεί μία τιμή της στατιστικής συνάρτησής μεγαλύτερη (πιο ακραία) από αυτή που έδωσε το συγκεκριμένο δείγμα

$$P(Z > |z| | H_0 \text{ σωστή})$$

όπου z η τιμή του στατιστικού για το συγκεκριμένο δείγμα.

Η παραπάνω πιθανότητα αναφέρεται σε μονόπλευρους ελέγχους ενώ για δίπλευρους ελέγχους διπλασιάζεται

Γενική ιδέα

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{κατά} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

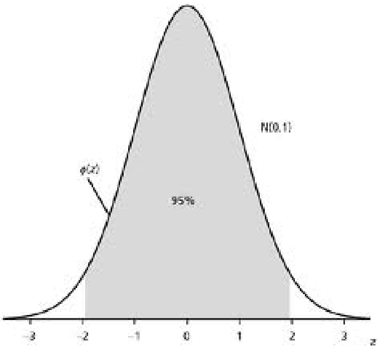
Ο πληθυσμός με βάση κάποιον κανόνα χωρίζεται σε δύο περιοχές, στην περιοχή απόρριψης της H_0 και στην περιοχή μη απόρριψης της. Κατόπιν, γίνεται ο έλεγχος βάση του κριτηρίου που ορίστηκε και αποφασίζεται αν η H_0 απορρίπτεται ή όχι.

Έστω $\hat{\theta}$ εκτιμητής του θ
Ξέρουμε ότι $\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta, \tau^2)$
Υπό την μηδενική υπόθεση έχουμε

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta_0, \tau^2) \Rightarrow Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\tau} \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$$

'ρα αν η H_0 είναι σωστή, δηλαδή αν το δείγμα μας προέρχεται από έναν πληθυσμό με μέση τιμή θ_0 τότε η μεταβλητή Z θα παίρνει τιμές με μεγάλη πιθανότητα $(1 - a)$ γύρω από το 0.

Γενική ιδέα



Γενική Ιδέα

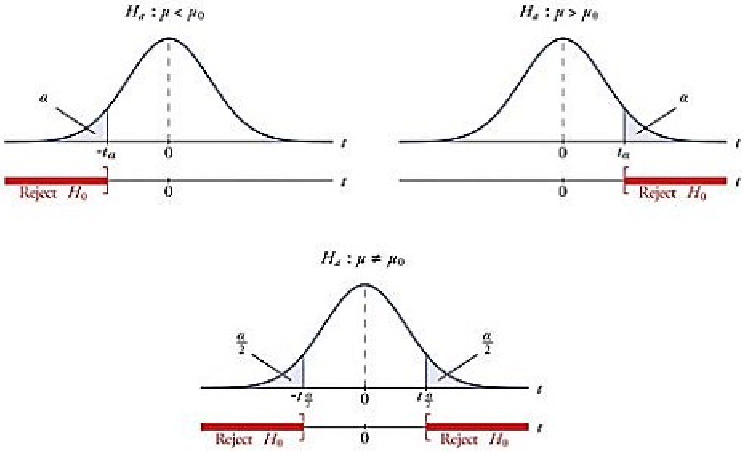
Ποια είναι η περιοχή απόρριψης όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι

$$H_1 : \theta > \theta_0?$$

Ποια είναι η περιοχή απόρριψης όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι

$$H_1 : \theta < \theta_0?$$

Κρίσιμη Περιοχή



Έλεγχος υπόθεσης για το μέσο μ ενός πληθυσμού

με γνωστή διασπορά

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \quad \text{κατά} \quad H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{ή} \quad \mu < \mu_0 \quad \text{ή} \quad \mu > \mu_0$$

$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ ή ισοδύναμα $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

1. αν $H_1: \mu \neq \mu_0$ τότε απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν $z < -z_{a/2}$ ή $z > z_{a/2}$
2. αν $H_1: \mu > \mu_0$ τότε απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν $z > z_a$
3. αν $H_1: \mu < \mu_0$ τότε απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν $z < -z_a$

Άσκηση

Ένας έμπορος έχει παραγγείλει μια μεγάλη παρτίδα κάποιου τυποποιημένου προϊόντος. Από τις προδιαγραφές είναι γνωστό ότι τα βάρη των προϊόντων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 2 κιλά και τυπική απόκλιση 50 γραμμάρια. Ο έμπορος επειδή υποψιάζεται ότι το μέσο βάρος των παραγόμενων κομματιών είναι μικρότερο από αυτό που ορίζεται στις προδιαγραφές, έχει αποφασίσει να κάνει δεκτή την παρτίδα που παρέλαβε με πιθανότητα 0.95 όταν στην πραγματικότητα ισχύουν οι προδιαγραφές παίρνοντας ένα τυχαίο δείγμα 16 κομματιών από αυτή.

1. Προσδιορίστε κατάλληλη μηδενική και εναλλακτική υπόθεση, καθώς και κατάλληλη στατιστική συνάρτηση και κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο υπόθεσης που θέλει να κάνει ο έμπορος.
2. Αν το πραγματικό μέσο βάρος των παραγόμενων προϊόντων είναι 1.98 κιλά με ποια πιθανότητα θα απορρίψει ο έμπορος την παρτίδα; Βρείτε την πιθανότητα $\beta(1.98)$
3. Αν από τον έλεγχο των 16 κομματιών της παρτίδας, ο έμπορος βρήκε μέσο βάρος 1.985 κιλά, ποια απόφαση πρέπει να πάρει;
4. Αν η πιθανότητα $\beta(1.98)$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι αρκετά μεγάλη και θέλουμε να είναι ίση με 0.10, διατηρώντας το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας στον έλεγχο, πόσα κομμάτια θα πρέπει να ελέγξει ο έμπορος από την παρτίδα;

Σχέση μεταξύ ελέγχων υποθέσεων και διαστημάτων εμπιστοσύνης

Έστω ότι έχουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \textbf{κατά} \quad H_A : \mu \neq \mu_0$$

Πότε αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση;

$$-z_{a/2} < z < z_{a/2}$$
$$-z_{a/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{a/2}$$
$$\bar{x} - \frac{z_{a/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{x} + \frac{z_{a/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεχτή σε επίπεδο σημαντικότητας a όταν η τιμή μ_0 ανήκει στο $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Ο τρόπος αυτός ελέγχει πολλές μηδενικές υποθέσεις ταυτόχρονα.

Έλεγχος υπόθεσης για το μέσο μ ενός πληθυσμού

με άγνωστη διασπορά

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \quad \text{κατά} \quad H_A: \mu \neq \mu_0 \quad \text{ή} \quad \mu < \mu_0 \quad \text{ή} \quad \mu > \mu_0$$

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

1. αν $H_A : \mu \neq \mu_0$ τότε απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν $t < -t_{a/2,n-1}$, ή $t > t_{a/2,n-1}$
2. αν $H_A : \mu > \mu_0$ τότε απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν $t > t_{a,n-1}$
3. αν $H_A : \mu < \mu_0$ τότε απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν $t < -t_{a,n-1}$

ΕΥ - Τυπολόγιο

1^o Ε.Υ. για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού με γνώστη διασπορά σ^2

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \quad \text{κατά} \quad H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ (α)} \quad \text{ή} \quad \mu > \mu_0 \text{ (β)} \quad \text{ή} \quad \mu < \mu_0 \text{ (γ)}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_{a/2}$ ή $z > z_{a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $z > z_a$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_a$

2^o Ε.Υ. για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού με άγνωστη διασπορά σ^2

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{n-1,a/2}$ ή $t > t_{n-1,a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $t > t_{n-1,a}$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{n-1,a}$

3^o Ε.Υ. για τη διαφορά των μέσων $\mu_1 - \mu_2$ δύο ανεξάρτητων πληθυσμών με γνωστές διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

$$H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \delta \quad \text{κατά} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \text{ (α)} \quad \text{ή} \quad \mu_1 - \mu_2 > \delta \text{ (β)} \quad \text{ή} \quad \mu_1 - \mu_2 < \delta \text{ (γ)}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_{a/2}$ ή $z > z_{a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $z > z_a$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_a$

4^o Ε.Υ. για τη διαφορά των μέσων $\mu_1 - \mu_2$ δύο ανεξάρτητων πληθυσμών με άγνωστες διασπορές αλλά ίσες ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{s_p\sqrt{1/n + 1/m}}$$

όπου $s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}$

(α) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{n+m-2,a/2}$ ή $t > t_{n+m-2,a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $t > t_{n+m-2,a}$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{n+m-2,a}$

5^o Ε.Υ. για τη διαφορά των μέσων $\mu_1 - \mu_2$ δύο ανεξάρτητων πληθυσμών με άγνωστες διασπορές αλλά άνισες ($\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$)

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{s_1^2/n + s_2^2/m}}$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{v,a/2}$ ή $t > t_{v,a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $t > t_{v,a}$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{v,a}$

όπου $v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$

ΕΥ - Τυπολόγιο

6^o Ε.Υ. για τη διαφορά των μέσων $\mu_1 - \mu_2$ δύο εξαρτημένων πληθυσμών

$$t = \frac{\bar{z} - \delta}{s_z/\sqrt{n}}, \quad \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \quad \text{και} \quad s_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

και $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \ldots, z_n = x_n - y_n$

(α) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{n-1,a/2}$ ή $t > t_{n-1,a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $t > t_{n-1,a}$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $t < -t_{n-1,a}$

7^o Ε.Υ. για το ποσοστό p ενός πληθυσμού

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{κατά} \quad H_1 : p \neq p_0 \text{ (α)} \quad \text{ή} \quad p > p_0 \text{ (β)} \quad \text{ή} \quad p < p_0 \text{ (γ)}$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_{a/2}$ ή $z > z_{a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $z > z_a$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_a$

ΕΥ - Τυπολόγιο

8^o Ε.Υ. για τη διαφορά των ποσοστών $p_1 - p_2$ δύο ανεξάρτητων πληθυσμών

$$H_0: \ p_1 - p_2 = \delta \quad \text{κατά} \quad H_1: p_1 - p_2 \neq \delta \text{ (α)} \quad \text{ή} \quad p_1 - p_2 > \delta \text{ (β)} \quad \text{ή} \quad p_1 - p_2 < \delta \text{ (γ)}$$

αν $\delta \neq 0$, $\quad z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta}{\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/m}}$ αν $\delta = 0$, $\quad z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n+1/m)}}$, όπου $\hat{p} = \frac{x+y}{n+m}$

(α) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_{a/2}$ ή $z > z_{a/2}$, (β) απορρίπτω H_0 αν $z > z_a$,

(γ) απορρίπτω H_0 αν $z < -z_a$

9^o Ε.Υ. για τη διασπορά σ^2 ενός πληθυσμού

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{κατά} \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (α)} \quad \text{ή} \quad \sigma^2 > \sigma_0^2 \text{ (β)} \quad \text{ή} \quad \sigma^2 < \sigma_0^2 \text{ (γ)}$$

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $X^2 < X^2_{n-1,1-a/2}$, ή $X^2 > X^2_{n-1,a/2}$,

(β) απορρίπτω H_0 αν $X^2 > X^2_{n-1,a}$, (γ) απορρίπτω H_0 αν $X^2 < X^2_{n-1,1-a}$

10^o Ε.Υ. για το λόγο των διασπορών σ_X^2/σ_Y^2 δύο ανεξάρτητων πληθυσμών

$$H_0: \sigma_2^2/\sigma_1^2 = \lambda_0 \quad \text{κατά} \quad H_1: \sigma_2^2/\sigma_1^2 \neq \lambda_0 \text{ (α)} \quad \text{ή} \quad \sigma_2^2/\sigma_1^2 < \lambda_0 \text{ (β)} \quad \text{ή} \quad \sigma_2^2/\sigma_1^2 > \lambda_0 \text{ (γ)}$$

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \lambda_0$$

(α) απορρίπτω H_0 αν $f < F_{n-1,m-1,1-a/2}$ ή $f > F_{n-1,m-1,a/2}$,

(β) απορρίπτω H_0 αν $f > F_{n-1,m-1,a}$, (γ) απορρίπτω H_0 αν $f < F_{n-1,m-1,1-a}$

Ασκήσεις

Ο βωξίτης είναι το μετάλλευμα που χρησιμοποιείται για την παραγωγή αλουμίνας (Al_2O_3). Οικονομικά εκμεταλλεύσιμος για παραγωγή αλουμίνας (η οποία χρησιμοποιείται για την παραγωγή μεταλλικού αλουμινίου) θεωρείται ο βωξίτης, ο οποίος περιέχει τουλάχιστον 50% Al_2O_3 και λιγότερο από 5% πυρίτιο (Si).

Από προηγούμενες γεωλογικές μελέτες είναι γνωστό ότι η περιεκτικότητα Al_2O_3 στα κοιτάσματα βωξίτη μιας περιοχής περιγράφεται ικανοποιητικά από μια κανονική κατανομή με μέση τιμή 55% και τυπική απόκλιση 3.5%, η περιεκτικότητα σε Si περιγράφεται ικανοποιητικά από μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 1% έως 10%, ενώ οι συγκεντρώσεις των δύο υλικών σε ένα κοίτασμα βωξίτη θεωρούνται ανεξάρτητες. Από την περιοχή αυτή επιλέγονται τυχαία διάφορα κοιτάσματά της και εξετάζεται η δυνατότητα εμπορικής εκμετάλλευσής τους ή όχι.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα χωρίς χρήση του MINITAB.

(α-2) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένα τυχαίο κοίτασμα βωξίτη να περιέχει περισσότερο από 58% Al_2O_3.

(β-4) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένα κοίτασμα βωξίτη να είναι εμπορικά εκμεταλλεύσιμο.

(γ-3) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ένα δείγμα 10 ανεξάρτητων κοιτασμάτων βωξίτη από τη συγκεκριμένη περιοχή να είναι εμπορικά εκμεταλλεύσιμα λιγότερα από 3.

(δ-3) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να χρειαστεί να εξετάσουμε περισσότερα από 3 κοιτάσματα βωξίτη μέχρι να εντοπίσουμε το δεύτερο εμπορικά εκμεταλλεύσιμο.

Ασκήσεις

Μια βιομηχανία κατασκευάζει μεταλλικά ελάσματα τα οποία αντέχουν σε καταπονήσεις ως 100N. Έχει διαπιστωθεί ωστόσο ότι τα συγκεκριμένα ελάσματα δεν αντέχουν σε καταπονήσεις 110N με πιθανότητα 0.20

(α-2) Αν επιλέξουμε τυχαία 12 μεταλλικά ελάσματα, ποια η πιθανότητα 4 από αυτά να μην αντέξουν όταν τους ασκηθεί καταπόνηση 110N

(β-1) Ποιος ο αριθμός των ελασμάτων που αναμένεται να μην αντέξουν την καταπόνηση των 110N, στο δείγμα των 12 ελασμάτων του ερωτήματος (α); Ποια η διασπορά του αριθμού των ελασμάτων, στο δείγμα αυτό, που δεν θα αντέξουν την καταπόνηση των 110N;

(γ-2) Εάν ελέγχουμε (ασκώντας καταπόνηση 110N) το ένα κατόπιν του άλλου, τα ελάσματα που παράγει η βιομηχανία, ποια η πιθανότητα να είναι το 6^{o}έλασμα το πρώτο που δεν θα αντέξει την καταπόνηση των 110N

(δ-2) Στον έλεγχο του ερωτήματος (γ), ποια η πιθανότητα να είναι το δέκατο έλασμα το τέταρτο που δεν θα αντέξει την καταπόνηση των 110N;

(ε-3) Υποθέτουμε ότι η βιομηχανία βελτιώνει την ποιότητα των ελασμάτων, με αποτέλεσμα η πιθανότητα να μην αντέχει κάποιο από αυτά την καταπόνηση των 110N να είναι ίση 0.04. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά (χρησιμοποιώντας κατάλληλη κατανομή Poisson) η πιθανότητα 10 ελάσματα σε τυχαίο δείγμα 100 ελασμάτων να μην αντέξουν την καταπόνηση των 110N.